Examen Final Segundo Cuatrimestre Álgebra Lineal
(12 de Junio de 2015)

Nombre y apellidos:

DNI:

---

1. i)[2 puntos] Considérense las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & ab \\ 0 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Determinar para qué valores $a, b \in \mathbb{R}$ las matrices A y B son semejantes.

Indicación para que no queden demasiados casos: Primero establecer cómo pueden ser los autovalores de A según los casos. En cada caso obtenido, estudiar qué debe pasar para que B sea semejante a A.

ii) [1 puntos] ¿Para qué matriz y para qué valores de a y b se tiene que su polinomio *mínimo* es $P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$?

2. Sea $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas reales de orden 2 simétricas.

   i) [0,5 puntos] Demuestra que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas reales de orden 2. Encuentra una base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

   ii) [1,5 puntos] Sea la forma bilineal simétrica

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & \mathrm{tr}(AMB) \end{array}$$

   donde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calcular la matriz de ψ respecto de la base que has descrito en el apartado anterior. Calcular el rango y la signatura de ψ.

3. En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma bilineal ϕ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) [0,5 puntos] Demuestra que ϕ es un producto escalar.

ii) [0,75 puntos] Dado un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyos dos únicos autovalores son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ y cuyos autovectores asociados son $V_0 = L[(1, 1, -1), (1, 0, -1)]$ y $V_1 = L[(1, -1, 1)]$.

¿Existe una base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal respecto al producto escalar ϕ formada por autovectores de f? En caso afirmativo, describe una de ellas.

iii) [0,75 puntos] Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ que sea ortonormal respecto al producto escalar usual y ortogonal respecto al producto escalar ϕ.

A y B son semejantes si y solo si tienen la misma forma de Jordan

1) [i] El pol. caract. de A es $(b-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)$

El pol. caract. de B es $(a+1-\lambda)\left[(a-\lambda)(b-\lambda)-ab\right] = [a+1-\lambda]\,\lambda\,[\lambda-(a+b)]$

Caso 1: Si $b \neq 0$ y $b \neq 1$ entonces A tiene tres autovalores distintos $\lambda=b, \lambda=0, \lambda=1$

Para que B tenga los mismos autovalores con las mismas multiplicidades solo pueden pasar dos casos:

$\boxed{1.1} \to \begin{cases} \lambda = a+1 = b \\ \lambda = a+b = 1 \\ \lambda = 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow b-1 = 1-b \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$ Contra

$\boxed{1.2} \to \begin{cases} \lambda = a+1 = 1 \\ \lambda = a+b = b \\ \lambda = 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=0}$

En este caso las formas de Jordan de ambas es $\begin{pmatrix} b & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

y por tanto son semejantes.

Caso 2: Si $b=0$ entonces A tiene autovalores $\lambda=0$ (doble) y $\lambda=1$ (simple)

Para que B tenga los mismos autovalores con la misma multiplicidad algebraica pueden ocurrir dos cosas

$\boxed{2.1} \begin{cases} \lambda = a+1 = 1 \\ \lambda = a+0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=0}$

$\dim(E_1(1)) = 3 - rg(A) = 3-2 = 1$

Para la matriz B se tiene que

$$\dim(E_1(1)) = 3 - rg(B) = 3-2 = 1$$

y por tanto $\dim(E_2(1))=2$. Su forma de Jordan es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

En este caso son semejantes.

$\boxed{2.2}$ $\lambda = a+1 = 0$ $\Longrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=1 \end{cases}$ ¡Contra!

$\lambda = a+0 = 1$

$\lambda = 0$

Caso 3: Si $b=1$ entonces A tiene autovalores $\lambda=1$ (doble) y $\lambda=0$ (simple). Para que B tenga los mismos autovalores con las mismas multiplicidades algebraicas sólo puede ocurrir una cosa

$$\begin{cases} \lambda = a+1 = 1 \\ \lambda = a+1 = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{a=0}$$

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para A se tiene que

$$\dim(E_1(1)) = 3 - rg(A-I) = 3-2 = 1$$

... forma de Jordan es ... No son semejantes.

