ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 4. Espacios vectoriales euclideos y hermíticos III

1. Sea T un endomorfismo de un espacio euclídeo. Demuestra que $\ker(T^*) = [\mathrm{Im}(T)]^{\perp}$ y que $\mathrm{Im}(T^*) = [\ker(T)]^{\perp}$.

2. Calcula la aplicación adjunta de:
a) $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$, con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.
b) La aplicación $h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$ con el producto escalar de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2))) = x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

3. Diagonaliza en una base ortonormal cada una de las siguientes aplicaciones demostrando en primer lugar que son autoadjuntas:
a) $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $A(x, y) = (2x + y, 2y + x)$.
b) $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

4. Sea T una aplicación lineal de un espacio euclídeo E en sí mismo. Sea T' la adjunta de T. Demuestra que la aplicación $T + T'$ es autoadjunta.

5. ¿Son autoadjuntas las proyecciones ortogonales? ¿Y las simetrías ortogonales? ¿Son dichas proyecciones y simetrías aplicaciones ortogonales?

6. En un espacio vectorial euclideo E de dimensión 3 se considera la base ortonormal $\mathfrak{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $f : E \longrightarrow E$ una aplicación lineal definida por

$$3f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3\,, \quad 3f(\vec{u}_2) = \alpha\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3\,, \quad 3f(\vec{u}_3) = \beta\vec{u}_1 + \gamma\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3\,.$$

Halla α, β y γ para que f sea una aplicación ortogonal.

7. Prueba que las siguientes aplicaciones definidas en $\mathbb{R}^2$ son ortogonales, y describe sus subespacios invariantes no triviales.
a) $A(x, y) = \frac{1}{5}\,(4x + 3y\ ,\ 3x - 4y)$
b) $A(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-x - y\ ,\ x - y)$

8. Prueba que la aplicación $A(x, y, z) = \frac{1}{3}\,(2x + y - 2z\ ,\ x + 2y + 2z\ ,\ -2x + 2y - z)$ es una aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Identifícala y describe sus subespacios invariantes.

9. Prueba que las aplicaciones $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ están dadas por

$$\text{a)}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

son aplicaciones ortogonales. Identifica cada una de ellas e indica sus características principales.

10. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal dada por $T(x, y, z) = (y, -z, -x)$. Demuestra que T es ortogonal. Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en la que T tenga como matriz una forma de Jordan real.