E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2016. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida como

$$f(x,y) = (x - y^2, x^2 - y).$$

¿Tiene inversa local diferenciable en un entorno de $(0,1)$?

Solución: Comprobamos que cumple las condiciones del teorema de la función inversa en $(0,1)$. Como cada una de las componentes son infinitamente derivables, f es una función de clase infinito. El determinante de la matriz jacobiana en un punto (x,y) es

$$\det f'(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & -2y \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-2y)\,2x = 4xy - 1.$$

Podemos asegurar, por el teorema de la función inversa, que f tiene inversa local en un entorno de cada punto en donde este determinante es distinto de 0. Como en $(0,1)$ es distinto de 0, podemos afirmar que f tiene inversa local diferenciable en un entorno de $(0,1)$.

2. (1 PUNTO) Sea C la curva dada por la intersección de las superficies $z = x^2 + y, x - z = 2$. Determine la ecuación de su plano osculador en el punto $(4,0,2)$.

Solución: Es una curva plana (está contenida en el plano $x - z = -2$), y por eso, su plano osculador es este mismo plano: $x - z = 2$.

3. (1 PUNTO) Sea C una curva parametrizada por la longitud de arco y ecuación dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$, que está contenida en una superficie. Sea $\mathbf{k}(s)$ el vector curvatura de la curva. Defina, a partir de él, vector curvatura normal $\mathbf{k}_n(s)$ y vector curvatura geodésica $\mathbf{k}_g(s)$.

Solución: Podemos descomponer el vector curvatura $\mathbf{k}(s)$ como suma de dos vectores, uno tangente a la superficie (contenido en el espacio tangente a la superficie en cada punto) y otro perpendicular a ella, o que está en la recta normal a la superficie. El vector contenido en el espacio tangente es el vector curvatura geodésica $\mathbf{k}_g(s)$ y el vector contenido en la recta normal es el vector curvatura normal $\mathbf{k}_n(s)$.

4. (1 PUNTO) Considere el toro dado por la siguiente ecuación paramétrica.

$$\mathbf{x}(u,v) = ((\cos u + 2)\cos v, (\cos u + 2)\operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u).$$

Clasificar el punto $(2,0,1) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Solución: Determinamos los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= (-\operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u), & \mathbf{x}_u\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) &= (-1,0,0); \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= (-(\cos u + 2)\operatorname{sen} v, (\cos u + 2)\cos v, 0), & \mathbf{x}_v\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) &= (0,2,0). \end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{x}_u\left(\frac{\pi}{2},0\right)\times\mathbf{x}_v\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(0,0,-2)$ y, por tanto, $N\left(\frac{\pi}{2},0\right)=(0,0,-1)$ es normal a la superficie en $(2,0,1)$.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}_{uu}(u,v)=(-\cos u\cos v,-\cos u\operatorname{sen} v,-\operatorname{sen} u)\,, & \mathbf{x}_{uu}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=(0,0,-1); \\ \mathbf{x}_{uv}(u,v)=(\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v,-\operatorname{sen} u\cos v,0)\,, & \mathbf{x}_{uv}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=(0,-1,0); \\ \mathbf{x}_{vv}(u,v)=(-(\cos u+2)\cos v,-(\cos u+2)\operatorname{sen} v,0)\,, & \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=(-2,0,0). \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} e&=\mathbf{x}_{uu}\left(\tfrac{\pi}{2},0\right)\cdot N\left(\tfrac{\pi}{2},0\right)=(0,0,-1)\cdot(0,0,-1)=1; \\ f&=\mathbf{x}_{uv}\left(\tfrac{\pi}{2},0\right)\cdot N\left(\tfrac{\pi}{2},0\right)=(0,-1,0)\cdot(0,0,-1)=0; \\ g&=\mathbf{x}_{vv}\left(\tfrac{\pi}{2},0\right)\cdot N\left(\tfrac{\pi}{2},0\right)=(-2,0,0)\cdot(0,0,-1)=0. \end{aligned}$$

Así,

$$eg-f^2=0.$$

Por tanto, el punto $(2,0,1)$ es parabólico en el toro dado.

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea C la curva dada por la ecuación paramétrica:

$$\mathbf{x}(t)=2e^t(\cos t,\operatorname{sen} t),$$

para $t\in\mathbb{R}$. Es una espiral logarítmica.

(a) Obtenga la longitud de arco partiendo de $t=0$.