Lo podíamos hacer más rápido si hubiésemos observado desde el principio que para que A y B sean semejantes es necesario que tengan la misma traza

$$1+b = tr(A) = tr(B) = 2a+1+b$$

$$\Rightarrow \boxed{a=0}$$

En el caso $a=0$ las matrices quedan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$P_{car}(\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda)(b-\lambda) \qquad P_{car}(\lambda) = -\lambda\,(1-\lambda)(b-\lambda)$$

Si $b \neq 0$ y $b \neq 1$ entonces son semejantes porque su forma de Jordan es $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & b \end{pmatrix}$

Si $b=0$, la forma de Jordan de cada una es $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ \hline & & 1 \end{array}\right)$

y tb. son semejantes (lo hemos hecho antes)

(ii) Si el polinomio mínimo es $p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$ entonces sólo hay dos autovalores $\lambda = 0$ (simple) y $\lambda = 1$ (doble) y se tiene que

$$\dim(E_1(0)) = 1$$

$$\dim(E_2(1)) = 2 \quad y \quad \dim(E_1(1)) = 1.$$

Para que B tenga esos autovalores con esas multiplicidades necesitamos que $\lambda = 0$, $\lambda = a+b = 1$, $\lambda = a+1 = 1$, es decir, $a=0$ y $b=1$. Pero en este caso hemos visto que B es diagonalizable y su polinomio mínimo sería $\lambda(\lambda-1)$.
Así que debe ser para A con $b=1$. El valor a puede ser cualquiera ya que siempre tenemos que $\dim(E_1(1)) = 3-2=1$ y por tanto se tiene que su polinomio mínimo será $\lambda(\lambda-1)^2$

[2] [1] Dadas $A, B \in S_2(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\alpha A + \beta B \in S_2(\mathbb{R})$$

puesto que

$$(\alpha A + \beta B)^t = [\alpha A]^t + [\beta B]^t = \alpha A^t + \beta B^t =$$

$$= \alpha A + \beta B$$

Una base de $S_2(\mathbb{R})$ es

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3} \right\}$$

$$\varphi(E_2,E_2)=tr(E_2 M E_2)=tr\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\varphi(E_2,E_3)=tr(E_2 M E_3)=tr\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=1$$

$$\varphi(E_3,E_3)=tr(E_3 M E_3)=tr\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=0$$

La matriz es

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

Deducimos que $rg(\varphi)=2$.

Calculemos la signatura

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1+F_3]{}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_1+C_3]{}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{\sqrt2}F_1]{}\begin{pmatrix}2/\sqrt2&1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{\sqrt2}C_1]{}\begin{pmatrix}1&1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1/\sqrt2&0&1\\1/\sqrt2&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2-1/\sqrt2 F_1]{}\begin{pmatrix}1&1/\sqrt2&1/\sqrt2\\0&-1/2&1/2\\1/\sqrt2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2-\frac{1}{\sqrt2}C_1]{}\begin{pmatrix}1&0&1/\sqrt2\\0&-1/2&1/2\\1/\sqrt2&1/2&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1/\sqrt2\\ \dots\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/2&1/2\\ \dots\end{pmatrix}$$

La signatura es $sg(\varphi)=(1,1)$

También lo podemos hacer estudiando los autovalores

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 2\lambda = \lambda[-\lambda^2 + 2]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay un autovalor positivo y uno negativo $\longrightarrow$ $sg(\varphi) = (1,1)$

$\boxed{3}$

(i) Por el Criterio de Sylvester

$2 > 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8+1+1-2-2-2 = 10-6 = 4 > 0$$

Es definida positiva y simétrica $\Rightarrow$ ϕ es producto escalar

(ii) Veamos si el vector $(1,-1,1)$ es ortogonal a $(1,1,-1)$, $(1,0,-1)$

$(1\ {-1}\ 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix} = (2\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix} = 2-2 = 0$

Por tanto, seguimos [illegible] poder encontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \phi)$ con vectores de f.

Los vectores $(1,1,-1)$ y $(1,0,-1)$ no son ortogonales por ϕ ya que

$$(1\ 1\ -1)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=(2\ 2\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$$

Pero usando Gram-schmidt seguro que podemos conseguir una base ortonormal de V_0

Para calcular la norma de $(1,1,-1)$ hallamos

$$(1\ 1\ -1)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=(2\ 2\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=4$$

Tomamos por tanto $v_1=\dfrac{(1,1,-1)}{2}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Sea $v_2'=\lambda v_1+(1,0,-1)$. Queremos que v_2 y v_1 sean ortogonales, es decir,

$$0=\phi(v_1,v_2')=\lambda\,\phi(v_1,v_1)+\phi(v_1,(1,0,-1))$$

$$\Rightarrow \lambda=-\phi(v_1,(1,0,-1))=-\left(\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=$$

$$=-(1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=$$

$$=-[\,1\,]=-1$$

Por tanto tenemos

$$v_2 = v_2' = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)$$

Finalmente tomamos

$$v_3 = \frac{1}{\|(1,-1,1)\|}(1,-1,1) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$(1\ -1\ 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\ 0\ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Por tanto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \phi)$ formada por autovectores de f.

iii) El ejercicio nos está pidiendo que calculemos una matriz P tal que

1) $P^tP = I$, para que

producto escalar normal y por ...

