FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). 1^a **sem. Feb. 2011**
MODELO EXAMEN A

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Considere el conjunto M de las funciones continuas de variable real definidas en todo el dominio $\mathbb{R}$. $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continua en todo } x \in \mathbb{R}\}$. Dados dos elementos cualesquiera $f, g \in M$ la operación producto $\cdot$ se define como

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Considere los elementos $f_1(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2 - x + 8$, $f_4(x) = \cos x$. Señale el número de ellos que tienen inverso con respecto a dicha operación.
(a) 4 $\quad$ (b) 2 $\quad$ (c) 3 $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Señale el valor del determinante de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \end{pmatrix}$$

en donde a, b, c, d, e, f y g son parámetros reales arbitrarios
(a) $-efdg$ $\quad$ (b) $afdg$ $\quad$ (c) $-aefg$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sean los subespacios $\mathbb{E}_1 = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$ y $\mathbb{E}_2$ el subespacio generado por el sistema $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Señale las ecuaciones implícitas del subespacio $\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2$.
(a) $x = y = z = 0$ (b) $x - y + z = 0$, $y = 0$ (c) $x - z = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

señale una base del subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$.
(a) $\{(1, 0, 1), (2, 0, 2)\}$ (b) $\{(0, 0, 1), (1, 0, 0\}$ (c) $\{(1, 0, 1)\}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Dada la forma cuadrática $w(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 6x_1x_3 + x_3^2$. Señale una base del espacio conjugado a los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0, -1)$.
(a) $\{(-3, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ $\quad$ (b) $\{(-3, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$
(c) $\{(-3, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

6. Cálcule el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} e^{\dfrac{1 + x - e^x}{x^2}}$$

(a) $1/\sqrt{e}$ $\quad$ (b) $-\sqrt{e}$ $\quad$ (c) 1 $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

7. Determine el numero de raíces reales que tiene la ecuación $x^3 - x + 1 = 0$.
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

8. Señale el valor de la integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$.
(a) $I = (\pi^2 - 8)/4$ (b) $I = (\pi^2 - 2)/2$ (c) $I = (\pi^2 - 6)/2$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Sea P_2 el polinomio de Taylor de segundo orden de la función $f(x, y) = e^{x+2y}$ en el punto $(0, 0)$. Señale la respuesta correcta:
(a) $P_2(1, 1) = 17/2$ (b) $P_2(1, 1) = 15/2$ (c) $P_2(1, 1) = 19/2$
(d) Ninguna de las anteriores

10. Señale el valor de la integral $I = \int_S xydxdy$ en donde

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\ \right\}$$

(a) $I = 1/2$ (b) $I = 0$ (c) $I = 1/8$ (d) Ninguna de las anteriores

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.
Febrero 2011. 1^a semana. MODELO A..

1. **Solución. (b)**

   Los elementos que tienen inverso son aquellos que no se anulan en ningún punto del dominio. Las funciones f_1, f_3 no se anulan ya que por un lado $f_1(x) = 2 + \operatorname{sen} x \geq 2 - 1 = 1$ para todo x y por otro lado las raíces de $x^2 - x + 1 = 0$ son complejas. Del mismo modo es fácil ver que f_2, f_4 se anulan en algún punto de la recta real.

2. **Solución. (a)**

   Desarrollando mediante los adjuntos de la cuarta columna

$$\det M = (-1)^{1+4} d \begin{vmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{vmatrix} = -defg$$

3. **Solución. (d)**

   $\mathbb{E}_2 = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. Luego su ecuación implícita es trivialmente $x = 0$. Adjuntando la ecuaciones de los dos espacios $\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$ obtenemos la ecuaciones implícitas de $\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2$ que son

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$$

   que no coincide con ninguna de las propuestas.

4. **Solución. (b)**

   Las ecuaciones del subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} (A - I)X &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

   Luego

$$\mathbb{E}_1 = \{(x, y, z) : y = 0\} = \{(x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

   y por tanto $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base por ser un sistema generador linealmente independiente de $\mathbb{E}_2$.

5. **Solución. (a)**

   Matricialmente

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + 6x_1x_3 + x_3^2 = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un vector $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ pertenece al espacio $\mathbb{E}$ conjugado a v_1, v_2 si verifica simultaneamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + 3x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + 3x_3 = 0$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 3x_3 = 0\} = \\ &= \{(-3x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(-3, 0, 1, 0) + x_2(0, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Por tanto $\{(-3, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))\}$ es una base de $\mathbb{E}$ por ser un sistema generador linealmente independiente.

6. **Solución. (a)**

Calculamos el límite por L'Hopital

$$\lim_{x \to 0} e^{\dfrac{1 + x - e^x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x - e^x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^x}{2x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^x}{2}} = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$$

7. **Solución (a)**

$f(x) = x^3 - x + 1$, y su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$ que se anula en los puntos $x_1 = -\sqrt{3}/3$, $x_2 = \sqrt{3}/3$. En el intervalo $(-\infty, x_1)$ la función derivada toma signo constante positivo luego f es creciente, en el intervalo (x_1, x_2) la función derivada toma signo positiva y es por tanto decreciente y en el intervalo (x_2, ∞) la derivada toma signo positivo y es creciente. x_1 es por tanto un máximo local y respectivamente x_2 es un mínimo local. Además $f(x) \geq f(x_2)$ para todo $x \in (x_1, \infty)$, y $f(x) < f(x_1)$ con f decreciente en $(-\infty, x_1)$. Como además $f(x_1)$, $f(x_2)$ son estrictamente posititivos la única posibilidad es que exista un única raíz en $(-\infty, x_1)$. De hecho dicha raíz existe por el Teorema de Bolzano ya que por ejemplo $f(0) = 1$, $f(-2) = -5$.

8. **Solución (a)** Es una integral que se resuelve por partes

$$\int_0^{\pi/2} uv'dx = [uv]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'vdx$$

En este caso $u = x^2$, $u' = 2x$, $v' = \cos x$, $v = senx$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx &= [x^2 senx]_{x=0}^{x=\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} xsenxdx \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\pi/2} xsenxdx = \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2\left([-x\cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(-\cos x)dx\right) \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}
\end{aligned}$$

en donde al final del cálculo hemos vuelto a integrar por partes.

9. **Solución (a)**

$f(x, y) = e^{x+2y}$. Operando $f(0, 0) = 1$, las primeras derivadas son

$$\begin{aligned}
D_1 f(0,0) &= [e^{x+2y}]_{(x,y)=(0,0)} = 1, \\
D_2 f(0,0) &= [2e^{x+2y}]_{(x,y)=(0,0)} = 2,
\end{aligned}$$

y las segundas

$$\begin{aligned}
D_{11} f(0,0) &= [e^{x+2y}]_{(x,y)=(0,0)} = 1, \\
D_{12} f(0,0) &= [2e^{x+2y}]_{(x,y)=(0,0)} = 2, \\
D_{22} f(0,0) &= [4e^{x+2y}]_{(x,y)=(0,0)} = 4.
\end{aligned}$$

El polinomio de Taylor es

$$P_2(x, y) = 1 + x + 2y + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + 4y^2)$$

Luego

$$P_2(1, 1) = 1 + 1 + 2 + \frac{1}{2}9 = \frac{17}{2}$$

10. **Solución (c)**

Se resuelve mediante un cambio a polares

$$x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta$$

El jacobiano es $J(r, \theta) = r$ y S es la parte del círculo de radio 1 $(0 \le r \le 1)$ en el primer cuadrante $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_S xydxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cos\theta r\operatorname{sen}\theta r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}d\theta = \\
&= \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). 2^a sem. Feb. 2011
MODELO EXAMEN C

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Señale el supremo del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 1 > 0\}$.
   (a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) Ninguna de las anteriores

2. Cálcule el determinante de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) 0 (b) 14 (c) -12 (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea B la matriz inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   y sea el vector columna $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Señale la respuesta correcta:
   (a) $(BD)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $(BD)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (c) $(BD)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   señale las ecuaciones implícitas del subespacio $\mathbb{E}_1$ asociada al autovalor $\lambda_1 = 0$.
   (a) $3x + y = 0$ (b) $x + y = 0$ (c) $x + 2y = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $p(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1$. Existen números reales a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 tales que

$$p(x) = a_5(x-1)^5 + a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

   Señale la respuesta correcta.
   (a) $a_3 = 41$ (b) $a_3 = 48$ (c) $a_3 = 42$ (d) Ninguna de las anteriores

6. Señale el valor de la integral $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen}(x^2 + 1) dx$
   (a) $I = 2\cos 1$ (b) $I = \cos 1$ (c) $I = -\cos 1$ (d) Ninguna de las anteriores

7. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(\mathbf{x}) = X^T AX + B^T X$ para cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y en donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Señale el valor $DF(1,1,1)(1,0,1)$.
(a) $DF(1,1,1)(1,0,1) = 5$ (b) $DF(1,1,1)(1,0,1) = 3$ (c) $DF(1,1,1)(1,0,1) = 2$
(d) Ninguna de las anteriores

8. Señale el valor de la integral $I = \int_S xy^4 dxdy$ en donde

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \right\}$$

(a) $I = 1/210$ (b) $I = 1/250$ (c) $I = 1/300$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Señale los valores de λ para los que la forma cuadrática

$$w(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 + 2\lambda x_2x_3 + \lambda x_3^2$$

es definida positiva.
(a) Para $\lambda > 0$ (b) Para ningún λ (c) Para todo λ (d) Ninguna de las anteriores

10. Dada la tabla

x_k	-1	1	2
$f(x_k)$	-1	-1	-4

determínese mediante el polinomio de interpolacion de Lagrange una aproximacion del valor $f(1/2)$
(a) -1 (b) -1/4 (c) -1/2 (d) Ninguna de las anteriores

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.
Febrero 2011. 2^a semana. MODELO C..

1. **Solución. (a)**

   $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 > x^2\} = (-1, 1)$, por tanto $\sup(-1, 1) = 1$.

2. **Solución. (c)**

   Desarrollando en primer lugar por adjuntos de la segunda columna

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+4} 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 9 & 3 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 2(84 - 90) = -12$$

3. **Solución. (b)**

   La matriz producto BD se corresponde con la primera columna de la matriz B. Luego solamente tenemos que calcular la primera columna de la matriz inversa. Por el teorema de caracterización de la inversa

$$(BD)_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1,\ (BD)_{12} = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0,\ (BD)_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

4. **Solución. (b)**

   Las ecuaciones del subespacio E asociado al autovalor 0 son

$$(A - 0I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0$$

5. **Solución. (d)**

   Por el teorema de Taylor $a_3 = \dfrac{p'''(1)}{6}$.

   Como $p'''(x) = 60x^2 - 24x + 6$, entonces $p'''(1) = 42$ y por tanto $a_3 = \frac{42}{6} = 7$.

6. **Solución. (b)**

   Mediante el cambio $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$ la integral es inmediata

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} xsen(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^{\pi+1} senudu = \frac{1}{2}[-\cos u]_{u=1}^{u=\pi+1} = \frac{1}{2}(-\cos(\pi+1) + \cos 1) =$$
$$= \frac{1}{2}(-(\cos 1 \cos \pi - sen\pi sen1) + \cos 1) = \cos 1$$

7. **Solución. (a)** Como

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{3} b_i x_i$$

Luego

$$\begin{aligned} D_iF(x_1,x_2,x_3) &= \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + a_{ji}x_j + b_i = \\ &\underset{a_{ij}=a_{ji}}{=} 2\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + b_i \end{aligned}$$

y por tanto

$$DF(x_1,x_2,x_3) = (D_1F(x_1,x_2,x_3)\ D_2F(x_1,x_2,x_3)\ D_3F(x_1,x_2,x_3)) = 2X^TA + B.$$

En particular

$$DF(1,1,1) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$DF(1,1,1)(1,0,1) = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

8. **Solución. (a)**

La integral viene dada por

$$\begin{aligned} \int_S xy^4dxdy &= \int_0^1 x\left(\int_0^{1-x} y^4dy\right)dx = \int_0^1 x[\frac{y^5}{5}]_{y=0}^{y=1-x}dx = \int_0^1 x\frac{(1-y)^5}{5}dx = \\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 (1-t)t^5dt = \frac{1}{5}\int_0^1 (t^6-t^7)dt = \frac{1}{5}([\frac{t^6}{6}]_{t=0}^{t=1} - [\frac{t^7}{6}]_{t=0}^{t=1}]) = \\ &= \frac{1}{210} \end{aligned}$$

en donde hemos realizado el cambio $t = 1-x$, $dx = -dt$.

9. **Solución. (b)**

$$w(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 3 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Aplicando el criterio de Silvester para que la forma cuadrática sea definida positiva se debe de cumplir que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 3 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^2 - 9 > 0$$

pero esto es falso para cualquier λ ya que $p(\lambda) = \lambda - \lambda^2 - 9$ es un polinomio de segundo grado sin raíces reales. Por tanto p es de signo constante, y como $p(0) = -9 < 0$ entonces $p(\lambda) < 0$ para todo λ.

10. **Solución.** **(b)** El polinomio de interpolación de Lagrange asociado es un polinomio de segundo grado $p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ verificando

$$\begin{aligned} p_2(-1) &= -1 \Leftrightarrow a_2 - a_1 + a_0 = -1 \\ p_2(1) &= -1 \Leftrightarrow a_2 + a_1 + a_0 = -1 \\ p_2(2) &= -4 \Leftrightarrow 4a_2 + 2a_1 + a_0 = -4 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema lineal obtenemos los coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = -1,\ a_1 = a_0 = 0$$

Luego $p_2(x) = -x^2$ y por tanto $p(1/2) = -1/4$.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). Sep. 2011
MODELO EXAMEN A

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Consideremos la función $f(x) = 3x^2 - x$. Partiendo del intervalo $I = [a_0, b_0] = [1/5, 1/2]$, sea (x_n) la sucesión generada al aplicar el método de Regula Falsi reiteradamente Aplicando la fórmula de estimación del error que aparece en el libro de texto señale el valor L para el que el criterio de paro $|x_n - x_{n-1}| \leq L$ asegura un error de aproximación $\varepsilon = 10^{-4}$.
(a) $L = 1,1111 \times 10^{-5}$ (b) $L = 10^{-5}/9$ (c) $L = 10^{-4}$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea (x_n) la sucesión definida recursivamente por $x_1 = 0$

$$x_n = \frac{-17x_{n-1} + 24}{4x_{n-1} - 13} \text{ para todo } n \geq 2.$$

Sabiendo que dicha sucesión es convergente y siempre toma valores negativos calcule su límite $L = \lim x_n$.
(a) $L = -4$ (b) $L = -2$ (c) $L = -5$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sea la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -6 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

que se obtiene "haciendo ceros" mediante transformaciones elementales por debajo del primer elemento de la diagonal en A. Si consideramos la matriz la matriz $C \in M_4$ tal que $B = CA$, señale la inversa de C.

(a) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea $\mathbb{P}_5 = \{p = a_5x^5 + a_4x^4 + ... + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial de polinomios

de grado igual o menor a 5. Consideremos los siguientes subconjuntos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_1 &= \left\{p \in P_5 : \int_0^1 p(x)dx = 0\right\} \\
\mathbb{V}_2 &= \left\{p \in P_5 : \int_0^1 p(x)dx > 0\right\} \\
\mathbb{V}_3 &= \{p \in P_5 : a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0\} \\
\mathbb{V}_4 &= \{p \in P_5 : |a_1 + a_2| = 0\}
\end{aligned}$$

Señale el número de ellos que son asimismo subespacio vectorial (Notación: $|\cdot|$ denota valor absoluto)

(*a*) 2 (*b*) 3 (*c*) 4 (*d*) Ninguna de las anteriores

5. Sea $\mathbf{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathbf{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Con respecto a dichas bases la matriz asociada a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz Q asociada a f si consideramos las bases

$$\mathbf{A}' = \{(1,1,0),(-1,1,0),(0,0,1)\}, \mathbf{B} = \{(1,0),(1,0)\}.$$

(*a*) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (*b*) $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(*c*) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (*d*) Ninguna de las anteriores

6. Sea $\mathbf{A} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una forma bilineal simétrica que satisface $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = -1$, $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1$, $\varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = -1$, $\varphi(2\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_2) = 6$, $\varphi(-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3) = -2$, $\varphi(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 2$. Consideremos otra base $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Determínese la matriz de la aplicación φ respecto de la base $\mathbf{B}$.

(*a*) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ (*b*) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ (*c*) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 8 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (*d*) Ninguna de las anteriores

7. Señale el valor de la integral $I = \int_0^e x^5 \ln x dx$. (ln-logaritmo neperiano).

(*a*) $I = (5e^6)/36$ (*b*) $I = e^6/36$ (*c*) $I = e^6/6$ (*d*) Ninguna de las anteriores

8. Sean las funciones $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por $g(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Asimismo sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función compuesta definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(h(x_1, -x_3), x_3, h(x_1, x_2))$$

Señale su matriz jacobiana $f'(0,1,0)$

(a) $f'(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $f'(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $f'(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Señale el valor de la integral $I = \int_M \frac{2y}{x^2+1} dxdy$ en donde $M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,$ $0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

(a) $I = (\ln 2)/2$ (b) $I = (\ln 5)/2$ (c) $I = (\ln 7)/2$ (d) Ninguna de las anteriores

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ determine la matriz potencia A^{200}:

(a) $A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Ninguna de las anteriores

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática).
MODELO EXAMEN A

1. **Solución. (a)**

   Por la fórmula de la página 316 del libro de texto, siempre que la derivada segunda f'' tenga signo constante como en este caso ya que $f''(x) = 6$, se tiene que

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M' - m'}{m'} |x_n - x_{n-1}|$$

   siendo ξ la raíz que se encuentra en el intervalo I (en este caso particular compruébese que $\xi = 1/3$), $M' = \max_{x\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]} f'(x)$, $m' = \min_{x\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]} f'(x)$. Utilizando dicha fórmula para que $|\xi - x_n| \leq 10^{-4}$ es suficiente que

$$\frac{M' - m'}{m'} |x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-4} \Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m'}{M' - m'} 10^{-4}$$

   Por tanto la cota L viene dada por

$$L = \frac{m'}{M' - m'} 10^{-4}$$

   Calculando

$$m' = \min_{x\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]} f'(x) = \min_{x\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]} 6x - 1 = 1/5,\ M' = \max_{x\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]} f'(x) = \max_{x\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]} 6x - 1 = 2$$

   el valor de la constante se calcula directamente

$$L = \frac{1/5}{2 - 1/5} 10^{-4} = 10^{-4}/9 = 1,1111 \times 10^{-5}$$

2. **Solución. (d)**

   Por hipótesis existe $L = \lim x_n$, con lo que basta tomar directamente límites en la expresión recursiva

$$L = \frac{-17L + 24}{4L - 13} \Leftrightarrow L^2 + L - 6 = 0$$

   Las raíces de la última ecuación $L = -3$, $L = 2$ nos dan los posibles valores del límite. Descartamos el positivo ya que sabemos que la sucesión siempre toma valores negativos, por tanto necesariamente $L = -3$.