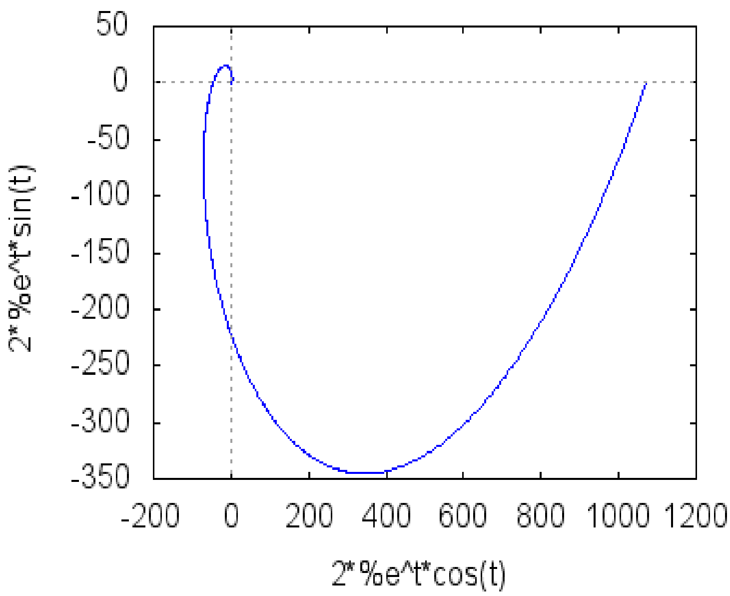
(b) Parametrícese por la longitud de arco.

(c) Obténgase la curvatura en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

Solución:

(a) La gráfica de la función es



Se ha representado en Maxima con la sentencias: `wxplot2d([['parametric, 2*exp(t)*cos(t),2*exp` `[t, -10, 2*%pi], [nticks, 300]]])$`
Sabemos que la longitud de arco es:

$$\begin{aligned} s\left(t\right) &= \int_0^t \left\|\mathbf{x}'(t)\right\| dt = \int_0^t 2e^t\sqrt{1+1}dt = 2\sqrt{2}e^t\Big|_0^t \\ &= 2\sqrt{2}e^t - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(b) A partir de esta expresión, podemos aprametrizar por la longitud de arco. Tenemos:

$$s = 2\sqrt{2}e^t - 2\sqrt{2}.$$

Tenemos el cambio de variable que debemos aplicar:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}e^t = s + 2\sqrt{2} &\Longrightarrow e^t = \frac{s}{2\sqrt{2}} + 1 \\ &\Longrightarrow t = \ln\left(\frac{s}{2\sqrt{2}} + 1\right). \end{aligned}$$

Así, la espiral logarítmica parametrizada por la longitud de arco es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\left(s\right) = \mathbf{x}\left(t\left(s\right)\right) &= 2e^{\ln\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}+1\right)}\left(\cos\left(\ln\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}+1\right)\right), \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}+1\right)\right)\right) \\ &= 2\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}+1\right)\left(\cos\left(\ln\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}+1\right)\right), \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}+1\right)\right)\right). \end{aligned}$$

(c) Como la curva está parametrizada por la longitud de arco, entonces el vector curvatura es $\mathbf{x}''\left(s\right)$ y la curvatura es su módulo.
Para esta curva, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'\left(s\right) = 2&\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\cos\left(\ln\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1\right)\right) - \frac{1}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1\right)\right),\right. \\ &\left.\frac{1}{4}\sqrt{2}\cos\left(\ln\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1\right)\right) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1\right)\right)\right), \\ \mathbf{x}''\left(s\right) = 2&\left(-\frac{1}{8}\frac{\cos\left(\ln\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1\right)\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1} - \frac{1}{8}\frac{\operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1\right)\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1},\right. \\ &\left.\frac{1}{8}\frac{\cos\left(\ln\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1\right)\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1} - \frac{1}{8}\frac{\operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1\right)\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1}\right). \end{aligned}$$

Nos pide la curvatura en $s = 0$, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''\left(0\right) &= 2\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \\ \left\|\mathbf{x}''\left(0\right)\right\| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vemos que estos cálculos son laboriosos. Podíamos haber partido de la expresión de la curva no parametrizada por la longirtud de arco, y aplicar

$$k\left(t\right) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\left\|d\mathbf{x}/dt\right\|^3}.$$

En esta curva, es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= 2e^t(\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + \cos t), \quad \mathbf{x}'(0) = (2,2),\\
\|\mathbf{x}'(0)\| &= \sqrt{8},\\
\mathbf{x}''(t) &= \left(-4e^t \operatorname{sen} t, 4e^t \cos t\right), \quad \mathbf{x}''(0) = (0,4)\\
k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}\\
&= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{8}^3} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

6. (3 PUNTOS) Sea C la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(0,1,1)$, $(1,2,0)$, $(1,0,2)$, $(0,-1,2)$.