El teorema espectral nos decía cómo calcularlo:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)^2$$

* Autovectores de $\lambda=4$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 3y-3z=0 \\ -3y+3z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=z \\ x+y-2z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

$$\to \boxed{V_4 = L[(1,1,1)]}$$

Debemos aplicar Gram - Schimdt a la base de V_1

$$v_1 = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$v_2' = \lambda v_1 + (0,1,-1)$ ortogonal a v_1

$$0 = \langle v_1, v_2' \rangle = \lambda + \langle (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (0,1,-1) \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = -1/\sqrt{2} \Rightarrow v_2' = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + (0,1,-1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$$

Por tanto la base es

$$\boxed{\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}}$$

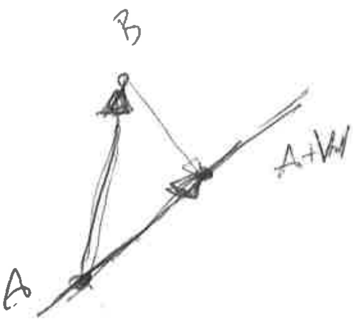
$\boxed{4}$

(i) $B = (3,1,2)$

El plano $x+y+z=1$ es el plano

$$\underbrace{(0,0,1)}_{A} + \underbrace{L[(1,0,-1),(1,-1,0)]}_{W}$$

La proyección de B sobre $x+y+z=1$ es



$$P_{A+W}(B) = A + P_W(\vec{AB})$$

donde P_W es la proyección vectorial ortogonal sobre W.

$\vec{AB} = (3,1,1)$

Buscamos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$(3,1,1) = \alpha(1,0,-1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(1,1,1)$$

$3 = -1+\gamma-1+\gamma+\gamma =$

$\rightarrow 3 \ldots = -2+3\gamma$

$\boxed{\alpha = 2/3}$

Por tanto la proyección de B sobre $\underbrace{x+y+z=1}_{A+W}$

$$P_{A+W}(B) = (0,0,1) + \frac{2}{3}(1,0,-1) + \frac{2}{3}(1,-1,0)$$

$$= \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

y la distancia de B al plano es

$$\|\overrightarrow{B\,P_{A+W}(B)}\| = \left\| \left(\frac{4}{3}-3, -\frac{2}{3}-1, \frac{1}{3}-2\right) \right\| =$$

$$= \left\| \left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) \right\| =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{25}{9}+\frac{25}{9}} = 5/\sqrt{3}$$

De otra forma: La recta perpendicular al plano que pasa por B es

$$\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$$

Calculamos la intersección de la recta y el plano

$$(3+\lambda) + (1+\lambda) + (2+\lambda) = 1$$

$$\Rightarrow 3\lambda = -5 \Rightarrow \lambda = -5/3$$

$\|u\|^2 = \|v\|^2 \iff \boxed{\langle u,u\rangle = \langle v,v\rangle}$

5

$$\begin{cases} f(u) = au + bv \\ f(v) = u - v \end{cases}$$

$$\langle u,v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle = \langle au+bv, u-v\rangle$$

$$= a\langle u,u\rangle - b\langle v,v\rangle - a\langle u,v\rangle + b\langle u,v\rangle$$

$$\Rightarrow (1+a-b)\langle u,v\rangle = (a-b)\langle u,u\rangle = 2(a-b)\langle u,v\rangle$$

$\boxed{\langle u,u\rangle = \langle v,v\rangle}$ $\boxed{\langle u,u\rangle = 2\langle u,v\rangle}$

$$\Rightarrow 1+a-b = 2a-2b \Rightarrow \boxed{1 = a-b}$$

$\langle u,v\rangle \neq 0$ ya que en caso contrario $\langle u,u\rangle = 0$ ¿?

Por otro lado sabemos que el determinante es 1 o -1

* Si determinante es 1 entonces $-a-b = 1$

$\begin{cases} -a \ldots \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ldots \\ a=1 \end{cases} \wedge \begin{pmatrix} \ldots \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ simétrica