3. **Solución. (b)** En general de $B = CA$ se deduce

$$A = C^{-1}B$$

   Luego de una manera directa basta comprobar si cualquiera de las opciones verifican esta identidad. Como

$$\begin{aligned}
C^{-1}B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -6 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -16 & -9 & -16 \\ -1 & -6 & -2 & -3 \\ -2 & -7 & -1 & -11 \end{pmatrix} \neq A \\
C^{-1}B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -6 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A \\
C^{-1}B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -6 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq A
\end{aligned}$$

   La respuesta correcta es (b).

   De otra manera, por el proceso de eliminación Gaussiana se tiene que la matriz C no es más que la matriz resultado de adjuntar a la matriz unidad los correspondientes factores de la eliminación Gaussiana por debajo del pivote. En este caso dicho pivote es el primer elemento de la diagonal. Por ejemplo el factor situado en la segunda fila es

-3 ya que es el factor por el que se multiplica la primera fila para sumarsela a la correspondiente fila con objeto de obtener un cero en el elemento b_{12}, y así sucesivamente para el resto de filas. De este modo se tiene que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de estructura simple cuya diagonal se obtiene cambiando el signo a los factores

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Solución. (b)**

   Para estudiar si los subconjuntos son subespacios vectoriales basta comprobar si se cumple la caracterización de subespacio vectorial (véase página 50 libro texto). $\mathbb{V}_1$ es un subespacio vectorial ya que dados dos polinominios $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2 \in P_5$ tales que $\int_0^1 \mathbf{p}_1(x)dx = \int_0^1 \mathbf{p}_2(x)dx = 0$, por propiedades elementales de integración se tiene que $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}_1 + \mu\ \mathbf{p}_2$ tiene integral nula ya que

$$\int_0^1 \mathbf{p}(x)dx = \lambda \int_0^1 \mathbf{p}_1(x)dx + \mu \int_0^1 \mathbf{p}_2(x)dx = 0$$

   En cambio $\mathbb{V}_2$ no es un espacio vectorial, de hecho sabemos por la misma caracterización de subespacio vectorial. que el vector nulo pertenece a cualquier subespacio vectorial y en este caso el polinomio nulo $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ no pertenece a $\mathbb{V}_2$ ya que su integral es cero. Por otro lado $\mathbb{V}_3$ sí es subespacio vectorial, dados dos polinomios $\mathbf{p}_1 = \sum_{i=0}^{5} a_i x^i$, $\mathbf{p}_2 = \sum_{i=0}^{5} b_i x^i \in P_5$ en donde $\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{i=1}^{5} b_i = 0$ se tiene que $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}_1 + \mu\ \mathbf{p}_2 = \sum_{i=0}^{5}(\lambda a_i + \mu b_i)x^i$ y se cumple $\sum_{i=0}^{5}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i=1}^{5} a_i + \mu \sum_{i=1}^{5} b_i = 0$ por hipótesis. Del mismo $\mathbb{V}_4$ es un subespacio vectorial ya que $|a_1 + a_2| = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 = 0$ y la prueba es muy similar a la dada para el caso anterior.

5. **Solución. (c)** ó **(d)**

   En primer lugar existe una errata evidente al referirnos por segunda vez a la base $\mathbf{B}$ ya que tal como está escrito en primer lugar $\mathbf{B}$ es la base canónica $\{(1,0),(0,1)\}$ y no $\{(1,0),(1,0)\}$ que no constituye una base de $\mathbb{R}^2$. La matriz de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Luego $Y' = AY$ y por tanto

$$Y = PX \Rightarrow A^{-1}Y' = PX \Leftrightarrow Y' = APX \Rightarrow Q = AP$$

   Luego

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Al haber una errata en el enunciado tambien se considera como correcta la pregunta d. Aquellos que hayan contestado cualquier otra respuesta o no hayan constestado se les considerar la pregunta como anulada.

6. **Anulada**

   Existe un error en el enunciado ya que $\mathbf{B}$ no es una base, luego se considera anulada la pregunta.

7. **Solución. (a)** Se resuelve integrando por partes, en particular consideramos $u = \ln x$, $dv = x^5$ con lo que $u' = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{x^6}{6}$. De este modo aplicando la fórmula de integración por partes se obtiene

$$\int_0^e x^5 \ln x dx = \left[\frac{x^6 \ln x}{6}\right]_{x=0}^{x=e} - \int_0^e \frac{x^5}{6} dx = \frac{e^6}{6} - \frac{e^6}{36} = \frac{5e^6}{36}$$

8. **Solución.** **(b)** Podemos considerar la función como una composición de funciones y aplicar la regla de la cadena. De hecho $f = g \circ t$ en donde $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación (lineal) definida por

$$t(x_1, x_2, x_3) = (h(x_1, -x_3), x_3, h(x_1, x_2)) = (x_1 - x_3, x_3, x_1 + x_2)$$

Las jacobianas son

$$\begin{aligned} t'(0,1,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ g'(t(0,1,0)) &= g(0,0,1) = \left[\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \right]_{(x_1,x_2,x_3)=(0,0,1)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$Df(t(0,1,0) \circ Dt(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. **Solución.** **(b)** Se resuelve por integración reiterada

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{x^2+1} \left(\int_0^{\sqrt{x}} 2y dy \right) &= \int_0^2 \frac{dx}{x^2+1} \left[y^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{x dx}{x^2+1} = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 \end{aligned}$$

10. **Solución.** **(b)** ó **(c)**

En general dada una matriz diagonalizable A se tiene la descomposición

$$A = PDP^{-1} \tag{1}$$

en donde D es una matriz diagonal cuya diagonal está formada por una ordenación de los distintos autovalores de A, y P es la matriz de paso asociada formada por los correspondientes autovectores como columnas el mismo orden (léase Tema 4 Sección 5 del libro de texto). De (1) se puede obtener una fórmula recursiva para hallar la potencia n-esima de A ya que

$$\begin{aligned} A^2 &= PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ A^n &= A^{n-1}A = PD^{n-1}P^{-1}PDP^{-1} = PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

En este caso $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene como autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, y $\mathbf{v}_1 = (1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1)$ como sus correspondientes autovectores. Por lo que podemos considerar

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Evidentemente tambien se considera valida la respuesta (c) al coincidir con la (b)

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). Feb. 2012
MODELO EXAMEN A

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Si $a \in [-1, 1]$ señale el valor de a que hace máximo el determinante de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(a) $a = 1/4$ (b) $a = 0$ (c) $a = 3/4$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea $\mathbb{R}^3$ con la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathbb{R}^4$ con la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ .Determínese el rango de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 \\ f(\mathbf{u}_2) &= -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 \\ f(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

(a) 1 (b) 3 (c) 2 (d) Ninguna de las anteriores

3. Dados los sistemas $\mathbf{A} = \{(1, 0), (1, 1)\}$, $\mathbf{B} = \{(1, -1), (2, 1)\}$. Señale la matriz de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea el conjunto $M = \{a, b, c, d\}$ y consideremos la ley de composición interna $\diamond$ definida mediante la tabla

$\diamond$	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

Senale el elemento inverso del elemento $a \diamond (a \diamond (b \diamond (c \diamond d)))$ respecto a la operación $\diamond$.

(a) e (b) a (c) c (d) Ninguna de las anteriores

5. Dada la forma cuadrática

$$w(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

señale las ecuaciones implícitas del subespacio asociado al vector $\mathbf{v} = (1, 0, -1, 1)$.
(a) $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, $x_3 = \lambda_2$ $x_3 = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3$, $x_4 = \lambda_3$
(b) $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, $x_3 = \lambda_2$ $x_3 = 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3$, $x_4 = \lambda_3$
(c) $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, $x_3 = \lambda_2$ $x_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$, $x_4 = \lambda_3$
(d) Ninguna de las anteriores

6. Determine el número de raíces reales que tiene la ecuación $x^3 - x^2 + 2 = 0$.
(a) Ninguna (b) 1 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

7. Señale el valor de la integral $I = \int_0^1 \dfrac{tdt}{(t+1)^2}$.
(a) $I = (2\ln 2 - 1)/2$ (b) $I = (\ln 2 + 1)/2$ (c) $I = (\ln 2 - 1)/2$ (d) Ninguna de las anteriores

8. Sean las funciones $F(x, y) = (x - y^3, x + x^2 y)$, $G(x, y) = (xy^2, x - y)$. Señale la matriz jacobiana de la función compuesta $F \circ G$ en el punto $(1, 1)$.
(a) $(F \circ G)'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $(F \circ G)'(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
(c) $(F \circ G)'(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Señale el valor de $I = \int_M xdxdy$ en donde $M = \{(x, y) : 1 + 2x \geq y,\ y \geq 0,\ y \leq 1 - 2x\}$
(a) 0 (b) 1 (c) $\dfrac{3}{2}$ (d) Ninguna de las anteriores

10. Cálcule el error cometido al aproximar la integral $\int_0^1 x^2 dx$ mediante la regla de trapecios con $n = 3$.
(a) $\dfrac{3}{27}$ (b) $\dfrac{5}{27}$ (c) $\dfrac{2}{27}$ (d) Ninguna de las anteriores

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.
Febrero 2012. 1^a semana. MODELO A..

1. **Solución. (a)**

Calculamos el determinante desarrollando por los adjunto de la tercera fila, de esta manera

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + a + 1$$

Se trata por tanto de hallar el máximo de la función real $f(a) = -2a^2+a+1$. Su función derivada es $f'(a) = -4a+1$ y su único punto crítico viene dado por $a = 1/4$. Dicho punto es máximo local por ser su derivada segunda $f''(a) = -4 < 0$ estrictamente negativa, de hecho la función es concava y por tanto dicho máximo es global.

2. **Solución. (a)**

El rango de la aplicación lineal coincide con el rango de la matriz asociada. La matriz asociada a la aplicación lineal tiene como columnas las coordenadas de la imagen de la base $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con respecto a la base $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. En este caso la matriz asociada viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda y tercera columna de la matriz son combinación lineal de la primera. Luego el mayor número de vectores columnas linealmente independientes es uno y por tanto el rango es 1.

3. **Solución. (b)** La matriz de cambio de la base **A** a **B** que denotamos por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es aquella que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de **A** con respecto de **B**. Es decir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A$$

por lo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

4. **Solución. (a)**

En primer lugar de la tabla deducimos que a es el elemento neutro de $\diamond$ ya que

$$\begin{aligned} a \diamond a &= a \\ a \diamond b &= b \diamond a = b \\ a \diamond c &= c \diamond a = c \\ a \diamond d &= d \diamond a = d \end{aligned}$$

Por otro lado operando

$$\begin{aligned} a \diamond (a \diamond (b \diamond (c \diamond d))) &= a \diamond (a \diamond (b \diamond a)) = \\ a \diamond (a \diamond b) &= a \diamond b = b \end{aligned}$$

Y el inverso de b con respecto a a es e ya que

$$e \diamond b = b \diamond e = a$$

5. **Solución. (d)**

La respuesta es (d) ya que las ecuaciones dadas en (a), (b) y (c) son paramétricas y no implícitas.

6. **Solución. (b)**

Sea $f(x) = x^3 - x^2 + 2$. Estudiemos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. La función derivada $f'(x) = 3x^2 - 2x$ se anula en los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 2/3$. En el intervalo $(-\infty, 0]$ la función derivada es positiva luego f crece, de igual modo en $(0, 2/3)$ la función derivada es negativa luego la función es decreciente y finalmente en $(2/3, \infty)$ la función derivada vuelve a ser positiva ya que es creciente. De lo que se deduce en primer lugar que

$$f(x) \geq f(2/3) > 0 \text{ para todo } x \in (0, \infty)$$

Por lo que en $(0, \infty)$ la función f no tiene ninguna raíz. Por otro lado en $(-\infty, 0]$ la función solamente puede tener una raíz por ser creciente, de hecho dicha raíz existe como aplicación directa del Teorema de Bolzano ya que como la función es continua y por ejemplo $f(-2) < 0$, $f(0) > 0$ por dicho teorema se puede asegurar que la raíz existe en el intervalo $(-2, 0)$.

7. **Solución. (a)** Es una integral racional que se resuelve descomponiendo por fracciones simples (p.215 libro de texto). De esta forma

$$\frac{t}{(t+1)^2} = \frac{A_1}{(t+1)} + \frac{A_2}{(t+1)^2} = \frac{A_1 t + A_1 + A_2}{(t+1)^2}$$

en donde A_1, A_2 constantes a determinar. Identificando coeficientes

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_1 + A_2 &= 0 \end{aligned}$$

y por tanto $A_1 = 1$, $A_2 = -1$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{tdt}{(t+1)^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{t+1} - \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} \\
&= [\ln(t+1)]_{t=0}^{t=1} - \left[\frac{(t+1)^{-2+1}}{-2+1}\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \ln 2 - 0 - (-\frac{1}{2} + 1) = \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{2\ln 2 - 1}{2}
\end{aligned}$$

8. **Solución. (a)**

Se resuelve aplicando la regla de la cadena (p. 247 libro de texto). Entonces $G(1,1) = (1,0)$ y las matrices jacobianas vienen dadas por

$$\begin{aligned}
F'(G(1,1)) = F(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -3y^2 \\ 1+2xy & x^2 \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
G'(1,1) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente aplicando la regla de la cadena se tiene

$$(F \circ G)'(1,1) = F'(1,0)G'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9. **Solución. (a)**

El recinto de integración viene dado por (representese gráficamente)

$$\left\{(x,y) : -\frac{1}{2} \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 1+2x\right\} \cup \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq 1-2x\right\}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\int_M xdxdy &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 xdx \int_0^{1+2x} dy + \int_0^{\frac{1}{2}} x \int_0^{1-2x} dy = \int_{-\frac{1}{2}}^0 x(1+2x)dx \\
+ \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-2x)dx &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-\frac{1}{2}}^{x=0} + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\frac{1}{2}}^{x=0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} \\
&= 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = 0
\end{aligned}$$

10. **Solución. (d)**

El valor de la integral es

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Aplicando la fórmula de los trapecios (p. 334 libro de texto) se tiene $n = 3$, $h = \frac{1}{3}$,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 dx &\approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\{f(x_k)+f(x_{k+1})\} = \frac{1}{6}\left\{0^2+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\right\} = \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}+\frac{8}{9}+1\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}+\frac{8}{9}+1\right) = \frac{19}{54}
\end{aligned}$$

Luego el error cometido viene dado por

$$\left|\frac{19}{54}-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{54}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). 2^a sem. Feb. 2012
MODELO EXAMEN C

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Dada la aplicación lineal T de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_3 - x_1, x_2 - x_1 + 4x_3, x_3, x_3 - x_1 + x_2 + x_4)$$

señale el determinante de su matriz asociada
(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) Ninguna de las anteriores

2. Consideremos el espacio vectorial de las matrices $\mathbb{M}_2$ de orden 2. De los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
\mathbf{S}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
\mathbf{S}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

señale el número de ellos que constituyen un base en $\mathbb{M}_2$.
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

3. Consideremos las matrices

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo $M = X(X^TX)X^T$ señale el valor V^TMV.
(a) $V^TMV = -1$ (b) $V^TMV = 6$ (c) $V^TMV = 2$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Considere $\mathbb{R}^4$ con la ley de composición interna $\diamond$ definida como

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \diamond (y_1,y_2,y_3,y_4) = (x_1y_1 + x_2y_3, x_1y_2 + x_2y_4, x_3y_1 + x_4y_3, x_3y_2 + x_4y_4)$$

Señale el elemento neutro e con respecto a dicha operación
(a) $e = (1,0,1,0)$ (b) $e = (0,0,0,0)$ (c) $e = (1,1,1,1)$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Considere la forma bilineal φ en $\mathbb{R}^3$ definida como

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

en donde los vectores de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$ están referidos a la base canónica

$$\mathbf{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Señale la matriz asociada a φ con respecto a una nueva base

$$\mathbf{B} = \{(1,1,1), (-1,1,1), (1,0,1)\}$$

(a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

6. Señale el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

(a) -1 (b) 2 (c) $1/2$ (d) Ninguna de las anteriores

7. Señale el valor de la integral $I = \int_0^1 xe^{2x}dx$.
(a) $I = \dfrac{e^2 - 1}{2}$ (b) $I = \dfrac{e^2 + 1}{4}$ (c) $I = \dfrac{e^2 + 1}{2}$ (d) Ninguna de las anteriores

8. Sea P_3 el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x,y) = xy^4$ en el punto $(1,1)$. Señale el valor $P_3(1,2)$
(a) $P_3(1,2) = 6$ (b) $P_3(1,2) = 16$ (c) $P_3(1,2) = 19$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Señale el valor de la integral $\int_M (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ en donde $M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ 0 \leq z\}$
(a) $\dfrac{2\pi}{5}$ (b) π (c) $\dfrac{\pi}{5}$ (d) Ninguna de las anteriores