(a) Escríbase su ecuación $\mathbf{x}(t)$, para $t \in [0,1]$.

(b) Determine la curvatura en el punto correspondiente a $t = 1$ partiendo de esta parametrización de la curva.

(c) Determine la recta normal principal en el punto correspondiente a $t = 1$ partiendo de esta parametrización de la curva.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

Solución:

(a) El polígono es

$$\mathbf{b}_0 = (0,1,1),\ \mathbf{b}_1 = (1,2,0),\ \mathbf{b}_2 = (1,0,2),\ \mathbf{b}_3 = (0,-1,2).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^4(t),$$

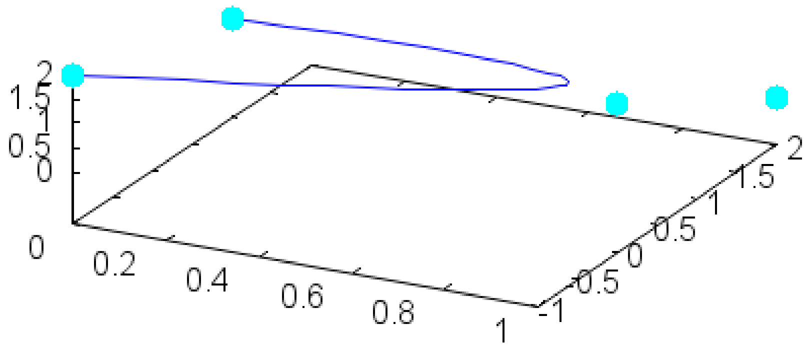
para los polinomios de Bernstein

$$B_i^3(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{3-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (0,1,1)B_0^3(t) + (1,2,0)B_1^3(t) + (1,0,2)B_2^3(t) + (0,-1,2)B_3^3(t)\\
&= (0,1,1)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t^0(1-t)^3 + (1,2,0)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t^1(1-t)^2 + (1,0,2)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t^2(1-t)\\
&+ (0,-1,2)\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} t^3(1-t)^0\\
&= (0,1,1)(1-t)^3 + 3(1,2,0)t(1-t)^2 + 3(1,0,2)t^2(1-t) + (0,-1,2)t^3\\
&= \left(3t(-t+1)^2 + 3t^2(-t+1), -t^3 + (-t+1)^3 + 6t(-t+1)^2, 2t^3 + (-t+1)^3 + 6t^2(-t+1)\right)\\
&= \left(3t - 3t^2, 4t^3 - 9t^2 + 3t + 1, -5t^3 + 9t^2 - 3t + 1\right).
\end{aligned}$$

La representación gráfica, con `Maxima`, de esta curva es



y se ha hecho con la sentencia `wxdraw3d(parametric(3*t-3*t^2,4*t^3-9*t^2+3*t+1,-5*t^3+9*t^2-`
`t,0,1), point_type=filled_circle, point_size=2, color=cyan,points(control),view=[40,2`

(b) Para determinar la curvatura $k(t)$ partimos de:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, $\mathbf{x}(t) = (3t - 3t^2, 4t^3 - 9t^2 + 3t + 1, -5t^3 + 9t^2 - 3t + 1)$ y tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \left(-6t + 3, -18t + 12t^2 + 3, 18t - 15t^2 - 3\right), \\
\mathbf{x}''(t) &= (-6, 24t - 18, -30t + 18), \\
\mathbf{x}'(1) &= (-3, -3, 0), \quad \mathbf{x}''(1) = (-6, 6, -12), \\
\|\mathbf{x}'(1)\| &= \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = 3\sqrt{2}, \\
\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & -12 \end{vmatrix} = (36, -36, -36), \\
\|\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)\| &= \sqrt{36^2 + (-36)^2 + (-36)^2} = 36\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$k(1) = \frac{36\sqrt{3}}{\left(3\sqrt{2}\right)^3} = \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}.$$

(c) El vector normal principal tiene la misma dirección y sentido que

$$(\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)) \times \mathbf{x}'(1).$$

En este caso, es

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)) \times \mathbf{x}'(1) &= (36, -36, -36) \times (-3, -3, 0) = (-108, 108, -216) \\
&= 108(-1, 1, -2).
\end{aligned}$$

Por tanto, la recta normal en $\mathbf{x}(1)$ es la recta que pasa por $\mathbf{x}(1) = (0, 1, 2) = \mathbf{b}_3$ y tiene por vector director a $(-1, -1, -2)$:

$$\alpha(\lambda) = (0, -1, 2) + \lambda(-1, 1, -2).$$