

1º Teoría

2º @ $x=1$ es raíz de $p(x)$. Dividiendo $p(x)$ entre $x-1$ obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x-1) \underbrace{(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}_{q(x)}$$

Veamos que $q(x)$ es irreducible sobre \mathbb{Q} .

Vamos a usar el criterio modular con el primo $r=2$.

Sobre \mathbb{Z}_2 , $q(x)$ es un polinomio sin raíces por lo que no puede factorizarse como producto de un polinomio de grado 1 por otro de grado 3.

Por otro lado, el único polinomio irreducible

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

luego $q(x)$ no puede factorizarse en producto de 2 irreducibles de grado 2 sobre \mathbb{R} .
Por tanto $q(x)$ irreducible sobre \mathbb{R} .
Por el criterio modular, $q(x)$ irreducible sobre \mathbb{Q} .

Por tanto $p(x) = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ es la factorización en irreducibles de $p(x)$ sobre \mathbb{Q} (el primer factor es irreducible por ser de grado 1).

ⓑ No, la factorización de $p(x)$ sobre \mathbb{R} tiene que tener, al menos, 3 factores irreducibles, ya que los polinomios irreducibles sobre \mathbb{R} sólo pueden ser de grado 1 o 2.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white starburst shape behind it. Below the text is a horizontal orange bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\textcircled{3}^{\circ} \textcircled{a} \textcircled{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \text{ (tomando } b=0)$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

$$\textcircled{3} \text{ Si } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in A, \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & c \end{pmatrix} \in I$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b'c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

\textcircled{b} Definimos

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \longmapsto (a, c)$$

Veamos que f es un homomorfismo

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

① f respeta la suma:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) &= \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix}\right) = (a+a', c+c') = \\ &= (a, c) + (a', c') = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

② f respeta el producto:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & c \cdot c' \end{pmatrix}\right) = \\ &= (aa', cc') = (a, c) \cdot (a', c') = \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) \cdot f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Veamos que f es suprayectiva:

Dado $(a, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \exists M \in A / f(M) = (a, c)$:

tomamos $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Por el 1^{er} tma. de isomorfía, la función

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

L. J. J. J.

Falta ver que $\text{ker}(f) = \mathbb{I}$.

$$\text{ker}(f) = \{M \in A / f(M) = (0,0)\} =$$

$$= \{M \in A / (a,c) = (0,0)\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} / (a,c) = (0,0), b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{I}$$

Por tanto $f: A/\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{I}} \mapsto (a,c)$$

es isomorfismo de anillos.

4º (a) $p(x) = x^2 + 2$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}_5[x]$ por ser de grado 2 y no tener raíces en \mathbb{Z}_5 .

Por teoría sabemos que si $p(x)$ es irreducible

$\Rightarrow \mathbb{Z}_5[x]/(p(x))$ es cuerpo.

Veamos que $\forall f(x) \in \mathbb{Z}_5[x] \exists r(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Por el teorema de la división en $K[x]$ (K cuerpo)

$$\exists q(x), r(x) \in \mathbb{Z}_5[x] /$$

~~$$f(x) = q(x)(x^2+2) + r(x)$$~~

$$f(x) = q(x)(x^2+2) + r(x) \text{ y } \text{gr}(r(x)) \leq 1.$$

Tomando clases módulo $I = (x^2+2)$,
como $[x^2+2]_I = [0]_I$, tenemos

$$[f(x)]_I = [r(x)]_I$$

Por tanto hay, a lo sumo, tantas clases
como polinomios de grado ≤ 1 sobre \mathbb{Z}_5 .

Todos esos polinomios son de la forma

$$ax+b \text{ con } a, b \in \mathbb{Z}_5, \text{ luego hay } 25.$$

Falta ver que dos polinomios distintos
de grado ≤ 1 dan clases distintas.

La resta de dos de estos polinomios es
un polinomio de grado ≤ 1 no nulo,
por tanto no puede estar en I ya que

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

⑥ \mathbb{Z}_{25} no es cuerpo y que

$$5 \cdot 5 = 25 = 0 \pmod{25}$$

$$\begin{array}{cc} \# & \# \\ 0 & 0 \end{array}$$

por lo que \mathbb{Z}_{25} ~~no~~ tiene divisores de cero, esos elementos no son invertibles y por tanto \mathbb{Z}_{25} no es cuerpo.

Como A/I sí lo es, no son isomorfos.

⑦ Hallamos una id. de Bezout entre

$$x^2 + 2 \quad \text{y} \quad x + 4$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2 \quad | \quad x + 4 \\ - (x^2 + 4x) \quad \hline -4x + 2 \\ \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad x + 2 \\ - (x + 4) \quad \quad \quad \hline -2 = 3 \end{array}$$

$$3 = x^2 + 2 - (x+1)(x+4)$$

Tomando clases mod I

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$[1]_I = [-2x - 2]_I [x + 4]_I =$$

$$= [3x + 3]_I [x + 4]_I$$

luego $[x + 4]_I^{-1} = [3x + 3]_I$

5º a) I primo $\Rightarrow A/I$ es D.I.
A a.c.m.

Veamos que A/I es cuerpo.

~~Sea $a \in A$~~

Como A tiene $1_A \in A$, $I \neq A$ por ser primo. $\Rightarrow 1_A \notin I$ (si $1_A \in I \Rightarrow I = A$).

Por tanto $[1_A]_I$ es la unidad de A/I .

Veamos que si $[a]_I \neq [0]_I \Rightarrow$
 $\Rightarrow [a]_I$ invertible.

$$[a]_I = [a \cdot a]_I = [a]_I [a]_I$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

luego $[a]_I$ es invertible ya que

$$[a]_I \cdot [a]_I = [1]_I.$$

Por tanto A/I cuerpo. $\Rightarrow I$ maximal.

Ⓓ De hecho, en Ⓐ hemos visto que si $[a]_I \neq [0]_I$ entonces $[a]_I = [1]_I$

$$\text{luego } A/I = \{ [0]_I, [1]_I \}$$

tiene 2 elementos

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue triangle pointing downwards and an orange triangle pointing upwards, which together form a larger, irregular shape.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70