10. Sea p el polinomio de interpolación de Lagrange dado por tabla

x_k	-1	0	1	2
$f(x_k)$	-1	0	1	-1

Señale la respuesta correcta:
(a) $p(3) = -9$ (b) $p(3) = -8$ (c) $p(3) = 11$ (d) Ninguna de las anteriores

Fundamentos de Matemáticas. Pruebas de Autoevaluación.
Capítulo 10. *Introducción al cálculo numérico*

1. **Solución. (b)** La matriz asociada a la aplicación lineal viene dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y sus determinante viene dado por

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

2. **Solución. (b)**

La base canónica de $\mathbb{M}_2$ viene dada por

$$\mathbf{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Una manera de estudiar si los sistemas $\mathbf{S}_i$ constituyen una base es ver si la matriz de paso que tiene como vectores columnas las coordenadas de los elementos de $\mathbf{S}_i$ con respecto a $\mathbf{E}$ tiene determinante no nulo y por tanto constituyen una matriz de cambio de base. Por ejemplo para el caso del sistema $\mathbf{S}_1$ la matriz de paso y su determinante viene dado por

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

y por tanto efectivamente tiene determinante no nulo y $\mathbf{S}_2$ es una base del espacio. Del mismo modo para $\mathbf{S}_2$ tenemos

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

y por tanto $\mathbf{S}_2$ también es base. En cambio $\mathbf{S}_3$ no es base ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De hecho se puede ver por ejemplo que el primer elemento del sistema es combinacion lineal de los otros

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Solución. (b)**

Dadas

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

basta operar directamente

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente

$$V^T M V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$$

4. **Solución. (d)**

El vector $(1,0,1,0)$ no puede ser el elemento neutro ya que por ejemplo

$$\begin{aligned} (1,0,1,0) \circ (1,0,0,0) &= (1 \times 1 + 0 \times 0, 1 \times 0 + 0 \times 0, 1 \times 1 + 0 \times 0, 1 \times 0 + 0 \times 0) \\ &= (1,0,1,0) \neq (1,0,0,0) \end{aligned}$$

El vector $(0,0,0,0)$ no puede ser el elemento neutro ya que por ejemplo

$$(0,0,0,0) \circ (1,0,0,0) = (0,0,0,0) \neq (1,1,1,1)$$

Del mismo modo el vector $(1,1,1,1)$ no es elemento neutro ya que

$$(1,1,1,1) \circ (1,0,0,0) = (1,0,1,0) \neq (1,0,0,0)$$

5. **Solución. (c)**

La matriz de la aplicación es la matriz identidad, y la matriz de cambio de base de la matriz **B** a la base canónica **A** viene dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz asociada a φ con respecto a **B** viene dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. **Solución. (b)**

Calculamos el límite aplicando dos veces la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x+2}{6x-2}=\frac{8}{4}=2$$

7. **Solución. (b)**

Calculamos la integral aplicando integral por partes (p. 214 libro de texto). Identificando $u'=e^{2x}$, $v=x$ se tiene $u=\dfrac{e^{2x}}{2}$, $v'=1$ y por tanto

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{2x}dx &= \left[\frac{e^{2x}x}{2}\right]_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{x=0}^{x=1}\\ &= \frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}=\frac{e^2+1}{4}\end{aligned}$$

8. **Solución. (d)**

Sea $f(x,y)=xy^4$. Calculamos la derivadas hasta orden 3 en el punto $(1,1)$

$$\begin{array}{ll} f(1,1)=1 & \\ D_1f(x,y)=y^4 & D_1f(1,1)=1\\ D_2f(x,y)=4y^3x & D_2f(1,1)=4\\ D_{11}f(x,y)=0 & D_{11}f(1,1)=0\\ D_{12}f(x,y)=4y^3 & D_{12}f(1,1)=4\\ D_{22}f(x,y)=12y^2x & D_{22}f(1,1)=12\\ D_{111}f(x,y)=0 & D_{111}f(1,1)=0\\ D_{112}f(x,y)=0 & D_{112}f(1,1)=0\\ D_{122}f(x,y)=12y^2 & D_{11}f(1,1)=12\\ D_{222}f(x,y)=24yx & D_{222}f(1,1)=24\end{array}$$

Por tanto el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $(1,1)$ viene dado por

$$\begin{aligned}P_3(x,y) &= 1+1(x-1)+4(y-1)+\frac{1}{2}(0(x-1)^2+8(x-1)(y-1)+12(y-1)^2)\\ &\frac{1}{6}(0(x-1)^3+3\times 0(x-1)^2(y-1)+3\times 12(x-1)(y-1)^2+24(y-1)^3)\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}P_3(1,2) &= 1+0+4+\frac{1}{2}(0+0+12)+\frac{1}{6}(0+0+0+24)\\ &= 1+4+6+4=15.\end{aligned}$$

9. **Solución. (a)**

Para resolver la integral hacemos un cambio a coordenadas esféricas $x=r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z=r\operatorname{sen}\varphi$, en donde el jacobiano del cambio viene dado por

$$J(r,\theta,\varphi)=-r^2\operatorname{sen}\varphi$$

(p. 284-5 libro de texto) y aplicamos el teorema de cambio de variables (p. 289). La función integrando y el recinto transformado viene dado por

$$f(r,\theta,\varphi)=r^2$$
$$T=\{(r,\theta,\varphi):0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$$

y por el teorema de cambio de variable

$$\begin{aligned}\int_M (x^2+y^2+z^2)dxdydz &= \int_T r^2 r^2 \operatorname{sen}\varphi d\varphi d\theta dr = \int_0^1 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi d\varphi \\ &= \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1} 2\pi \left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}\times 2\pi \times 1 = \frac{2\pi}{5}.\end{aligned}$$

10. **Solución.** **(a)** -Nodos de interpolación. $\{x_0,x_1,x_2,x_3\} = \{-1,0,1,2\}$.

-Funciones de interpolación de Lagrange

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{x-0}{-1-0}\frac{x-1}{-1-1}\frac{x-2}{-1-2} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\ L_1(x) &= \frac{x+1}{0+1}\frac{x-1}{0-1}\frac{x-2}{0-2} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} \\ L_2(x) &= \frac{x+1}{1+1}\frac{x-0}{1-0}\frac{x-2}{1-2} = -\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{2} \\ L_3(x) &= \frac{x+1}{2+1}\frac{x-0}{2-0}\frac{x-1}{2-1} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{6}\end{aligned}$$

-Polinomio de interpolación

$$\begin{aligned}P(x) &= (-1)\times\left(-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\right) + 0\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} \\ &\quad +1\times\left(-\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{2}\right) + (-1)\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{6}\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{gathered}P(3) = \tfrac{3(3-1)(3-2)}{6} - \tfrac{(3+1)(3-0)(3-2)}{2} \\ -\tfrac{(3+1)(3-0)(3-1)}{6} = 1-6-4 = -9\end{gathered}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). Sep. 2012
MODELO EXAMEN A

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sea el conjunto $L = \{B \in \mathbb{M}_2 : B \times C = C \times B\}$ de las matrices cuadradas de orden 2 que conmutan con C con respecto del producto usual $\times$ de matrices. Consideremos las siguiente dos afirmaciones:

   - A1. Las suma usual de matrices $+$ es una operación conmutativa sobre el conjunto L.
   - A2. El producto usual de matrices $\times$ es una operación conmutativa sobre el conjunto L.

   Señale la respuesta correcta.
   (a) Ambas afirmaciones, A1 y A2, son ciertas
   (b) A1 es cierta, pero A2 es falsa
   (c) A2 es cierta, pero A1 es falsa
   (d) Ninguna de las anteriores

2. Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene determinante 1, calcule el valor del determinante de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c + \dfrac{a}{2} & d + \dfrac{b}{2} \end{pmatrix}$$

   (a) $\det B = 1$ (b) $\det B = 1/2$ (c) $\det B = 3/2$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea $\mathbb{Q}_4$ el espacio vectorial generado por la familia de polinomios

$$\{\mathbf{q}_1(x, y) = 1, \mathbf{q}_2(x, y) = x, \mathbf{q}_3(x, y) = y, \mathbf{q}_4(x, y) = xy\},$$

   es decir

$$\mathbb{Q}_4 = \{\mathbf{p} = a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + a_4\mathbf{q}_4,\ a_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1, ..., 4\}$$

   Dado el subespacio vectorial $\mathbb{T} \subset \mathbb{Q}_4$ definido por

$$\mathbb{T} = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{Q}_4 : \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{p}(x, y)dxdy = 0\right\},$$

   señale sus ecuaciones implícitas.
   (a) $4a_1 + 2(a_2 + a_3) + a_4 = 0$ (b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$
   (c) $a_1 + 2a_2 + a_3 + 4a_4 = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Consideramos $\mathbb{M}_2$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con la base

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

Sea $f : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$ la aplicación lineal definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 \\ f(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_3) &= -2\mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_4) &= -\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Determine la matriz $f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión 2, y sean $\mathbf{A} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$ dos bases de dicho espacio. La matriz asociada a una forma bilineal $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ respecto de la base $\mathbf{A}$ viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Señale la matriz asociada de φ con respecto de la base $\mathbf{B}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

6. Calcule el error exacto cometido al aproximar la integral

$$\int_0^{2\pi} \cos(2x)dx$$

utilizando el método de los trapecios con $n = 4$ subintervalos de la misma longitud.

(a) $\pi/2$ (b) 0 (c) π (d) Ninguna de las anteriores

7. Sea p_3 el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = \ln(x^3 + 1)$ en el punto $x = 0$. Calcule el valor $p_3(1)$.

(a) $p_3(1) = 1/2$ (b) $p_3(1) = 0$ (c) $p_3(1) = 1$ (d) Ninguna de las anteriores

8. Dada la función $f(x) = \int_0^x (s^2 - 1)ds$ señale el punto $c \in (0, 1)$ para el que se verifica el teorema del valor medio del cálculo diferencial en el intervalo $[0, 1]$.

(a) $c = \sqrt{3}/3$ (b) $c = \sqrt{2}/2$ (c) $c = 1/3$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Señale el valor del siguiente límite $L = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x + y^3}{x^2 + 2xy + y^2}$.

(a) $L = 9$ (b) No existe (c) $L = 1$ (d) Ninguna de las anteriores

10. Sea T el triángulo de vertices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Señale el valor de la integral

$$I = \int_T xydxdy.$$

(a) $I = 1/24$ (b) $I = 1/12$ (c) $I = 1/9$ (d) Ninguna de las anteriores

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.
septiembre 2012. MODELO A.

1. **Solución. (a)**

Una matriz arbitraria $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ pertenece a L si se cumplen las siguientes equivalencias

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} b_1 & b_1+b_2 \\ b_3 & b_3+b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+b_3 & b_2+b_4 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ b_3 = 0, b_1 = b_4 \end{array}$$

Por tanto los elementos de L son matrices de la forma

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

La operación suma de matrices es una operación conmutativa sobre L, ya que efectivamente la suma de dos elementos arbitrarios

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \in L$$

sigue siendo un elemento de L. Además no influye el orden de como se sumen, de hecho se puede comprobar directamente por la propiedad conmutativa de los números reales

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' & y+y' \\ 0 & x+x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+x & y'+y \\ 0 & x'+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Del mismo modo, el producto de matrices es una operación conmutativa ya que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' & xy'+yx' \\ 0 & xx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

2. **Solución. (a)**

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c+\frac{a}{2} & d+\frac{b}{2} \end{pmatrix} = a(d+\frac{b}{2}) - b(c+\frac{a}{2}) = ad - bc = \det A = 1$$

3. **Solución. (a)**

Integrando directamente se tiene que

$$\begin{array}{rl} \mathbf{p} \in \mathbb{T} \Leftrightarrow & \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{p}(x,y)dxdy = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \int_0^1 (a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy)\, dxdy = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & a_1 \int_0^1 \int_0^1 dxdy + a_2 \int_0^1 \int_0^1 xdxdy + a_3 \int_0^1 \int_0^1 ydxdy + a_4 \int_0^1 \int_0^1 xydxdy = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & a_1 + a_2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} + a_3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} + a_4 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & a_1 + a_2 \frac{1}{2} + a_3 \frac{1}{2} + a_4 \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & 4a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \end{array}$$

4. **Solución. (b)**

Teniendo en cuenta

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$$

Luego

$$\begin{aligned} & f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 - 2\mathbf{v}_2 \\ & = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. **Solución. (b)**

La matriz de cambio de la base **B** a la base **A** viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz asociada a φ respecto de **B** viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. **Solución. (b)**

Por un lado, la integral exacta viene dada por

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(2s)ds = \left[\frac{sen(2s)}{2}\right]_{s=0}^{s=2\pi} = 0 - 0 = 0$$

Siguiendo la fórmula explicita (p. 335 libro de texto) en este caso tenemos $n = 5$, $h = 2\pi/4 = \pi/2$, la partición de puntos

$$P = \{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \pi,\ x_3 = \frac{3\pi}{2},\ x_4 = 2\pi\}$$

y la función $f(x) = \cos(2x)$. Aplicamos directamente la fórmula

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\right) \\ = & \frac{\pi/2}{2}\left(\cos 0 + 2\cos(\pi) + 2\cos(2\pi) + 2\cos(3\pi) + \cos(4\pi)\right) \\ = & \frac{\pi}{4}(1 - 2 + 2 - 2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto la formula integra exáctamente, y el error cometido es 0.

7. **Solución. (c)**

Calculamos las derivadas de la función en el punto $x = 0$

$$\begin{aligned}
f(0) &= \left[\ln(x^3+1)\right]_{x=0} = \ln 1 = 0 \\
f'(0) &= \left[\tfrac{3x^2}{x^3+1}\right]_{x=0} = 0 \\
f''(0) &= \left[\tfrac{6x(x^3+1)-\left(3x^2\right)^2}{(x^3+1)^2}\right]_{x=0} = \left[\tfrac{6x-3x^4}{(x^3+1)^2}\right]_{x=0} = 0 \\
f'''(0) &= \left[\tfrac{(6-12x^3)(x^3+1)^2-2\left(3x^2\right)(6x-3x^4)}{(x^3+1)^4}\right]_{x=0} = 6
\end{aligned}$$

El polinomio de Taylor de la función f en el punto $x = 0$ viene dado por

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x^3$$

y por tanto $p_3(1) = 1$.

8. **Solución. (a)**

El teorema del valor medio establece la existencia de un valor $c \in (0,1)$ para el que se verifica

$$f(1) - f(0) = f'(c) \tag{1}$$

En este caso

$$\begin{aligned}
f(1) &= \textstyle\int_0^1 (s^2-1)ds = -2/3 \\
f(0) &= \textstyle\int_0^0 (s^2-1)ds = 0 \\
f'(x) &= x^2 - 1
\end{aligned}$$

Por lo que sustituyendo directamente en (1) se tiene

$$\frac{-2}{3} = c^2 - 1 \Leftrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto $c = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0,1)$ es el valor buscado.

9. **Solución. (c)**

La función $f(x,y) = \dfrac{x+y^3}{x^2+2xy+y^2}$ es continua en el punto $(1,2)$, luego basta sustituir directamente en el punto para hallar el límite

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y^3}{x^2+2xy+y^2} = \frac{1+2^3}{1^2+2\times 1\times 2+2^2} = \frac{9}{9} = 1$$

10. **Solución. (a)**

Representando gráficamente el dominio, se puede comprobar

$$T = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1-x\}$$

Luego

$$\begin{aligned}
I &= \textstyle\int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx \\
&= \textstyle\int_0^1 x\frac{x^2-2x+1}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3-8+6}{12}\right) = \tfrac{1}{24}
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2013 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.7 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. La aplicación lineal f definida como $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, 0)$ verifica:
   (a) $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ y $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$
   (b) $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$
   (c) $\mathrm{Im}(f)$ está definido por $2x_1 - x_2 = 0$.
   (d) Ninguna de las anteriores

2. La forma cuadrática $w(x_1, x_2) = 2x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + 6x_2^2$ de $\mathbb{R}^2$ verifica:
   (a) Es siempre definida positiva
   (b) Es definida positiva si y sólo si $\lambda = 0$
   (c) Puede ser semidefinida positiva para algún valor de λ
   (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, -1)$ y F el subespacio generado por $(1, 1, -2)$, $(2, 1, -3)$ y $(0, 1, -1)$. Entonces se verifica:
   (a) $V \subseteq F$ y $F \nsubseteq V$
   (b) $V \subseteq F$ y $F \subseteq V$
   (c) $V \nsubseteq F$ y $F \subseteq V$
   (d) Ninguna de las anteriores

4. El valor de la integral
$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx$$
   es:
   (a) $I = -1$ (b) $I = 3$ (c) $I = 2$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $f(x,y) = xy^2e^{x^2+y^2}$, entonces el valor de la derivada $D_{12}f(1,1)$ es:

(a) $D_{12}f(1,1) = 10e^2$ (b) $D_{12}f(1,1) = 12e^2$

(c) $D_{12}f(1,1) = 11e^2$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(i) Las ecuaciones paramétricas de los subespacios de vectores propios de A (1pto.)

(ii) Decidir si A diagonaliza. En caso afirmativo, calcular una matriz de cambio de base P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. (1pto.)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \int_0^{x^2+y^4} (s+1)ds.$$

Se pide:

(i) Hallar el valor de $F(1,1)$. (1pto.)

(ii) Calcular la derivadas parciales $D_1F(1,1)$, $D_2F(1,1)$. (1pto.)

FMI. Febrero 2013 1ª Semana. SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (b)** El Núcleo es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y tiene como ecuaciones cartesianas: $2x_1 - x_2 = 0$. Por lo tanto es de dimensión 2. Como la suma de la dimensión de la imagen y la dimensión del núcleo es 3, la dimensión de la imagen es 1.

