ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, GRUPO B. EXAMEN FINAL DEL 08/01/2018.

TEST Y PREGUNTAS DE TEORÍA

I) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas o, en el caso de las preguntas 4 y 5, escribir el número pedido.

1. La aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{e^{3z}}$ transforma las rectas $y = x$ y $x = 0$ en dos curvas que se cortan formando un ángulo de amplitud $\pi/8$ en el punto $e = e + i0 \in \mathbb{C}$.

2. La aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x + iy) = x^3 + iy^3$ es conforme en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3. La aplicación $u(x, y) = x^3$ es armónica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pero no tiene conjugada armónica en dicha región.

4. Escribir aquí el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$.

5. Escribir aquí el valor de la integral $\int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^{15}} dz$.

6. La función $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(z/n)\cos(z/n^2)}{1+n^3}$ es entera.

7. Se tiene que $2\operatorname{sen}^2 z = 1 - \cos(2z)$ para todo $z \in D(0, \pi)$.

8. Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es continua y f es holomorfa en $\mathbb{D} \setminus \{x + iy : y = 1/2\}$ entonces f es holomorfa en $\mathbb{D}$.

9. La función $f(z) = \frac{z^2 \cos z}{(z-2)^3}$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, tiene un polo triple en $z = 2$, y una singularidad esencial en ∞.

10. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y tiene la propiedad de que $|f(z)| = 3$ para todo z con $|z| = 1$, entonces $|f(z)| < 3$ para todo z con $|z| < 1$.

Este test supone 1,5 puntos de la nota del examen.

II) Demostrar que: *si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son holomorfas, donde Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$, y para algún $z_0 \in \Omega$ se tiene que $f(z_0) = g(z_0)$ y que $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f = g$ en todo Ω.* **Después, demostrar el principio de identidad de las funciones holomorfas:** *Sean Ω abierto conexo de $\mathbb{C}$, y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas. Supongamos que existe una sucesión $(z_n) \subset \Omega$ que converge a un punto $z_0 \in \Omega$, con $z_n \neq z_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y que $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f = g$ en todo Ω.*

Esta pregunta supone otros 3,5 puntos de la nota del examen.