ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 6. Espacio afín ii. Coordenadas cartesianas y baricéntricas.

1. Sea $\mathfrak{R} = \{O : \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ un sistema de referencia cartesiano en el espacio afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ respecto del cual el punto p tiene coordenadas $(0, -1)$. Construye otro sistema de referencia en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ respecto del cual el punto p tenga como coordenadas $(-1, 0)$.

2. Sean P, Q y R tres puntos de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tales que $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$ son linealmente independientes.

a) Prueba que los vectores $\vec{RP}$ y $\vec{RQ}$ son linealmente independientes.

Considera las referencias cartesianas $\mathcal{R} = \{P; \vec{PQ}, \vec{PR}\}$ y $\mathcal{R}' = \{R; \vec{RP}, \vec{RQ}\}$.

b) Escribe las coordenadas cartesianas de P, Q y R respecto a $\mathcal{R}$.

c) Escribe las coordenadas cartesianas de P, Q y R respecto a $\mathcal{R}'$.

d) Halla las ecuaciones de cambio de coordenadas entre las dos referencias.

e) Decide, de manera razonada, si existe algún punto en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con las mismas coordenadas respecto a los dos sistemas de referencia.

3. Determina unas ecuaciones implícitas de las variedades lineales $L_t = p_t + V$ de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, donde $p_t = (1, -2, 3, t)$ y $V = \mathfrak{L}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ con $\vec{u_1} = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{u_2} = (0, 0, 1, 1)$ y $\vec{u_3} = (1, 2, -1, 0)$ en un sistema de referencia fijado. ¿Para qué valor de t la variedad L_t pasa por el origen?

4. Halla unas ecuaciones implícitas de la variedad lineal L de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ generada por los puntos $p_1 = (1, 0, 0, 1)$, $p_2 = (0, 1, 0, 1)$ y $p_3 = (0, 0, 1, 1)$, cuyas coordenadas están dadas con respecto a un sistema de referencia fijado. ¿Cuál es la dimension de L?

5. Halla unas ecuaciones implícitas del subespacio afín de $\mathbb{A}^5$ generado por los puntos $P_1 = (-1, 2, -1, 0, 4)$, $P_2 = (0, -1, 3, 5, 1)$, $P_3 = (4, -2, 0, 0, -3)$ y $P_4 = (3, -1, 2, 5, 2)$.

6. En $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ y con respecto de una referencia dada $\mathfrak{R}$, se dan los puntos $A = (1, 1)$, $B = (-2, 0)$, los vectores $\vec{u_1} = (1, 2)$ y $\vec{u_2} = (-1, 1)$ y la variedad lineal L de ecuaciones $x_1 - x_2 = 1$.

a) Halla las coordenadas de B respecto al sistema de referencia $\mathfrak{R}' = \{A; \vec{u_1}, \vec{u_2}\}$.

b) Halla una ecuación implícita de L con respecto a $\mathfrak{R}'$.

7. Sea $\mathfrak{R}'$ un sistema de referencia en el plano $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ que se obtiene girando un ángulo α en sentido positivo los vectores de un sistema de referencia canónico $\mathfrak{R}$. Si C es la circunferencia cuyos puntos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfacen $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4$ en el sistema de referencia $\mathfrak{R}$, halla las ecuaciones de C en el sistema de referencia $\mathfrak{R}'$. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia respecto de $\mathfrak{R}'$?

8. En $\mathbb{A}^3$ se consideran las referencias cartesianas:

$$\mathcal{R} = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \text{ y } \mathcal{R}' = \{O', \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}.$$

Sean $O'_{\mathcal{R}} = (-1, 6, 2)$, $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1$ y $\vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$. Si un plano π tiene ecuación $2x - y + 3z = 0$ en $\mathcal{R}$, halla su ecuación respecto a $\mathcal{R}'$.

9. En $\mathbb{A}^2$, considera los puntos P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1 y Q_2, cuyas coordenadas cartesianas en el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R}_C = \{P_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ son las siguientes:

$$\begin{array}{lll} P_0 = (0,0), & P_1 = (1,7), & P_2 = (1,1) \\ Q_0 = (-1,1), & Q_1 = (1,4), & Q_2 = (3,0) \end{array}$$

a) Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ son afinmente independientes. Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ son afinmente independientes.

b) Halla las coordenadas baricéntricas de P_0, P_1 y P_2 respecto a $\mathcal{R}''$ y las de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a $\mathcal{R}'$.

Considera los sistemas de referencia cartesiana $\mathcal{R}'_C = \{P_0, \vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$ y $\mathcal{R}''_C = \{Q_0, \vec{Q_0Q_1}, \vec{Q_0Q_2}\}$.

c) Calcula las coordenadas cartesianas de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a $\mathcal{R}'_C$ y las de P_0, P_1 y P_2 respecto a $\mathcal{R}''_C$.

d) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas cartesianas entre $\mathcal{R}'_C$ y $\mathcal{R}''_C$.

e) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas baricéntricas entre $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}''$.

10. Sean $A = (1,1,1), B = (1,2,3), C = (2,3,1)$ y $D = (3,1,2)$ cuatro puntos de $\mathbb{A}^3$ dados por sus coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia $\mathcal{R}$.

a) Demuestra que $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$ es un sistema de referencia baricéntrico.

b) Calcula las coordenadas cartesianas respecto a $\mathcal{R}$ del baricentro de A, B, C, D.

c) Si $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, halla las coordenadas baricéntricas de O respecto a $\mathcal{R}'$.

11. Demuestra que en $\mathbb{A}^2$ los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

12. Sean O un punto y sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores linealmente independientes. A todo escalar λ, se le asocian los puntos A y B tales que

$$\vec{OA} = \lambda\vec{u}, \quad \vec{OB} = \lambda\vec{v}.$$

Determina el baricentro de A y B en función de λ.

13. En el espacio afín (A, V, φ) de dimensión n, sean L_1 y L_2 dos variedades lineales. Demuestra que si la dimensión de L_1 es $n-1$ y la dimensión de $L_2 \geq 1$, entonces L_1 y L_2 no se pueden cruzar.

14. En el espacio afín (A, V, φ) de dimensión n, sean $L_1 = a_1 + V_1$ y $L_2 = a_2 + V_2$ dos variedades lineales. Demuestra que si $V = V_1 \oplus V_2$, entonces L_1 y L_2 se cortan en un punto.