2. **Solución. (c)** La matriz asociada a la forma cuadrática en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda/2 \\ \lambda/2 & 6 \end{pmatrix}$. El determinante es $12 - \frac{a^2}{4}$ y se anula para $\lambda = \pm 4\sqrt{3}$. Teniendo es cuenta la clasificación de formas cuadráticas según el criterio de Silvester (página 129), Q es definida positiva si y sólo si
$$-4\sqrt{3} < \lambda < +4\sqrt{3}.$$
Luego A) y B) son falsas. Si $\lambda = \pm 4\sqrt{3}$ el determinante es nulo y la forma cuadrática sería semidefinida positiva. En efecto, supongamos que $\lambda = \pm 4\sqrt{3}$. Sea D la matriz reducida asociada a A, es decir, $D = P^t AP$ para cierta matriz regular P. Como $\det(A)\det(P)^2 = \det(D)$, entonces también $\det(D) = 0$. Por lo tanto $D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o bien $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ para saber si d es positivo o negativo basta con tomar valores en la expresión $w(x_1, x_2) = 2x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + 6x_2^2$ siendo $\lambda = \pm 4\sqrt{3}$. Como $w(1, 0) > 0$, no puede suceder que $d < 0$ ya que en ese caso sería semidefinida negativa.

3. **Solución. (b)** Es fácil comprobar que la dimensión de V es 2 y la dimensión de F es 2 (obsérvese que el determinante es 0). Debido a que $(0, 1, -1)$ pertenece a V y a F, basta comprobar que el primer vector de V, $(1, 0, -1)$, pertenece a F para concluir que $V \subset F$. En efecto,
$$(1, 0, -1) = -(1, 1, -2) + (2, 1, -3).$$
Por lo tanto $V \subseteq F$. Pero como ambos tienen la misma dimensión 2, se tiene que $F = V$. También se puede razonar por el rango de un sistema de vectores.

4. **Solución. (b)** Por definición
$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{si } \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\cos x & \text{si } \ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - [\operatorname{sen} x]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{3\pi}{2}} \\ &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + 1 - (-1) + 1 = 3\end{aligned}$$

5. **Solución. (b)** Derivando sucesivamente

$$\begin{aligned}&D_1 f(x,y) = D_1[xy^2 e^{x^2+y^2}] = y^2 e^{x^2+y^2} + xy^2 2x e^{x^2+y^2} \\ &= \left(y^2 + 2x^2y^2\right) e^{x^2+y^2}, \\ &D_{12} f(x,y) = D_2\left[\left(y^2 + 2x^2y^2\right) e^{x^2+y^2}\right] = \left(2y + 4x^2y\right) e^{x^2+y^2} \\ &+ \left(y^2 + 2x^2y^2\right) 2y e^{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Evaluando la derivada en el punto

$$D_{12} f(1,1) = 6e^2 + 6e^2 = 12e^2$$

- Problema **a)**. El polinomio característico es $(2-\lambda)^2(1-\lambda)$. Cuyas raíces son 2 (doble) y 1.
  Las ecuaciones cartesianas que definen el subespacio de vectores propios de valor propio 2 se obtienen de:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 & -1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  es decir, el plano $y - z = 0$. Luego una base es $\{(1,1,1),(0,1,1)\}$. Unas posibles ecuaciones paramétricas del subespacio de vectores propios de valor propio 2 son:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \alpha \\ y &=& \alpha+\beta \\ z &=& \alpha+\beta \end{array}\right.$$

  Las ecuaciones cartesianas que definen el subespacio de vectores propios de valor propio 1 se obtienen de:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, $y = 0$, $x = z$ (un subespacio de dimensión 1). Luego, unas ecuaciones paramétricas que definen el subespacio de vectores propios de valor propio 1 son:

$$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= 0 \\ z &= \alpha \end{cases}$$

Por ejemplo, el vector $(1, 0, 1)$ genera el subespacio de vectores propios asociados al valor propio 1.
Por tanto, la matriz A diagonaliza (ya que coinciden las multiplicidades geométricas de cada valor propio ocn las multiplicidades algebraicas).

Una matriz de paso P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal puede ser: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En efecto, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Problema **b)**.

  i) Sustituímos el valor y calculamos directamente la integral

$$F(1,1) = \int_0^{1^2+1^4} (s+1)ds = \int_0^2 (s+1)ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_{s=0}^{s=2} + [s]_{s=0}^{s=2} = 2+2 = 4.$$

  ii) Definamos $h(z) = z + 1$. Aplicando la regla de la cadena y el teorema fundamental de cálculo integral se tiene

$$\begin{aligned} D_1F(x,y) &= D_1(x^2+y^4) \times \left[\frac{\partial}{\partial z}\int_0^z (s+1)\right]_{z=x^2+y^4} = 2x\left(x^2+y^4+1\right) \\ D_2F(x,y) &= D_2(x^2+y^4) \times \left[\frac{\partial}{\partial z}\int_0^z (s+1)\right]_{z=x^2+y^4} = 4y^3\left(x^2+y^4+1\right) \end{aligned}$$

  Por tanto

$$\begin{aligned} D_1F(1,1) &= 2x\left(x^2+y^4+1\right) = 2\cdot 3 = 6 \\ D_2F(1,1) &= 4y^3\left(x^2+y^4+1\right) = 4\cdot 3 = 12 \end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Feb. 2013 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.7 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. En el conjunto $V = \{(x_1, x_2)\colon x_1 > 0,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ con la operación

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 + y_2)$$

verifica
(a) Es un grupo conmutativo
(b) No posee la propiedad elemento simétrico
(c) El elemento neutro es $(0, 0)$
(d) Ninguna de las anteriores

2. Si $a \in \mathbb{R}$, la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$ de expresión $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2ax_2x_3$ es definida positiva siempre que:
(a) $a \in [-2, 2]$ (b) $a = -2$ ó $a = 2$
(c) $a > 0$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Señale el máximo absoluto de f en el intervalo $[0, 2]$.
(a) 0 (b) -1 (c) $1/2$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor del siguiente límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

(a) $L = 1$ (b) $L = 0$ (c) $L = \infty$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea P_2 el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ en el punto $(x,y) = (0,\sqrt{\pi})$. Señale el valor $P_2(0,0)$.

(a) $P_2(0,0) = -1 + 2\pi$ (b) $P_2(0,0) = 0$
(c) $P_2(0,0) = -1 - 2\pi$ (d) Ninguna de las anteriores

$\boxed{\textbf{Parte Desarrollo}}$

Problema **a)**(2ptos.) Si f es la aplicación de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z) = (x - 3y, 0, x, z.)$$

Se pide:

(i) Comprobar que f es aplicación lineal (0.5ptos.)

(ii) Calcular una base del subespacio Imagen de f (0.5ptos.)

(iii) La dimensión del subespacio núcleo de f (0.5ptos.)

(iv) La matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\{(1,2,0,0),(1,0,1,-1),(0,1,0,1),(0,0,0,5)\}$ en $\mathbb{R}^4$. (0.5ptos.)

Problema **b)**(2ptos.) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(a) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x + ay)^2 dxdy.$$

Se pide:

(i) Hallar el valor de $F(1)$. (1pto.)

(ii) Expresar $F(a)$ en potencias de $a + 1$. (1pto.)

FMI. Febrero 2013 2ª Semana. SOLUCIONES Modelo B.

1. **Solución. (a)** El elemento neutro es el vector $(1,0)$ (nótese que $x_1 \neq 0$ por definición de V). El elemento simétrico del vector (x_1,x_2) es $(\frac{1}{x_1}, -x_2)$ que pertenece siempre a V. Verifica la propiedad conmutativa y asociativa.

2. **Solución. (d)** Utilizando el criterio de Sylvester resulta que $\triangle_1 = 4 > 0$, $\triangle_2 = 4 > 0$ y $\triangle_3 = 16 - 4a^2$. Por lo tanto la forma cuadrática es definida positiva si y sólo si $a \in (-2,2)$. Nótese que si $a \in [-2,2]$ puede ser $a = -2$ o $a = 2$ y en esos casos no es definida positiva. Por otro, no todos los valores positivos de a valen y por eso c) es falsa.

3. **Solución. (c)** La función derivada viene dada por

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - 2xx}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

La derivada es (estrictamente) positiva en el intervalo $[0,1)$ y estrictamente negativa en $(1,2]$. Por tanto f crece estrictamente en $[0,1)$, y decrece en $(1,2]$. Con lo que $x = 1$ es un punto máximo global y el máximo se alcanza en

$$\max_{x\in[0,2]} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$$

También consideramos como valida la respuesta (**d**), al que haya considerado que el máximo de la función se alcanza en $x = 1$.

4. **Solución. (b)** Multiplicando por el conjugado

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\end{aligned}$$

Tomando límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

5. **Solución. (d)** Por definición el polinomio de Taylor buscado viene dado

por

$$\begin{aligned}P_2(x,y) &= f(0,\sqrt{\pi}) + D_1f(0,\sqrt{\pi})x + D_2f(0,\sqrt{\pi})(y-\sqrt{\pi}) + \\ &\frac{1}{2!}(D_{11}f(0,\sqrt{\pi})x^2 + 2D_{12}f(0,\sqrt{\pi})x(y-\sqrt{\pi}) + \\ &D_{22}f(0,\sqrt{\pi})(y-\sqrt{\pi})^2)\end{aligned}$$

Calculamos las derivadas parciales en el punto $(x,y) = (0,\sqrt{\pi})$,

$$\begin{aligned}&f(0,\sqrt{\pi}) = \cos(0^2 + \sqrt{\pi}^2) = \cos(\pi) = -1\\ &D_1f(0,\sqrt{\pi}) = \left[-2x \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)\right]_{(x,y)=(0,\sqrt{\pi})} = 0\\ &D_2f(0,\sqrt{\pi}) = \left[-2y \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)\right]_{(x,y)=(0,\sqrt{\pi})} = 0\\ &D_{11}f(0,\sqrt{\pi}) = \left[-2 \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right) - 4x^2\cos\left(x^2+y^2\right)\right]_{(x,y)=(0,\sqrt{\pi})} = 0\\ &D_{12}f(0,\sqrt{\pi}) = \left[-4xy\cos\left(x^2+y^2\right)\right]_{(x,y)=(0,\sqrt{\pi})} = 0\\ &D_{22}f(0,\sqrt{\pi}) = \left[-2 \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right) - 4y^2\cos\left(x^2+y^2\right)\right]_{(x,y)=(0,\sqrt{\pi})} = 4\pi\end{aligned}$$

Y por tanto

$$P_2(x,y) = -1 + \frac{1}{2}4\pi(y-\sqrt{\pi})^2,$$

con lo que

$$P_2(0,0) = -1 + \frac{1}{2}4\pi\pi = -1 + 2\pi^2$$

- Problema **a)**. Sea f la aplicación de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ definida por $f(x,y,z) = (x-3y,0,x,z)$.

(i) f es aplicación lineal (0.5ptos.)
Se trata de probar que $f(\lambda(x,y,z)) = \lambda f(x,y,z)$ y $f(x,y,z)+f(x',y',z') = f((x,y,z)+(x',y',z'))$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ y (x,y,z), $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. En efecto, $f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = (\lambda x - 3\lambda y, 0, \lambda x, \lambda z) = \lambda(x-3y,0,x,z) = \lambda f(x,y,z)$ y
$f(x,y,z)+f(x',y',z') = (x-3y,0,x,z)+(x'-3y',0,x',z') = (x-3y+x'-3y',0,x+x',z+z') = f(x+x',y+y',z+z') = f((x,y,z)+(x',y',z'))$.

(ii) Base del subespacio Imagen de f (0.5ptos.)
Como $f(x,y,z) = (x-3y,0,x,z) = x(1,0,1,0)+y(-3,0,0,0)+z(0,0,0,1)$ y los valores de x, y, $z \in \mathbb{R}$ son cualquiera

$$\operatorname{Ima}(f) = G[(1,0,1,0),(-3,0,0,0),(0,0,0,1)].$$

Como {(1,0,1,0),(-3,0,0,0),(0,0,0,1)} es linealmente independiente, entonces es base de Ima(f).

(iii) Dimensión del subespacio núcleo de f (0.5ptos.)
Como Ima(f)+Nuc(f) = Dim ($\mathbb{R}^3$) se deduce que Nuc(f) = 0. En efecto, como Nuc(f) $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon f(x,y,z) = (0,0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon (x-3y,0,x,z) = (0,0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x-3y = 0,\ x = 0,\ z = 0\} = \{(0,0,0,0)\}$.

(iv) Matriz asociada a f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\{(1,2,0,0),(1,0,1,-1),(0,1,0,1),(0,0,0,5)\}$ en $\mathbb{R}^4$. (0.5ptos.)
Como
$f(1,0,0) = (1-0,0,1,0) = (1,0,1,0) = 0(1,2,0,0) + 1(1,0,1,-1) + 0(0,1,0,1) + \frac{1}{5}(0,0,0,5)$
$f(0,1,0) = (0-3,0,0,0) = (-3,0,0,0) = -3(1,2,0,0) + 0(1,0,1,-1) + 6(0,1,0,1) + \frac{-6}{5}(0,0,0,5)$
$f(0,0,1) = (0-0,0,0,1) = (0,0,0,1) = 0(1,2,0,0) + 0(1,0,1,-1) + 0(0,1,0,1) + \frac{1}{5}(0,0,0,5)$
La matriz pedida es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-6}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

- Problema **b)**. Integrando directamente, hallamos la expresión explícita de la función

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x+ay)^2dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2+2axy+a^2y^2)dxdy = \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^2dxdy + 2a\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xydxdy + a^2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}y^2dxdy \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1}[y]_{y=-1}^{y=1} + 2a\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1} + a^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1}[x]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{4}{3} + a^2\frac{4}{3} \end{aligned}$$

(i) Evaluamos directamente la función $F(1) = \frac{8}{3}$

(ii) Por ser un polinomio de grado 2, basta hallar el desarrollo de Taylor de F en el punto $a = -1$

Como

$$\begin{aligned} F(-1) &= \tfrac{8}{3} \\ F'(-1) &= -\tfrac{8}{3} \\ F''(-1) &= \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

Por tanto

$$F(a) = F(-1)+F'(-1)(a+1)+\frac{F''(-1)}{2}(a+1)^2 = \frac{8}{3}-\frac{8}{3}(a+1)+\frac{4}{3}(a+1)^2$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2013
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.7 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal tal que $f(1,0) = (2,1,-1)$, $f(1,-3) = (1,-1,0)$. Señale la imagen del vector $\mathbf{v} = (1,1)$.
   (a) $f(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
   (b) $f(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
   (c) $f(\mathbf{v}) = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$
   (d) Ninguna de las anteriores

2. Señale el valor del límite $L = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}$.
   (a) $L = 1$ (b) $L = 0$
   (c) No existe dicho límite (d) Ninguna de las anteriores

3. Sean las bases de $\mathbb{R}^3$
$$\mathbf{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \ y \ \mathbf{B} = \{(-1,0,1),(1,0,0),(0,-1,0)\}$$
   Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(1,-1,1)$ en la base $\mathbf{A}$, encontrar sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.
   (a) $(1,-1,2)$ (b) $(1,2,1)$
   (c) $(-1,-1,2)$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Calcule el valor de la integral
$$I = \int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}dx$$
   aplicando un cambio de variable adecuado.
   (a) $I = -\dfrac{1}{3}$ (b) $I = \dfrac{1}{3}$ (c) $I = \dfrac{-2}{3}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea la función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (\sqrt{xyz}, xyz, x+y+z)$. Señálese el valor de su determinante jacobiano en el punto $(1,1,1)$.
   (a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea $\mathbb{R}^3$ con la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathbb{R}^2$ con la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

i) Determínese la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{u}_2) &= -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

(0.5 pts)

ii) Determínense las ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo Ker f, su dimensión y una base. (1 pto)

iii) Determínese la dimensión y una base de Im f (0.5 ptos).

Problema **b)**(2ptos.)

Se pide:

(i) Sean $f(u,v) = (\sqrt{|v|}, v-u)$, $g(x,y) = (x^2, x^2+y)$. Determínese la diferencial de $F = f \circ g$ en el punto $(1,0)$. (1pto.)

(ii) Calcule la integral $\int_S (x+y^2)\, dxdy$ en donde

$$S = \{(x,y) : y \geq x^2,\ y-2+x \leq 0,\ y-2-x \leq 0\}$$

(1pto.)

FMI. Septiembre 2013 . SOLUCIONES Modelo A.

Solución 1: Se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{4}{3}f\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}f\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solución correcta es la c).

Solución 2: El límite se calcula aplicando de manera consecutiva la regla de L'Hopital dos veces

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln(e^x-1)]'}{[\ln x]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{1}{x}} = \frac{xe^x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(xe^x)'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+xe^x}{e^x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+0}{1} = 1. \end{aligned}$$

La solución correcta es la a).

Solución 3: La matriz de cambio de base de **A** a **B** es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las coordenadas de **v** respecto de la base son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución correcta es la b).

Solución 4: Consideramos el cambio de variable $x = g(t) = -\sqrt{1-t}$, que tengamos en cuenta implica la relación $t = 1 - x^2$. Tenemos

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1-t}},\ 0 = g(1),\ \ -1 = g(0).$$

Aplicando directamente el teorema de cambio de variable se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}dx &= \int_{0}^{1}\left(-\sqrt{1-t}\right)\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}dt \\
&= -\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{t}}{2}dt \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

La solución correcta es la a).

Solución 5: La matriz jacobiana de derivadas parciales viene dada por

$$Df(1,1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}} & \frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}} & \frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}} \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y su determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La solución correcta es la a).

