

COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) ¿Cuál es la envoltura convexa de un conjunto de puntos $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$? Indique cuál es su expresión y también represéntela gráficamente. Justifique la respuesta.

Solución:

2. (1 punto) ¿Cuánto vale en el punto $(1, 0, 0)$ el módulo de la torsión de la curva dada por la intersección de $x^2 + y + z = 1$ y $x - 2y = 1$?

Solución:

3. (1 punto) Sea S la curva de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, t^2 + \sin t, t^2 e^t).$$

Determine el vector tangente unitario, la recta tangente y el plano normal, en $t = 0$.

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow and orange gradient bar at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Solución (continuación):

4. (1 punto) Sea S la curva de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, t^2 + \sin t, t^2 e^t).$$

Determine el vector binormal y el plano osculador, en $t = 0$.

Solución:

EJERCICIOS

5. Sea la cicloide dada, para $t \in (0, 2\pi)$ por la parametrización

$$\mathbf{x}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

Se pide:

- (1 punto) Determinar su longitud de arco entre 0 y $t_0 \in (0, 2\pi)$.
 - (1 punto) Determinar el triedro de Frenet en un punto genérico $\mathbf{x}(t)$.
 - (1 punto) Determinar la curvatura, el centro de curvatura y la circunferencia osculadora en un punto genérico $\mathbf{x}(t)$.
6. Sea S la superficie parametrizada , para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, u^2 + v, u^2 - v).$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

para $t \in \mathbb{R}$. Calcule la curvatura normal en $\alpha(0)$.

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2 (EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge) k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE) (du)^2 + (eG - gE) dudv + (fG - gF) (dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70