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

i) La matriz de la aplicación tiene como columnas las coordenadas de la imagenes de la base del espacio dominio $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\}$ con respecto de la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ del espacio imagen. Por tanto, viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ii) Para hallar las ecuaciones del núcleo se tiene que resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de la submatriz asociado a los dos últimas coordenadas es no nulo,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

el rango de la matriz del sistema, y por tanto de su ampliada, es 2. Luego es un sistema compatible determinado con un parámetro. De hecho podemos considerar la primera coordenada como parámetro y resolver el sistema

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1
\end{aligned}$$

Luego

$$Ker\text{f} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 = x_1,\ x_3 = 0\}$$

Las ecuaciones implícitas son directamente las anteriores. Denotando $x_1 = \lambda$, las ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$x_1 = \lambda,\ x_2 = \lambda,\ x_3 = 0$$

Asimismo de esta expresión es claro que Ker f es de dimensión 1, con una base dada por el vector de coordenadas $(1, 1, 0)$ que se corresponde con el vector $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Luego la base viene dada por el conjunto

$$A = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\}$$

(iii) Por el teorema de la dimensión.

$$\dim \text{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Kerf} = 3 - 1 = 2.$$

Basta por tanto con tomar dos imágenes linealmente independientes como base. En este caso

$$\{f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\} = \{-\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2\}$$

constituye directamente un sistema generador linealmente independiente y por tanto base.

Problema **b)**(2ptos.)

(i). Aplicación directa de la regla de la cadena

$$\begin{aligned} D(f\circ g)(1,0) &= Df(g(1,0))Dg(1,0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{v}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{(u,v)=g(1,0)=(1,1)} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) El recinto tiene la expresión

$$S = \{(x,y) : y \leq 2-x,\, y \leq 2+x,\, x^2 \leq y\},$$

y por tanto está delimitado por la rectas $y = x-2$, $y = x+2$ y la parabola $y = x^2$. Gráficamente se observa que podemos considerar el recinto S como unión de los subrecintos (represéntese S)

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y) : -1 \leq x \leq 0, x^2 \leq y \leq 2+x\}, \\ S_2 &= \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2-x\}. \end{aligned}$$

Luego la integral se puede calcular como la suma de dos integrales

$$\int_S \left(x+y^2\right) dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{2+x} (x+y^2)dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} (x+y^2)dy.$$

Calculemos cada integral por separado. En primer lugar

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{2+x} (x+y^2)dy &= \int_{-1}^{0} x\,[y]_{y=x^2}^{y=2+x}\, dx + \int_{-1}^{0} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2+x} dx \\ &= \int_{-1}^{0} x\left(2+x-x^2\right) dx + \int_{-1}^{0} \left(\frac{(2+x)^3}{3} - \frac{x^6}{3}\right) dx \\ &= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=0} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=0} \\ &\quad + \left[\frac{(2+x)^4}{12}\right]_{x=-1}^{x=0} - \left[\frac{x^7}{21}\right]_{x=-1}^{x=0} \\ &= -1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{16}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{21} = \frac{11}{14}, \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} (x+y^2)dy &= \int_{-1}^0 x\,[y]_{y=x^2}^{y=2-x}\,dx + \int_{-1}^0 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2-x} dx \\
&= \int_0^1 x\left(2-x-x^2\right)dx + \int_0^1 \left(\frac{(2-x)^3}{3} - \frac{x^6}{3}\right)dx \\
&= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&\quad + \left[-\frac{(2-x)^4}{12}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^7}{21}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{16}{12} - \frac{1}{21} = \frac{34}{21}
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_S \left(x+y^2\right)dxdy = \frac{11}{14} + \frac{34}{21} = \frac{101}{42}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2014 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{M}_2$ el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2. Consideramos $*$ la operación definida por

$$A * B = B^T \times A^T \text{ para todo } A, B \in \mathbb{M}_2,$$

en donde $\times$ denota el producto usual de matrices. De las siguientes elecciones de subconjuntos señale el número de ellos para los que $*$ continúa siendo una operación. Es decir, dadas las afirmaciones:

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices diagonales

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices triangulares inferiores

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Señale el número de ellas qué son verdaderas.
(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) Ninguna de las anteriores

2. Sean las bases

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \{(1,0),(-1,1)\}\\ \mathbf{B} &= \{(-1,1),(0,1)\}\end{aligned}$$

de $\mathbb{R}^2$. Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(2,1)$ en la base $\mathbf{A}$, señale sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.
(a) $(-1,2)$ (b) $(1,-1)$ (c) $(1,1)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x_1,x_2) = (x_1, x_2, x_1 - x_2, 0).$$

Señale las ecuaciones implícitas del subespacio imagen $\mathrm{Im} f$.
(a) $y_1 + y_2 + y_3 = 0,\ y_4 = 0$ (b) $y_1 - y_2 - y_3 = 0,\ y_4 = 0$
(c) $y_1 + y_2 - y_3 = 0,\ y_4 = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea p_2 el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x) = \cos(xe^x)$ en el punto $x = 0$. Señale la respuesta correcta.
(a) $p_2(1) = 0$ (b) $p_2(1) = -1$ (c) $p_2(1) = 1$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Señale el valor de la integral

$$I = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx.$$

(a) $I = -1$ (b) $I = 2$ (c) $I = 1/2$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea la aplicación $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\\ f(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\\ f(\mathbf{u}_3) &= 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

en donde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

(a) Señale la matriz de la aplicación. (0.5 ptos)

(b) Determínense las ecuaciones implícitas del $\ker f$, su dimensión y una base. (0.75 ptos)

(c) Determínense las ecuaciones implícitas de $Im\, f$, su dimensión y una base. (0.75 ptos)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(t) = f(r(t)),$$

en donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función definida por

$$f(x, y) = xy^2 + x^2y$$

y $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una función que toma valores

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(i) Calcule la integral $\int_M f(x, y)dxdy$ en donde

$$M = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

(1 pto)

(ii) Calcule la derivada $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$. (1 pto)

FMI. Febrero 2013 1ª Semana. SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (b)** Se trata de ver para cada subconjunto si para cualesquiera A, $B \in M_i$ entonces

$$A * B \in M_i \text{ para todo } i = 1, ..., 4.$$

- $*$ es una operación sobre M_1 ya que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix} \in M_1\end{aligned}$$

- $*$ es un operación sobre sobre M_2 ya que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_1b_2 & 0 \\ 0 & a_1b_2 \end{pmatrix} \in M_2\end{aligned}$$

- $*$ no una operación sobre M_3 ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3$$

  y se tiene

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin M_3\end{aligned}$$

- $*$ no es una operación sobre M_4 ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4$$

  y se tiene

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin M_4\end{aligned}$$

2. **Solución. (a)** Lo haremos cambiando primeramente de **A** a la base canónica y posteriormente a la base **B**. Con respecto de la base canónica el vector tiene por coordenadas

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de base de la canónica a la base **B** es directamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego el vector toma las coordenadas

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. **Solución. (b)** Como

$$\dim \mathbb{R}^4 - \dim Imf = 4 - 2 = 2$$

hay dos ecuaciones implícitas.Un vector genérico (y_1, y_2, y_3, y_4) de Imf verifica

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_1 - x_2 \\ y_4 &= 0 \end{aligned}$$

que nos da directamente las ecuaciones paramétricas de Imf. Una ecuación implícita es directamente $y_4 = 0$. Para hallar la segunda ecuación basta eliminar los parámetros sumando la primera con la tercera ecuación y restársela a la segunda

$$y_1 - y_2 - y_3 = x_1 - x_2 - (x_1 - x_2) = 0$$

4. **Solución. (d)** Las derivadas en el punto $x = 0$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} &f(0) = \cos(xe^x)]_{x=0} = \cos 0 = 1 \\ &f'(0) = -\left(xe^x\right)' \operatorname{sen}(xe^x)\big]_{x=0} = -e^x(1+x)\operatorname{sen}(xe^x)]_{x=0} = -sen0 = 0 \\ &f''(0) = -e^x(2+x)\operatorname{sen}(xe^x) - e^{2x}(1+x)^2\cos(xe^x)\big]_{x=0} = -1 \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor viene dado por

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Luego

$$p_2(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5. **Solución. (b)** Como

$$\left((\ln x)^2\right)' = 2\,(\ln x)' \ln x = \frac{2}{x}\ln x \Rightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\left((\ln x)^2\right)'}{2}$$

entonces

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \left((\ln x)^2\right)' dx = \frac{1}{2}\left(\left(\ln e^2\right)^2 - \left(\ln 1^2\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(4-0) = 2. \end{aligned}$$

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) (a) La matriz A de la aplicación tiene como columnas las coordenadas de la imágenes de la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con respecto de la misma base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Directamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $\text{Ker } f = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : AX = 0 \right\}$.El sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es compatible indeterminado con un parámetro. De hecho considerando $x_3 = \lambda$ como parámetro, la solucion del sistema viene dada por

$$\text{Ker } f = \{(-\lambda, -\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

De aquí directamente obtenemos que Ker f tiene dimensión 1 y $\{(-1,-1,1)\}$ es una base. Como

$$\dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}\ f = 3 - 1 = 2,$$

necesariamente tiene que haber dos ecuaciones implícitas. De

$$\begin{aligned} x_1 &= -\lambda \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

sumando las dos primeras ecuaciones y restando la tercera multiplicada por el factor 2 eliminamos el parámetro y obtenemos la primera ecuación implícita

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -\lambda - \lambda + 2\lambda = 0$$

Del mismo modo restando las dos primeras ecuaciones obtenemos una segunda ecuación implícita linealmente independiente a la anterior

$$x_1 - x_2 = -\lambda - (-\lambda) = 0$$

Luego las ecuaciones implícitas vienen dadas por

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ &x_1 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

(c) Por el teorema de la dimensión, $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Ker\, f = 3 - 1 = 2$. Las ecuaciones parámetricas viene dadas directamente por

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= x_1 - x_2 \\ y_3 &= -x_1 - x_3 \end{aligned}$$

Sumando la dos primeras ecuaciones y la tercera multiplicada por el factor 2 eliminamos parámetros y obtenemos la única ecuación implícita

$$y_1 + y_2 + 2y_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_1 - x_2 + 2(-x_1 - x_3) = 0$$

Una base viene dada por dos vectores linealmente independiente que verifiquen la ecuación, por ejemplo

$$\{(1,1,-1),(2,0,-1)\}$$

Problema **b)**(2ptos.) (i) El recinto integración viene dado por

$$M = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\} = [-1,1] \times [-1,1]$$

Integrando directamente

$$\begin{aligned}
\int_M f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(xy^2 + x^2y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy^2dxdy + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2ydxdy \\
&= \left(\int_{-1}^{1} xdx\right)\left(\int_{-1}^{1} y^2dy\right) + \left(\int_{-1}^{1} ydy\right)\left(\int_{-1}^{1} x^2dx\right) \\
&= \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

(ii) Aplicando la regla de la cadena

$$F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = Df(r(\frac{\pi}{4}))r'(\frac{\pi}{4}) =$$

Como

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 2xy & 2xy + x^2 \end{pmatrix}$$

se tiene directamente

$$\begin{aligned}
F'(\frac{\pi}{4}) &= Df\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r'\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} & 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2014 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix},$$

señale su posible matriz inversa

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Dados los conjuntos de matrices

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathbf{A}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathbf{A}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Señale el número de ellos que son base del espacio vectorial $\mathbb{M}_2$ de matrices cuadradas de orden 2.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea la función $f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-3}$, señale el valor de la integral

$$I = \int_0^1 f(x)dx.$$

(a) $I = 1$ (b) $I = 1/2$ (c) $I = 3$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^x - e^y}{e^{x-y} - 1}$$

(a) 1 (b) 0 (c) e (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)/x & si \;\; x \neq 0, \\ 1 & si \;\; x = 0. \end{cases}$$

Señale el valor de su derivada en el punto $x = 0$.

(a) $f'(0) = 1/3$ (b) No existe $f'(0)$

(c) $f'(0) = 1/2$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea $f(x_1, x_2) = (-7x_1 + 6x_2, -9x_1 + 8x_2)$ una aplicación lineal referida a la base canónica. Se pregunta:

(i) Halle la matriz asociada de f con respecto a la base $\mathbf{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$. (1 pto)

(ii) Estudiar si es diagonalizable, y en caso afirmativo encontrar la matriz diagonal D y la base a la que está referida. (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea la función

$$f(x, y) = (x + y)^2$$

(i) Señale sus máximos y mínimos absolutos en el conjunto

$$A = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

(1 pto)

(ii) Calcule la integral $\int_M f(x,y)dxdy$ en donde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

(1 pto)

FMI. Febrero 2014 2ª Semana. SOLUCIONES Modelo B.

1. **Solución. (c)** Basta hacer directamente la operación de la matriz por la tres posibles candidatas para ver que efectivamente la matriz

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \sin x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es la inversa buscada. Operando directamente se tiene

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Solución. (a)** Basta comprobar que las matrices que tienen por columnas las coordenadas de los vectores de lo conjuntos con respecto a la base canónica

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

tiene rango 4, equivalentemente que dicha matriz tiene determinante no nulo.

- Para el caso de $\mathbf{A}_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

  por tanto los vectores son linealmente dependientes y no constituyen una base.

- Para el caso de $\mathbf{A}_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

y por tanto constituye una base.

- De igual forma para el caso de $\mathbf{A}_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

  los vectores son linealmente dependientes, y por tanto no es una base.

3. **Solución. (c)** Integramos directamente

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^3} = \left[\frac{-2\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{-3+1}}{-3+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 = 4 - 1 = 3$$

4. **Solución. (c)** Basta simplificar

$$\frac{e^x - e^y}{e^{x-y}-1} = e^y \frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}-1} = e^y$$

y tomar límite directamente

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^x - e^y}{e^{x-y}-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} e^y = e.$$

5. **Solución. (c)** Como

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{e^h-1}{h} - 1}{h} = \frac{e^h-1-h}{h^2} = \frac{e^h-1-h}{h^2}$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1-h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h-1-h\right)'}{(h^2)'} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h-1\right)'}{(2h)'} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

en donde hemos aplicado dos veces consecutivamente la regla de L'Hôpital.

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) (i) Matricialmente la aplicación lineal se puede expresar como

$$Y = PX = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} X$$

en donde $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vectores columna de coordenadas respecto de la base canónica. Denotado por Y', X' la coordenadas respecto de la nueva base $\mathbf{B} = \{(1,-1),(1,1)\}$ la matriz de cambio de la base $\mathbf{B}$ a la base canónica viene dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$Y = BY' \Rightarrow Y' = B^{-1}Y = B^{-1}PX = B^{-1}PBX'$$

y la matriz asociado respecto de la base B viene dada por

$$\begin{aligned} B^{-1}PB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -15 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -7-\lambda & 6 \\ -9 & 8-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - \lambda - 2$$

y los valores propios las raíces de la ecuació $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Por ser diferentes ya sabemos que la matriz es diagonalizable por el teorema de caracterización. Los subespacios propios vienen dados por

- Subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$.

$$\mathbb{E}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x_1, x_2) : -3x_1 + 2x_2 = 0\}$$

Es claramente de dimensión uno, siendo el vector $\{(2,3)\}$ una posible base.

- Subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$.

$$\mathbb{E}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}$$

En este caso también de dimensión 1, siendo el vector $\{(1,1)\}$ otra posible base.

La matriz de paso sería

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal correspondiente

$$D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema **b)**(2ptos.) (i) Se trata de minimizar la función $f(x,y) = (x+y)^2$ en un cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$. Por la forma de la función una manera ad-hoc de hacerlo es ver que en las rectas $\bar{x} + \bar{y} = k$ (k constante) la función toma valor constante

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x} + \bar{y})^2 = k^2$$

Formalmente si consideramos los conjuntos $E_k = \{(x,y) : x+y = k\} \cap A$, se tiene que $A = \bigcup_{k \in [-1,1]} E_k$. Como $f(E_k) = k^2$ los mínimos y máximos globales coinciden con los conjuntos

$$\begin{aligned} &\text{Mínimos globales} \equiv E_0 = \{(x,y) : x+y = 0,\ x \in [-1,1]\} \\ &\text{Máximos globales} \equiv E_1 \cup E_{-1} = \{(-1,-1), (1,1)\} \end{aligned}$$

respectivamente.

(ii) Calculamos la integral directamente

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}(x+y)^2 dydx = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}(x^2+y^2+2xy)dydx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx + \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x^2} dx \\
&\quad + \left(\int_{-1}^{1} 2x(1-x^2)dx\right)\int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx + \int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^3}{3}dx \\
&\quad + \left(\int_{-1}^{1} 2x(1-x^2)dx\right)\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^2}{2}dx \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}
$$

Cada integral viene dada por

- $$I_1 = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

- $$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^3}{3}dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1-3x^2+3x^4-x^6)dx \\
&= \frac{1}{3}\left(2 - 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} + 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} - \left[\frac{x^7}{7}\right]_{x=-1}^{x=1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2 - 3\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{32}{105}
\end{aligned}
$$

- $I_3 = 0$, ya que $\int_{-1}^{1} 2x(1-x^2)dx = \left[x^2\right]_{x=-1}^{x=1} - \left[\frac{x^4}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} = 0$

Luego finalmente

$$I = \frac{4}{15} + \frac{32}{105} = \frac{4}{7}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2014
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Considere la operación $*$ sobre el conjunto de los números reales $M = \mathbb{R}$ definida por
$$a * b = 10^{a+b} \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$
Dadas las siguientes afirmaciones con respecto a la operación $*$
   - $*$ es conmutativa.
   - El elemento inverso de $a = 2$ viene dado por $a' = 1/2$.
   - El elemento neutro viene dado por $e = 1$.

   Señale el número de ellas que son ciertas.
   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

2. Consideramos el espacio vectorial de polinomios de grado 2,
$$\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$$
y la base de dicho espacio
$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = 1, \mathbf{p}_2(x) = x^2 - 1,\ \mathbf{p}_3(x) = x - 1\}$$
Dado el polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = x^2 + x + 1$ señale su vector de coordenadas con respecto a la base $\mathbf{A}$.
(a) $(1, 2, 1)$ (b) $(3, 1, 1)$ (c) $(1, 3, 1)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

señale su derivada en el punto $x = 0$.

(a) No existe $f'(0)$ (b) $f'(0) = 1$

(c) $f'(0) = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \int_0^{2-\ln x} ue^u du$$

Calcule el valor de la derivada $f'(1)$.

(a) $f'(1) = -4e^2$ (b) $f'(1) = -2e^2$

(c) $f'(1) = 2e$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sean $f(u, v) = (1 + e^x, e^{xy})$, $g(x, y) = (xy, x - y)$. Determínese la diferencial de la función compuesta $H = f \circ g$ en el punto $(1, 0)$.

(a) $H'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e & -e \end{pmatrix}$ (b) $H'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $H'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e & e \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)** (2ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)$$

en la base canónica.

(i) Determinar los valores propios y las ecuaciones de los subespacios propios asociados a ellos. (1 pto)

(ii) Estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal D y la base a la que está referida. (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

calcule sus derivada parciales $D_1f(0,0)$, $D_2f(0,0)$. (1 pto)

(ii) Calcule la integral

$$I = \int_S (x-y)^2 dxdy$$

en donde

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \geq x^2 + y^2 \geq 1,\, x \geq 0\}.$$

(1 pto)

FMI. Septiembre 2014 SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (a)** Claramente la operación es conmutativa como consecuencia de la conmutatividad de la suma de números reales. En cambio el elemento neutro de $*$ no existe. Por ejemplo si consideramos el punto $\bar{a}=0$ si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{R}$, éste debería verificar

$$e * 0 = 0,$$

lo que es equivalente a que

$$10^e = 0.$$

Como no existe ningún e verificando la identidad anterior, entonces no puede existir elemento neutro y consecuentemente tampoco el inverso.

2. **Solución. (b)** Directamente, podemos desarrollar en función de los elementos de la base para ver si el polinomio asociado nos da el polinomio pedido. Como

$$\begin{aligned} 1\cdot 1 + 2\cdot(x^2-1) + 1\cdot(x-1) &= 2x^2+x-2,\\ 3\cdot 1 + 1\cdot(x^2-1) + 1\cdot(x-1) &= x^2+x+1,\\ 1\cdot 1 + 3\cdot(x^2-1) + 1\cdot(x-1) &= 3x^2+x-3. \end{aligned}$$

Por tanto el vector de coordendas $(3,1,1)$ se corresponde con el polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = x^2+x+1$ y la respuesta correcta es la (b).

3. **Solución. (c)** Aplicamos directamente la definición de derivada

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}(\frac{1}{h}) = 0.$$

4. **Solución. (b)** Podemos expresar la función f como composición de dos funciones

$$f = g\circ h,$$

en donde $g(x) = \int_0^x ue^u du$, $h(x) = 2-\ln x$. Por la regla de la cadena

$$f'(1) = (g\circ h)'(1) = g'(h(1))h'(1)$$

Por un lado

$$\begin{aligned} h'(1) &= -\tfrac{1}{x}\Big|_{x=1} = -1,\\ h(1) &= 2-\ln 1 = 2. \end{aligned}$$

Por otro lado aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral

$$g'(h(1)) = g'(2) = ue^u\big|_{x=2} = 2e^2.$$

Finalmente

$$f'(1) = g'(h(1))h'(1) = 2e^2 \cdot (-1) = -2e^2.$$

5. **Solución. (d)** La diferencial se calcula aplicando la regla de la cadena

$$DH(1,0) = Df(g(1,0)) \times Dg(1,0).$$

Operando

$$Dg(1,0) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Df(g(1,0)) = Df(0,1) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$DH(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) La matriz viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico asociado

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

cuya raíces son $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 2$

El subespacio vectorial

$$\mathbb{E}_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - I)X = 0\}$$

asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ viene determinado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} (A - I)\, X &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x_3 = x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Como

$$\mathbb{E}_1 = \{(x_1, x_2, -x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, 1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= G[(1, 0, -1), (0, 1, 1)]$$

$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)\}$ es un sistema linealmente independiente y generador, luego constituye una base de autovectores de $\mathbb{E}_1$.

Por otra parte el subespacio vectorial

$$\mathbb{E}_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I)\, X = 0\}$$

asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$ viene dado por

$$\begin{aligned} (A - 2I)\, X &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x_2 - 2x_1 - x_3 = 0, \ \ - x_1 - x_3 = 0,\, x_1 - x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x_2 = x_1,\, x_3 = -x_1 \end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{E}_2 = \{(x_1, x_1, -x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, 1, -1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = G[(1, 1, -1)]$$

y directamente $\{\mathbf{v}_3 = (1, -1, 1)\}$ es la otra base buscada.

Como la dimensión de los subespacios coincide con la multiplicidad de los autovalores en cada caso por el Teorema de caracterización podemos concluir que la matriz es diagonalizable con una posible base de autovectores dada por

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1),\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1),\, \mathbf{v}_3 = (1, 1, -1)\}$$

cuya matriz diagonal asociada es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De hecho compruébese que la matriz de paso viene dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y que

$$D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Para calcular las derivadas parciales aplicamos directamente la definición

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2 0 + t^3}{t^2 + 0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^3} = 1. \\ D_2 f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0^2 t + 0^3}{0^2 + t^2} - 0}{t} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Desarrollamos el integrando

$$\int_S (x-y)^2 dxdy = \int_S (x^2 + y^2 - 2xy) dxdy$$

Mediante un cambio a polares $x = r\cos\theta$, $y = r sen\theta$, $dxdy = r dr d\theta$

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \geq x^2 + y^2 \geq 1,\ x \geq 0\} \\ &= \left\{(r,\theta) : 1 \leq r \leq \sqrt{2},\ -\tfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\right\}, \end{aligned}$$

calculamos la integral sustituyendo directamente

$$\begin{aligned}
\int_S (x^2+y^2-2xy)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}} (r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta - 2r\cos\theta r sen\theta) r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}} (r^2 - r sen2\theta) r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}} (r^2 - r sen2\theta) r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}} r^3 dr d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen2\theta d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^2 dr d\theta \\
&= \pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=\sqrt{2}} - \left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{r=\sqrt{2}} \\
&= \pi\frac{4-1}{4} + 0 = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2015 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\Diamond$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n \Diamond m = |n - m| \end{array}$$

en donde recordemos que $|\cdot|$ denota el valor absoluto. De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.

- $\Diamond$ es asociativa
- $\Diamond$ es conmutativa
- No existe elemento neutro

(a) 1 $\quad$ (b) 2 $\quad$ (c) 3 $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Señale las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial $\mathbb{A}$ generado por los vectores $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$.
(a) $\mathbb{A} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 - x_1 = 0\}$
(b) $\mathbb{A} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_3 = 0\}$
(c) $\mathbb{A} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 - x_1 = 0\}$
(d) Ninguna de las anteriores

3. Señale el valor de la integral $I = \int_0^1 \dfrac{xdx}{(1 + x^2)^4}$.

(a) $\dfrac{7}{48}$ $\quad$ (b) $\dfrac{3}{16}$ $\quad$ (c) $\dfrac{5}{42}$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor de la integral $I = \int_M (x^2 + y^2)dxdy$ en donde

$$M = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

(a) $I = \dfrac{1}{3}$ (b) $I = \dfrac{8}{3}$ (c) $I = \dfrac{2}{3}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sean las funciones $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$, $g(u, v) = (u^3, u + v)$. Determínese la diferencial de la función compuesta $H = g \circ f$ en el punto $(0, 1)$.

(a) $DH(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $DH(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $DH(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

$\boxed{\textbf{Parte Desarrollo}}$

Problema **a)**(2ptos.)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal D y la base a la que está referida. (1 pto)

(ii) Calcule razonadamente la matriz potencia A^{11}. (Notación: $A^n = A \times A^{n-1}$ para todo $n = 2, 3, ...$) (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Exprese el polinomio $p(x) = x^4 - 1$ en potencias de $x + 1$. (1 pto)

(ii) Calcule el valor de la integral

$$I = \int_M \sqrt{x + y}dxdy$$

en donde $M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq y \leq 1\}$. (1 pto)

FMI. Enero 2015 1ª Semana. SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (a)**

- $\Diamond$ no es asociativa . Basta tomar $n = 1$, $m = 2$, $q = 3$, en dicho caso se tiene
$$(n\Diamond m)\Diamond q = (1\Diamond 2)\Diamond 3 = 1\Diamond 3 = 2$$
$$\neq$$
$$n\Diamond(m\Diamond q) = 1\Diamond(2\Diamond 3) = 1\Diamond 1 = 0.$$
- $\Diamond$ es conmutativa. Aplicando propiedades del valor absoluto, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene
$$n\Diamond m = |n-m| = |-(n-m)| = |m-n| = m\Diamond n.$$
- $e = 0$ es el elemento neutro, ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene
$$\begin{aligned} n\Diamond 0 &= |n-0| = n, \\ 0\Diamond n &= |0-n| = n. \end{aligned}$$

2. **Solución. (a)**

El subespacio viene dado por

$$\begin{aligned} &A = G[(1,-1,1),(1,0,1)] = \{(x_1,x_2,x_3) = \lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(1,0,1)\} \\ &= \lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(1,0,1)\} \\ &= (\lambda_1+\lambda_2, -\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2) \end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas vienen dadas por tanto por

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ x_2 &= -\lambda_1, \\ x_3 &= \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Eliminamos los parámetros sustituyendo la segunda ecuación en la primera y tercera $x_1 = -x_2 + \lambda_2$, $x_3 = -x_2 + \lambda_2$ e igualando ambas expresiones

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0.$$

3. **Solución. (a)**

Teniendo en cuenta que

$$\left[(1+x^2)^{-3}\right]' = -6x(1+x^2)^{-3} \Rightarrow x(1+x^2)^{-4} = -\frac{\left[(1+x^2)^{-3}\right]'}{6},$$

calculamos la integral directamente aplicando la regla de Barrow

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(1+x^2)^{-4}dx &= \frac{-1}{6}\int_0^1 \left[(1+x^2)^{-3}\right]' dx = \frac{-1}{6}\left[(1+x^2)^{-3}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{-1}{6}\left((1+1)^{-3}-(1+0)^{-3}\right) \\
&= \frac{-1}{6}\left(\frac{1}{8}-1\right) = \frac{7}{48}
\end{aligned}$$

4. **Solución. (d)**

Calculamos la integral directamente

$$\begin{aligned}
\int_M (x^2+y^2)dxdy &= \int_{-1}^1\int_{-1}^0 x^2dxdy + \int_{-1}^1\int_{-1}^0 y^2dxdy \\
&= \left(\int_{-1}^0 x^2dx\right)\left(\int_{-1}^1 dy\right) + \left(\int_{-1}^1 y^2dy\right)\left(\int_{-1}^0 dx\right) \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=0}(1-(-1)) + \left[\frac{y^3}{y}\right]_{y=-1}^{y=1}(0-(-1)) \\
&= 2\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3} = 2
\end{aligned}$$

5. **Solución. (b)**

Aplicamos la regla de la cadena. Como $f(0,1)=(1,0)$ entonces

$$DH(0,1) = Dg(f(0,1)) \times Df(0,1).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
&DH(0,1) = Dg(1,0)\times Df(0,1) \\
&= \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{(u,v)=(1,0)} \times \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,1)} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y resulta

$$DH(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

que tiene por raíces (autovalores) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Calculamos los subespacios de autovectores asociados:

- Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \\
&\mathbb{E}_1 = \{(x_1, x_2) : -x - y = 0\} \Leftrightarrow \\
&\mathbb{E}_1 = G\left[(1, -1)\right].
\end{aligned}$$

- Para $\lambda_2 = -1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \\
&\mathbb{E}_2 = \{(x_1, x_2) : x - y = 0\} \Leftrightarrow \\
&\mathbb{E}_2 = G\left[(1, 1)\right].
\end{aligned}$$

La base de autovalores es por tanto $\mathbf{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$, con matriz diagonal y de paso

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De hecho compruébese

$$\begin{aligned}
D &= QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ii) Como $A = Q^{-1}DQ$ las potencias sucesivas se calculan iterativamente de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&A^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}DQ = Q^{-1}D^2Q \\
&A^3 = Q^{-1}DQA^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}D^2Q = Q^{-1}D^3Q \\
&\vdots \\
&A^n = Q^{-1}DQA^{n-1} = Q^{-1}DQQ^{-1}D^{n-1}Q = Q^{-1}D^nQ
\end{aligned}$$

Luego

$$A^{11} = Q^{-1} D^{11} Q \tag{1}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} A^{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{11} & 0 \\ 0 & -1^{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema **b)**(2ptos.) (i) Al ser f un polinomio de grado 4 su polinomio de Taylor p_4 de grado 4 en el punto $x = -1$ coincide con f y está expresado en potencias de $x + 1$. Se trata por tanto de calcular dicho polinomio p_4. Calculamos las derivadas

$$\begin{aligned} &f(-1) = 0, \\ &f'(-1) = \left[4x^3\right]_{x=-1} = -4, \\ &f''(-1) = \left[12x^2\right]_{x=-1} = 12, \\ &f'''(-1) = [24x]_{x=-1} = -24, \\ &f^{(4}(-1) = 24. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} f(x) &= p_4(x) = 24\frac{(x+1)^4}{4!} - 24\frac{(x+1)^3}{3!} + 12\frac{(x+1)^2}{2!} - 4(x+1) + 0 \\ &= (x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 6(x+1)^2 - 4(x+1) \end{aligned}$$

(ii)Calculamos la integral directamente

$$\begin{aligned} &I = \textstyle\int_M \sqrt{x+y}dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}}dy\right)dx \\ &= \textstyle\int_0^3 \left[\frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \tfrac{2}{3}\left(\textstyle\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}}dx - \int_0^3 x^{\frac{3}{2}}dx\right) \\ &= \tfrac{2}{3}\left(\left[\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=3} - \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=3}\right) \\ &= \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{5}\left(2^5 - 1\right) - \tfrac{2}{5}\left(3^{\frac{5}{2}} - 0\right)\right) \\ &= \tfrac{4}{15}\left(2^5 - 9\sqrt{3} - 1\right) \end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2015 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

$\boxed{\textbf{Parte tipo test}}$

1. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ d & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
en donde $c, d \in \mathbb{R}$ parámetros. Señale para qué valores de c, d el sistema lineal $AX = B$ tiene solución única para cualquier termino independiente $B \in \mathbb{R}^4$.
(a) Para cualesquiera $c, d \in \mathbb{R}$ (b) $15c - 33d \neq 0$
(c) $17c - 12d \neq 0$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales. Sobre dicho conjunto consideremos la operación $\lozenge$ definida de la siguiente manera
$$\begin{array}{rcl} \lozenge : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n \lozenge m = 1 + n \cdot m \end{array}$$
De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.
   - $\lozenge$ es asociativa
   - $\lozenge$ es conmutativa
   - No existe elemento neutro para $\lozenge$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

3. Dada la función

$$f(x,y) = (x-y)^6 + (x+y)^6$$

señale cuál es la expresión correcta.

(a) $D_{11}f(x,y) = -D_{22}f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
(b) $D_{11}f(x,y) = D_{22}f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
(c) $D_{11}f(x,y) = 6D_{22}f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
(d) Ninguna de las anteriores

4. Calcule el siguiente límite

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{3-\sqrt{2x+9}}{2x}$$

(a) $L = -1/18$ (b) $L = -1/9$
(c) $L = -1/6$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Halle el valor de la integral $I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^4 y^{10} dx dy$.

(a) $I = \dfrac{4}{37}$ (b) $I = 0$ (c) $I = \dfrac{4}{55}$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea $\mathbb{P}_k$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor a k. Consideramos la aplicación $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ que a cada polinomio $\mathbf{p} = ax^2 + bx + c$ le hace corresponder el polinomio

$$F(\mathbf{p}) = bx + a.$$

Se pide:

(i) Demostrar que F es una aplicación lineal. (1 pto)

(ii) Hallar la matriz asociada de F con respecto de la bases

$$\mathbf{A} = \left\{\mathbf{p}_1(x) = -1, \mathbf{p}_2(x) = x-1,\, \mathbf{p}_3(x) = (x+3)^2\right\},$$
$$\mathbf{B} = \{\mathbf{q}_1(x) = -x, \mathbf{q}_2(x) = 2\}.$$

(1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Determine los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

(1 pto)

(ii) Calcule la integral $I = \int_{-1}^{1} \dfrac{x}{x^2 + 4 - 4x} dx$. (1 pto)

FMI. Febrero 2014 2ª Semana. SOLUCIONES Modelo B.

1. **Solución. (b)** El sistema lineal $AX = B$ tiene solución única cuando la matriz A tiene determinante no nulo. Computamos el determinante directamente

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ d & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{vmatrix} c & 1 & 4 \\ d & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3(c + 12d - d - 6c) \\ &= -3(11d - 5c)\end{aligned}$$

en donde hemos desarrollado el determinante por los elementos de la tercera columna. Por tanto

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow -33d + 15c \neq 0$$

2. **Solución. (b)**

- $\Diamond$ no es asociativa. Tomemos $n = 1$, $m = 2$, $q = 3$, se tiene

$$\begin{gathered}(n\Diamond m)\Diamond q = (1\Diamond 2)\Diamond 3 = 3\Diamond 1 = 4 \\ \neq \\ n\Diamond (m\Diamond q) = 1\Diamond (2\Diamond 3) = 1\Diamond 7 = 8.\end{gathered}$$

- $\Diamond$ es conmutativa. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$n\Diamond m = 1 + n \cdot m = 1 + m \cdot n = m\Diamond n.$$

- Si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{N}$, entonces para $n = 1$ se tendria

$$1\Diamond e = 1 \Leftrightarrow 1 + e = 1 \Leftrightarrow e = 0$$

  De lo anterior necesariamente $e = 0$, pero en dicho caso

$$2\Diamond e = 2\Diamond 0 = 1 \neq 2,$$

  luego no verifica la propiedad de elemento neutro para el caso particular $n = 2$. Por tanto no existe elemento neutro.

3. **Solución. (b)** Derivando directamente

$$\begin{aligned}D_1 f(x, y) &= 6(x - y)^5 + 6(x + y)^5, \\ D_{11} f(x, y) &= 30(x - y)^4 + 30(x + y)^4, \\ D_2 f(x, y) &= -6(x - y)^5 + 6(x + y)^5, \\ D_{22} f(x, y) &= 30(x - y)^4 + 30(x + y)^4,\end{aligned}$$

se comprueba que

$$D_{11}f(x,y) = D_{22}f(x,y)$$

Solución. (c) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, calculamos el límite aplicando la regla de L'Hopital (p. 172 libro de texto)

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{2x+9}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3-\sqrt{2x+9}\right)'}{(2x)'} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{2\sqrt{2x+9}}}{2} = \frac{-\dfrac{2}{2\sqrt{0+9}}}{2} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Solución. (c) Integramos directamente

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^4y^{10}dxdy &= \left(\int_{-1}^{1} x^4dx\right)\left(\int_{-1}^{1} y^{10}dy\right) = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1}\left[\frac{y^{11}}{11}\right]_{y=-1}^{y=1} \\ &= \left(\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)\right)\left(\frac{1}{11}+\left(-\frac{1}{11}\right)\right) \\ &= \frac{2}{5}\frac{2}{11} = \frac{4}{55} \end{aligned}$$

Parte Desarrollo

Problema **a)**

(i) Dados λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{p}_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $\mathbf{p}_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ operando y aplicando la definición de F se tiene

$$\begin{aligned} F(\lambda\mathbf{p}_1 + \mu\mathbf{p}_2) &= F((\lambda a_1 + \mu a_2)\,x^2 + (\lambda b_1 + \mu b_2)\,x + \lambda c_1 + \mu c_2) \\ &= (\lambda b_1 + \mu b_2)\,x + \lambda c_1 + \mu c_2 \\ &= \lambda\,(b_1x + c_1) + \mu\,(b_2x + c_2) \\ &= \lambda F(\mathbf{p}_1) + \mu F(\mathbf{p}_2), \end{aligned}$$

lo que prueba que F es una aplicación lineal.

(ii) Consideremos un vector genérico $\mathbf{p} = ax^2 + bx + c$ sus coordenadas respecto de la base

$$\mathbf{A}' = \left\{\mathbf{p}'_1(x) = x^2, \mathbf{p}'_2(x) = x,\, \mathbf{p}'_3(x) = 1\right\}$$

viene dadas por el vector columna

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Del mismo modo las coordenadas de su imagen $F(\mathbf{p}) = bx + a$ respecto de la base

$$\mathbf{B}' = \{\mathbf{q}'_1(x) = x,\, \mathbf{q}'_2(x) = 1\}$$

es el vector

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Como directamente vemos

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{1}$$

la matriz asociada respecto de las bases $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denotemos por X, Y los vectores columnas de coordenadas de los polinomios $\mathbf{p}$ y $F(\mathbf{p})$ respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente. La matriz de cambio de la base $\mathbf{A}'$ a $\mathbf{A}$ viene dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} X \tag{2}$$

en donde las columnas no son más que las coordenadas de los elementos de la base $\mathbf{A}$ respecto de la base $\mathbf{A}'$ (p. 63 libro de texto)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}_1 = -1 = -1 = -\mathbf{p}'_3, \\
&\mathbf{p}_2 = x - 1 = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3, \\
&\mathbf{p}_3 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = \mathbf{p}'_1 + 6\mathbf{p}'_2 + 9.
\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y \tag{3}$$

en donde en este caso

$$\mathbf{q}_1 = -x = -\mathbf{q}'_1,$$
$$\mathbf{q}_2 = 2 = 2\mathbf{q}'_2,$$

Teniendo en cuenta (1), (2), (3) se tiene

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} X$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} X$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada de F respecto de la bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.
Problema **b)**(2ptos.)

(i) Operando

$$D_1 f(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y, D_2 f(x,y) = 4y^3 + 4x - 4y.$$

Los puntos críticos son la solución del sistema obtenido de igualar a las derivadas a cero

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0, \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Es un sistema no lineal, sumando ambas ecuaciones $x^3 + y^3 = 0$, entonces necesariamente $x^3 = -y^3$ lo que implica $x = -y$. Sustituyendo en una cualquiera de las ecuaciones del sistema

$$x^3 - x - x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0$$

que tiene como soluciones $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$. Los puntos críticos serían por tanto

$$\{(x_1, -x_1), (x_2, -x_2), (x_3, -x_3)\} = \left\{(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\right\}$$

(ii) Es una integral racional cuyo denominador $x^2+4-4x=(x-2)^2$ tiene a $x=2$ como raíz doble. Siguiendo la descomposición habitual en este tipo de casos (p. 215 libro de texto)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+4-4x} &= \frac{A_1}{(x-2)}+\frac{A_2}{(x-2)^2} \Leftrightarrow \\
\frac{x}{x^2+4-4x} &= \frac{A_1(x-2)+A_2}{(x-2)^2} \Leftrightarrow \\
A_1 &= 1,\ A_2=2
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{x}{x^2+4-4x}=\frac{1}{(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

e integrando

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+4-4x}dx &= \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x-2}+2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-2)^2} \\
&= [\ln|x-2|]_{x=-1}^{x=1}+2\left[\frac{-1}{x-2}\right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= \ln 1-\ln 3+2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}-\ln 3
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2015
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sean las bases

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \{(1,0,0),(1,0,1),(0,1,0)\}\\ \mathbf{B} &= \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}\end{aligned}$$

de $\mathbb{R}^3$. Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(1,1,1)$ en la base $\mathbf{A}$, señale sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.
(a) $(1,1,2)$ (b) $(2,1,1)$ (c) $(1,1,1)$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

Señale las ecuaciones paramétricas del subespacio núcleo Ker f.
(a) $x_1 = \lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = -\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
(b) $x_1 = \lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = -\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
(c) $x_1 = \lambda$, $x_2 = 2\lambda$, $x_3 = -3\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
(d) Ninguna de las anteriores

3. Dada la función $f(x) = x\,|x|$, señale su derivada en el punto $x = 0$.
(a) No existe $f'(0)$ (b) $f'(0) = 1$
(c) $f'(0) = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor, si existe, del siguiente límite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cos(\frac{x+1}{x})}{1+x}$$

(a) $L = \cos 1$ (b) $L = 0$
(c) No existe dicho límite (d) Ninguna de las anteriores

5. Señale el valor de la integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} dx$$

(a) $I = -2/3$ (b) $I = -4/3$ (c) $I = -1/3$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

(i) Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$

en donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable arbitraria. Demuestre, aplicando la regla de la cadena, que se verifica la siguiente identidad

$$D_1 g(x, y, z) + D_2 g(x, y, z) + D_3 g(x, y, z) = 0$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.(1 pto)

(ii) Calcule la integral

$$\int_T (x - y) dx dy$$

en donde $T \subset \mathbb{R}^2$ es el triángulo de vértices $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c.$$

Consideramos el siguientes subconjunto

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{p}_1(x) = x^2 + x + 1,\ \mathbf{p}_2(x) = 1,\ \mathbf{p}_3(x) = 1 - x \right\}$$

Sea asimismo $\varphi : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^1 \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x) x dx \text{ para todo } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_2.$$

Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

(i) Demuestre que $\mathbf{A}$ es una base de $\mathbb{P}_2$. (0.5 ptos)

(ii) Demuestre que φ es una aplicación bilineal simétrica. (0.5 ptos)

(iii) Señale la matriz de φ con respecto de la base $\mathbf{A}$. (1 pto)

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2016 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Determinar una recta tangente a la función $f(x) = 2 - x^2$ que sea paralela a la recta $2x + y = 4$.
(a) $2x + y = 3$ (b) $2x + y = 0$
(c) $2x + y = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea $M \in \mathcal{M}_n$ una matriz cuadrada regular de orden n verificando la siguiente identidad
$$M^2 - 2M = 3I$$
Señale la expresión correcta de la matriz inversa M^{-1}.
(a) No existe matriz inversa (b) $M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$
(c) $M^{-1} = \frac{1}{3}(2M - I)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Señale el valor de la integral $I = \int_{-2}^{2} \left|1 - x^2\right| dx$.
(a) $I = 4$ (b) $I = 3$ (c) $I = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sean las funciones
$$f(x, y, z) = (x + y, xyz, z^2 - x^2)$$
y
$$g(u, v, w) = (u^2 + v, v - w).$$
Determínese la matriz jacobiana de $h = g \circ f$ en el punto $P = (1, 1, 1)$.
(a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_3).$$

en donde la coordenadas están referidas a la base canónica. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ el vector que tiene a $(1, 2, -1)$ por vector de coordenadas con respecto de la base $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (-1, -1, 1)\}$. Señale las coordenadas de la imagen $f(\mathbf{v})$ con respecto de la base canónica.

(a) $f(\mathbf{v}) = (7, -2)$ (b) $f(\mathbf{v}) = (4, 0)$
(c) $f(\mathbf{v}) = (12, 4)$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) Consideramos el espacio de las matrices $\mathbb{M}_2$ de orden 2 y las bases

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Determine las matrices de cambio de la base $\mathbf{A}$ a la base $\mathbf{B}$ y de la base $\mathbf{B}$ a la base $\mathbf{A}$. (1 pto)

(ii) Hallar los vectores de coordenadas de la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

con respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente. (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + xy - x^2.$$

(i) Calcule el polinomio de Taylor $\mathbb{P}_2$ de orden 2 de f en el punto $(x, y) = (1, 1)$ (1 pto)

(ii) Calcule de manera razonada una cota del error cometido al aproximar f por P_2 en $I = [0, 2] \times [0, 2]$. Es decir, calcule una cota del error

$$\max_{(x,y)\in I} |P_2(x, y) - f(x, y)|$$

(1 pto)

FMI. Enero 2016 1ª Semana. SOLUCIONES Modelo A.

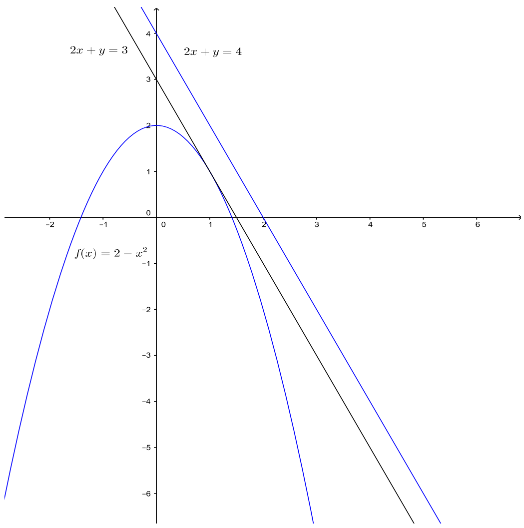
1. **Solución. (a)** Para que una tangente a la función $f(x) = 2 - x^2$ y la recta $y(x) = 4 - 2x$ sean paralelas deben coincidir sus pendientes en el punto de tangencia, es decir, sus derivadas $f'(x) = y'(x)$. Luego

$$-2x = -2 \Rightarrow x = 1.$$

Por tanto la recta tangente a f en el punto $x = 1$ viene dada por

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 - 2(x-1)$$

(véase figura)



2. **Solución. (b)** Aplicando propiedades del producto de matrices,

$$M^2 - 2M = 3I \Leftrightarrow M(M-2I) = 3I \Leftrightarrow M\left(\frac{M}{3} - \frac{2}{3}I\right) = I.$$

Luego $M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$ es la matriz inversa buscada.

3. **Solución (a)** Para calcular la integral descomponemos en primer lugar la función

$$|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \in (-1,1), \\ x^2 - 1 & \text{si } x \notin (-1,1), \end{cases}$$

e integramos directamente a partir de esta expresión

$$I = \int_{-2}^{2} \left|1 - x^2\right| dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{x=-2}^{x=-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{x=1}^{x=2}$$
$$= \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)\right) + \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right)$$
$$+ \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) = 4.$$

4. **Solución. (c)** Aplicamos la regla de la cadena

$$Dh(1,1,1) = Dg(f(1,1,1))Df(1,1,1).$$

En primer lugar calculamos

$$Df(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ yz & yz & zy \\ -2x & 0 & 2z \end{pmatrix}_{(x,y,z)=(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Dg(f(1,1,1)) = Dg(2,1,0) = \begin{pmatrix} 2u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{(u,v,w)=(2,1,0)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la matriz jacobiana de la función compuesta viene dada por

$$\begin{aligned} Dh(1,1,1) &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. **Solución (c)** Por definición

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= f((1,1,1)+2(0,1,1) - (-1,-1,1)) \\ &= f(1,1,1) + 2f(0,1,1) - f(-1,-1,1) \\ &= (4,2) + 2(3,1) - (-2,0) \\ &= (12,4) \end{aligned}$$

Parte Desarrollo

Problema **a)** Podemos expresar directamente los elementos de la base **A** como combinación lineal de los de **B**

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$
$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4$$
$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$$
$$\mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$$

La matriz de cambio de la base **A** a **B** es la que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de **A** con respecto a **B**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eso quiere decir que si X, Y son los vectores columnas de coordenadas de una matriz cualquiera $\mathbf{w} \in \mathbb{M}_2$ respecto de las bases **A** y **B** respectivamente, entonces

$$Y = AX$$

La matriz de cambio de la base **A** a **B** será la inversa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Las coordenadas de la matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ con respecto de la base **B** viene dado por el vector $(1, 2, 4, 3)$ y sus coordenadas con respecto de la base **A**

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Finalmente verifíquese que

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema **b)**

(i) Las derivadas en el punto $(x, y) = (1, 1)$ vienen dadas por

$$\begin{aligned}
&f(1,1) = 0 \\
&D_1 f(1,1) = 3x^2 + y - 2x\big|_{(x,y)=(1,1)} = 2,\ D_2 f(1,1) = -3y^2 + x\big|_{(x,y)=(1,1)} = -2 \\
&D_{11} f(1,1) = 6x - 2\big|_{(x,y)=(1,1)} = 4,\ D_{12} f(1,1) = 1,\ D_{22} f(1,1) = -6y\big|_{(x,y)=(1,1)} = -6
\end{aligned}$$

El polinomio de Taylor viene dado por

$$P_2(x,y) = 0+2(x-1)-2(y-1)+\frac{1}{2}(4(x-1)^2+2(x-1)(y-1)-6(y-1)^2)$$

(ii) Como $f \in \mathbb{P}_3$, su polinomio de Taylor P_3 de orden 3 en $(x, y) = (1, 1)$ es exacto. Es decir

$$f(x,y) = P_3(x,y).$$

por tanto

$$f(x,y) - P_2(x,y) = P_3(x,y) - P_2(x,y),$$

y el error viene dado directamente por el término de orden 3. Para calcular dicho término, recordemos en primer lugar la regla mnemotécnica para calcular el de orden 3 de un polinomio de dos variables (véase p. 255):

$$((x-x_1)D_1 + (y-y_1)D_2)^3 f(a) = (x-x_1)^3 D_{111} f(a) + 3(x-x_1)^2(y-y_1) D_{112} f(a) + 3(x-x_1)(y-y_1)^2 D_{122} f(a) + (y-y_1)^3 D_{222} f(a)$$

Las derivadas de tercer orden viene dadas por

$$D_{111} f(1,1) = 6,\ D_{222} f(1,1) = -6,\ D_{112} f(1,1) = D_{122} f(1,1) = 0$$

Por construcción

$$\begin{aligned}
P_3(x,y) &= P_2(x,y) + \frac{1}{3!}(D_{111} f(1,1)(x-1)^3 + D_{222} f(1,1)(y-1)^3) \\
&= P_2(x,y) + \frac{6}{3!}((x-1)^3 - (y-1)^3) \\
&= P_2(x,y) + ((x-1)^3 - (y-1)^3)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$|f(x,y) - P_2(x,y)| = \left|(x-1)^3 - (y-1)^3\right| \leq \left|(x-1)^3\right| + \left|(y-1)^3\right|$$

Para $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$, tenemos que como mucho $|x - 1|$,$|y - 1| \leq 1$, luego finalmente

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| \leq 1 + 1 = 2.$$

Febrero 2016 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0, \\ ax + b & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Determínense los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que f sea derivable en $x = 0$.

(a) $a = 0$, $b = -1$ (b) $a = 1$, $b = 0$
(c) $a = 1$, $b = 1$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Señale la posible matriz inversa de la matriz $B = A + I$

(a) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea el polinomio $p(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 8x$. Señale los valores a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 verificando

$$p(x) = a_5(x+1)^5 + a_4(x+1)^4 + a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0$$

(a) $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = -4$, $a_5 = 1$

(c) $a_0 = 0$, $a_1 = -8$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 1$
(d) Ninguna de las anteriores

4. Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$u(x, y) = F(u(x, y)y, x + u(x, y))$$

Si se tiene que $u(0, 0) = 1$,

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} x + y & 1 + e^{x+y} \end{pmatrix},$$

señale el valor de la derivada parcial $D_1u(0, 0)$.
(a) $D_1u(0, 0) = -2$ $\quad$ (b) $D_1u(0, 0) = 1$
(c) $D_1u(0, 0) = 0$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sean $\mathbf{A} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$ verificando

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Señale las coordenadas del vector $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ respecto de la base $\mathbf{B}$.
(a) $(1, 2)$ $\quad$ (b) $(-1/2, 3/2)$ $\quad$ (c) $(2, 1)$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\ \}$$

y sea $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$F(\mathbf{p}) = \int_1^2 \mathbf{p}(x)dx.$$

En este ejercicio consideramos las siguientes bases

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_0(x) = -1, \mathbf{p}_1(x) = x + 2,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2\}, \\ &\mathbf{B} = \{-3\}. \end{aligned}$$

en $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}$ respectivamente.

(i) Probar que F es una aplicación lineal. (0.5 ptos)

(ii) Señale la matriz asociada a la aplicación con respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. (0.75 ptos) coordenadas con respecto de la base **A**. (0.75 ptos)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Determínense los máximos y mínimos locales de las función

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 8x + y^2 + 8y + 16.$$

(1 pto)

(ii) Sea $f(x, y) = xy$. Señale el valor de la integral

$$\int_D f(x, y)dxdy$$

en donde $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.(1 pto)

1. **Solución. (b)** Para que la función sea derivable, se debe verificar que la función es continua en $x = 0$. Es decir

$$f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = b,$$

por tanto $b = 0$. Del mismo modo las derivadas laterales deben coincidir. En este caso como

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } \; x < 0, \\ a & \text{si } \; x > 0, \end{cases}$$

necesariamente

$$a = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \cos 0 = 1$$

2. **Solución. (b)** Por definición

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene determinante $|B| = 1$. Aplicamos directamente el teorema de caracterización de la matriz inversa

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -a & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. **Solución. (a)**

de grado 5 centrado en el punto $x = -1$. Luego

$$a_i = \frac{p^{i)}(-1)}{i!} \text{ para } i = 0, ..., 5.$$

Mediante un calculo directo $p(-1) = 0, p'(-1) = 3, p''(-1) = p'''(-1) = 0$, $p^{4)}(-1) = -96$, $p^{5)}(-1) = 120$. Luego

$$a_0 = a_2 = a_3 = 0,$$

y

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{3}{1!} = 3, \\ a_4 &= \tfrac{-96}{4!} = -4, \\ a_1 &= \tfrac{120}{5!} = 1. \end{aligned}$$

De hecho, compruébese que

$$(x+1)^5 - 4(x+1)^4 + 3(x+1) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 8x$$

4. **Solución. (a)** Aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} D_1u(x,y) &= D_1F(u(x,y)y, x+u(x,y))D_1(u(x,y)y) + D_2F(u(x,y)y, x+u(x,y))D_1(x+u(x,y)) \\ &= D_1F(u(x,y)y, x+u(x,y))D_1u(x,y)y + D_2F(u(x,y)y, x+u(x,y))(1+D_1u(x,y)). \end{aligned}$$

Luego despejando

$$D_1u(x,y) = \frac{D_2F(u(x,y)y, x+u(x,y))}{1 - D_1F(u(x,y)y, x+u(x,y)) - D_2F(u(x,y)y, x+u(x,y))}$$

Sustituyendo en $(x,y) = (0,0)$,

$$\begin{aligned} D_1u(0,0) &= \frac{D_2F(0,0)}{1 - D_1F(0,0) - D_2F(0,0)} \\ &= \frac{1+e^0}{1-(0+0)-(1+e^0)} \\ &= \frac{2}{1-0-2} = -2. \end{aligned}$$

5. **Solución. (a)** Como $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, las coordenadas de w con respecto de $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ son directamente $(1,2)$.

Parte Desarrollo

Problema **a)**

$$\begin{aligned} F(\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{q}) &= \int_1^2(\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{p})dx = \alpha\int_1^2\mathbf{p}(x)dx+\beta\int_1^2\mathbf{q}(x)dx = \\ &= \alpha F(\mathbf{p})+\beta F(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

en donde hemos aplicado la linealidad de la integral (véase p. 200 libro de texto).

(ii) La matriz asociada a la aplicación viene dada por la imágenes de la base **A** con respecto de la base **B**. En primer lugar calculamos

$$\begin{array}{l} F(\mathbf{p}_0) = \int_1^2 -1dx = -1 \\ F(\mathbf{p}_1) = \int_1^2 (x+2)dx = \frac{7}{2} \\ F(\mathbf{p}_2) = \int_1^2 x^2dx = \frac{7}{3} \end{array}$$

Para cualquier $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2$ se tiene

$$F(\mathbf{p}) = \left(-\frac{F(\mathbf{p})}{3}\right)(-3)$$

y por tanto $-\dfrac{F(\mathbf{p})}{3}$ es la coordenada de $F(\mathbf{p})$ con respecto de la base $\{-3\}$. Luego la matriz asociada viene dada por

$$\left(\begin{array}{ccc} -\dfrac{F(\mathbf{p})}{3} & -\dfrac{F(\mathbf{p})}{3} & -\dfrac{F(\mathbf{p})}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{7}{6} & -\dfrac{7}{9} \end{array}\right)$$

(iii) Un vector $\mathbf{p} = x_0\mathbf{p}_0 + x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 \in \operatorname{Ker} F$ verifica

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}) &= 0 \Leftrightarrow x_0F(\mathbf{p}_0) + x_1F(\mathbf{p}_1) + x_2F(\mathbf{p}_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x_0 + \frac{7}{2}x_1 + \frac{7}{3}x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -6x_0 + 21x_1 + 14x_2 = 0, \end{aligned}$$

siendo ésta última ecuación la ecuación implícita de Ker F. Las ecuaciones paramétricas del subespacio están dadas por

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}x_1 + \frac{7}{3}x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y de aquí directamente deducimos que $\left\{\left(\frac{7}{2},1,0\right), \left(\frac{7}{3},0,1\right)\right\}$ es una base de Ker F.

$$\operatorname{Ker} F = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Problema **b)**

(i) Calculamos en primer lugar los punto críticos igualando a cero sus derivadas de primer orden

$$\left. \begin{array}{l} D_1 f(x,y) = 2x - 2y - 8 = 0 \\ D_2 f(x,y) = -2x + 2y + 8 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

es un sistema lineal compatible inderteminado con un parámetro cuyo conjunto de soluciones viene dado por la recta

$$L = \{(x,y) : y = x - 4\}$$

La matriz Hessiana de derivadas de segundo orden

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11} f(x,y) & D_{12} f(x,y) \\ D_{21} f(x,y) & D_{22} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

es contante para cada punto, en particular para los puntos de la recta. Por el criterio de los determinantes de las submatrices principales (véase pp. 259-261) se tiene

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

y por tanto los puntos pueden ser o no extremos relativos. Se puede comprobar directamente que la matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\,(x-y)^2 \geq 0$$

es definida positiva para todo (x,y). Luego todo punto crítico es mínimo local. Por tanto, L es una recta de mínimo locales de f.

(ii) Calculamos la integral mediante un cambio a polares

$$x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta,\ dxdy = rd\theta$$

$$
\begin{aligned}
D &= \{(x,y) : 0 \le x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\} \\
&= \left\{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\right\}
\end{aligned}
$$

La integral viene dada por

$$
\begin{aligned}
\int_D xydxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r\cos\theta r sen\theta r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \cos\theta sen\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta sen\theta d\theta \int_0^2 r^3 dr = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2\theta d\theta \int_0^2 r^3 dr \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{-\cos 2\theta}{2}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Bigg|_{r=0}^{r=2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos\pi + \cos 0}{2}\right)\left(\frac{2^4}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2^4}{4} = 2
\end{aligned}
$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2016
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números naturales. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\Diamond$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (r,q) & \longmapsto & r\Diamond q = \dfrac{r+q}{2} \end{array}$$

De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.

- $\Diamond$ es asociativa
- $\Diamond$ es conmutativa
- Existe elemento neutro.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

2. Calcule las coordenadas del vector

$$\mathbf{v} = (2,5)$$

respecto de la base $\mathbf{B} = \{(1,-2),(3,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
(a) $(-1,1)$ (b) $(2,1)$ (c) $(3,1)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Señale el valor del siguiente límite

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)-2x}{x^3}$$

(a) $L=-1/3$ (b) $L=-4/3$
(c) $L=-2/3$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \int_1^{1+x^2} u^2 du.$$

Señale el valor de la derivada $f'(1)$.

(a) $f'(1) = 12$ (b) $f'(1) = 8$

(c) $f'(1) = 10$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

y sea $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal definida por

$$F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'(1) + \int_0^1 \mathbf{p}(s)ds \text{ para todo } \mathbf{p} \in \mathbb{P}_2.$$

Consideramos las siguientes bases

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{\mathbf{p}_0(x) = x^2, \mathbf{p}_1(x) = x,\ \mathbf{p}_2(x) = -1\}, \\ \mathbf{B} &= \{-1\}, \end{aligned}$$

en $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}$ respectivamente. Señale la matriz asociada a la aplicación con respecto de las bases **A** y **B**.

(a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinar los valores propios y las ecuaciones de los subespacios propios asociados a ellos. (1 pto)

(ii) Estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal y la base a la que está referida (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.) Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

(i) Calcule el valor de la integral

$$\int_M x dx dy,$$

en donde M es el triángulo de vértices $(0,-1)$, $(1,0)$, $(2,0)$. (1 pto)

(ii) Sean las funciones

$$f(u,v,w) = (e^{u-w}, \cos(v+u) + \operatorname{sen}(u+v+w)),$$
$$g(x,y) = (e^x, \cos(x-y), e^{-y}).$$

Calcule $(f \circ g)'(0,0)$, matriz jacobiana de la función compuesta $f \circ g$ en el punto $(0,0)$. (1 pto)

FMI. Septiembre 2016 Septiembre. SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (a)**

   - En general $\diamondsuit$ no es asociativa. Tomando por ejemplo $r = 1$, $q = 2$, $s = 3$ se tiene
     $r\diamondsuit(q\diamondsuit s) = 1\diamondsuit(2\diamondsuit 3) = 1\diamondsuit\frac{5}{2} = \frac{7}{4} \neq \frac{9}{4} = \frac{3}{2}\diamondsuit 3 = (1\diamondsuit 2)\diamondsuit 3 = (r\diamondsuit q)\diamondsuit s.$
   - $\diamondsuit$ es conmutativa como consecuencia de la conmutatividad de la suma de los reales. Para cualesquiera $r, q \in \mathbb{R}$ se tiene que
     $$r\diamondsuit q = \frac{r+q}{2} = \frac{q+r}{2} = q\diamondsuit r.$$
   - No existe elemento neutro. En caso de existir un elemento neutro e, para $r = 1$
     $$1\diamondsuit e = 1 \Rightarrow \frac{1+e}{2} = e$$
     y necesariamente $e = 1$. Pero en dicho caso si tomamos por ejemplo $r = 2$, se tiene que
     $$2\diamondsuit e = 2\diamondsuit 1 = \frac{3}{2} \neq e.$$
     Luego $e = 1$ no puede ser elemento neutro y por tanto no existe elemento neutro para $\diamond$.

2. **Solución. (a)** Por definición, buscamos α, $\beta \in \mathbb{R}$ tales que
   $$(2,5) = \alpha(1,-2) + \beta(3,3).$$
   Matricialmente podemos expresarlo como
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
   Resolviendo este sistema se tiene directamente que la coordenadas vienen dadas por $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$.

3. **Solución. (b)** Es una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de L'Hopital tres veces consecutivamente para resolver el límite
   $$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}(2x) - 2x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(2\cos(2x) - 2)'}{(3x^2)'} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(-4\operatorname{sen}(2x))'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-8\cos(2x)}{6} = \frac{-4}{3}. \end{aligned}$$

4. **Solución. (b)** Podemos expresar f como composición de dos funciones reales

$$f = g \circ h$$

en donde $g,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas por

$$g(y) = \int_1^y u^2 du,\ h(x) = 1 + x^2.$$

Aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x).$$

La derivadas correspondientes vienen dadas por

$$g'(y) = y^2,\ \ h'(x) = 2x.$$

en donde en el primer caso hemos aplicado el Primer Teorema Fundamental del Cálculo (véase pp 208-9). Luego finalmente

$$f'(x) = g'(1 + x^2)2x$$

y por tanto

$$f'(1) = g'(1 + 1)2 = g'(2)2 = 2^2 2 = 8.$$

Solución. (d)

Sabemos que la matriz de la aplicación tiene por columnas las coordenadas de la imágenes

$$\{F(\mathbf{p}_0), F(\mathbf{p}_1), F(\mathbf{p}_2)\}$$

de la base $\mathbf{A}$ con respecto de la base $\mathbf{B} = \{\mathbf{v} = -1\}$ (véase p. 79 libro de texto). Basta calcular directamente

$$F(\mathbf{p}_0) = F(x^2) = 2x|_{x=1} + \int_0^1 x^2 dx = 2 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{3} = \left(-\tfrac{7}{3}\right)(-1) = -\tfrac{7}{3}\mathbf{v}$$
$$F(\mathbf{p}_1) = F(x) = 1 + \int_0^1 x dx = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} = (-\tfrac{3}{2})(-1) = -\tfrac{3}{2}\mathbf{v}$$
$$F(\mathbf{p}_2) = F(-1) = 0 - \int_0^1 1 dx = -1 = 1(-1) = \mathbf{v}$$

Por tanto la matriz asociada viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Problema **a)**

(i) Denotemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(\lambda-1)\,(\lambda-3)$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

El subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$ viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 0I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_3 = 0\} \end{aligned}$$

El subespacio $\mathbb{E}_2$ asociado al autovalor $\lambda_2 = 1$ viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_2 &= \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 = 0\} \end{aligned}$$

El subespacio $\mathbb{E}_3$ asociado al autovalor $\lambda_3 = 3$ viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_3 &= \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 3I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_2 = 0,\ x_1 - 2x_3 = 0\} \end{aligned}$$

(ii) La matriz es diagonalizable ya que tiene tres autovalores distintos. (véase p. 102 libro de texto) y la matriz diagonal asociada será

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

si ordenamos la base de autovalores siguiendo el mismo orden. Como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1 &= G[(1,-1,-1)],\\ \mathbb{E}_2 &= G[(0,1,-1)],\\ \mathbb{E}_3 &= G[(2,1,1))],\end{aligned}$$

una base de vectores propios viene dada por

$$\{(1,-1,-1),(0,1,-1),(2,1,1)\}.$$

Una matriz de paso P verificando

$$D = P^{-1}AP$$

tiene por columnas los elementos de la base de cada subespacio propio (véase p.102 libro de texto). En este caso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y se puede verificar

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema **b)**

(i) El triángulo M se parametriza como la unión de dos conjuntos disjuntos de la siguiente manera

$$M = M_1 \cup M_2,$$

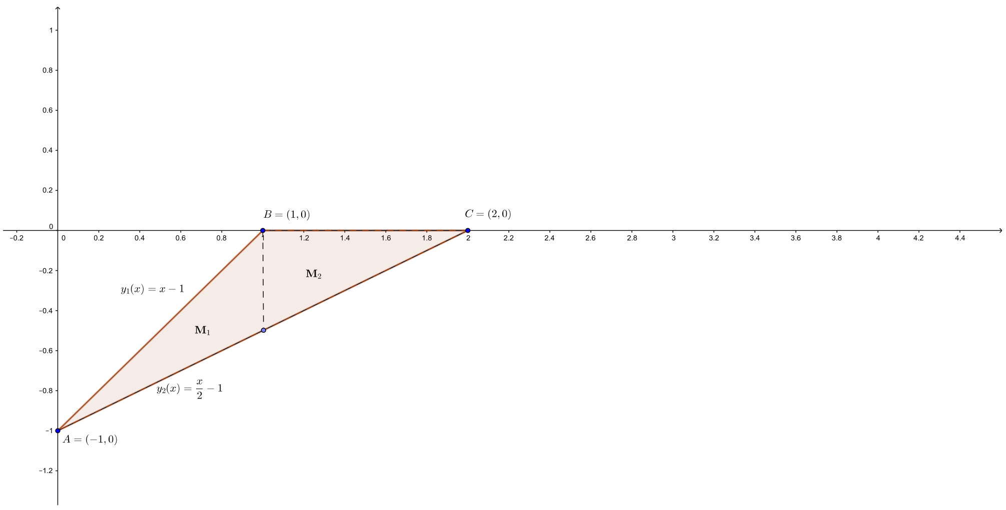
en donde

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x-1 \le y \le \tfrac{x}{2} - 1\right\},\\ M_2 &= \left\{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ x-1 \le y \le 0\right\}. \end{aligned}$$

(véase figura)

Sabemos que la integral sobre M es la suma de las integral sobre M_1 y M_2

$$I = \int_M x dx dy = \int_{M_1} x dx dy + \int_{M_2} x dx dy$$



Calculamos cada integral directamente. Por un lado

$$\begin{aligned}
\int_{M_1} xdxdy &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}-1}^{x-1} xdydx = \int_0^1 x(x-1-(\frac{x}{2}-1))dx = \\
&= \int_0^1 x\frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_{M_2} xdxdy &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}-1}^{0} xdydx = \int_0^1 x\left(0-\left(\frac{x}{2}-1\right)\right)dx = \\
&= \int_0^1 xdx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}
\end{aligned}$$

Finalmente el valor de la integral viene dado por

$$I = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) Aplicando la regla de la cadena (véase pp 246-7 libro de texto)

$$(f \circ g)'(0,0) = f'(g(0,0))g'(0,0)$$

En este caso $g(0,0) = (1,1,1)$ y las correspondientes matrices jacobianas viene dadas por

$$\begin{aligned}
f'(g(0,0)) &= f'(1,1,1) \\
&= \begin{pmatrix} e^{u-w} & 0 & -e^{u-w} \\ -\operatorname{sen}(u+v)+\cos(u+v+w) & -\operatorname{sen}(u+v)+\cos(u+v+w) & \cos(u+v+w) \end{pmatrix}_{(u,v,w)=(1,1,1)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\operatorname{sen}(2)+\cos(3) & -\operatorname{sen}(2)+\cos(3) & \cos(3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$g'(0,0) = \left(\begin{array}{cc} e^x & 0 \\ -\operatorname{sen}(x-y) & \operatorname{sen}(x-y) \\ 0 & -e^{-y} \end{array} \right)_{(x,y)=(0,0)} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(0) & \operatorname{sen}(0) \\ 0 & -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right)$$

Luego

$$(f \circ g)'(0,0) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ -\operatorname{sen}(2) + \cos(3) & -\operatorname{sen}(2) + \cos(3) & \cos(3) \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right)$$

y por tanto

$$(f \circ g)'(0,0) == \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -\operatorname{sen}(2) + \cos(3) & -\cos(3) \end{array} \right)$$