INGENIERÍA DE CONTROL

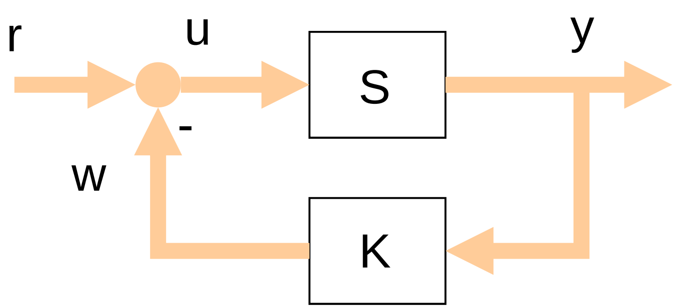
TEORÍA MODERNA DE CONTROL

CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO

ESTRUCTURAS COMPUESTAS

Realimentación de la salida:

Ecuaciones del sistema sin realimentar



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = Ky \\ u = r - w \end{cases}$$

$$y = Cx + D(r - w) = Cx + Dr - DKy \quad \Rightarrow \quad [I + DK]y = Cx + Dr$$

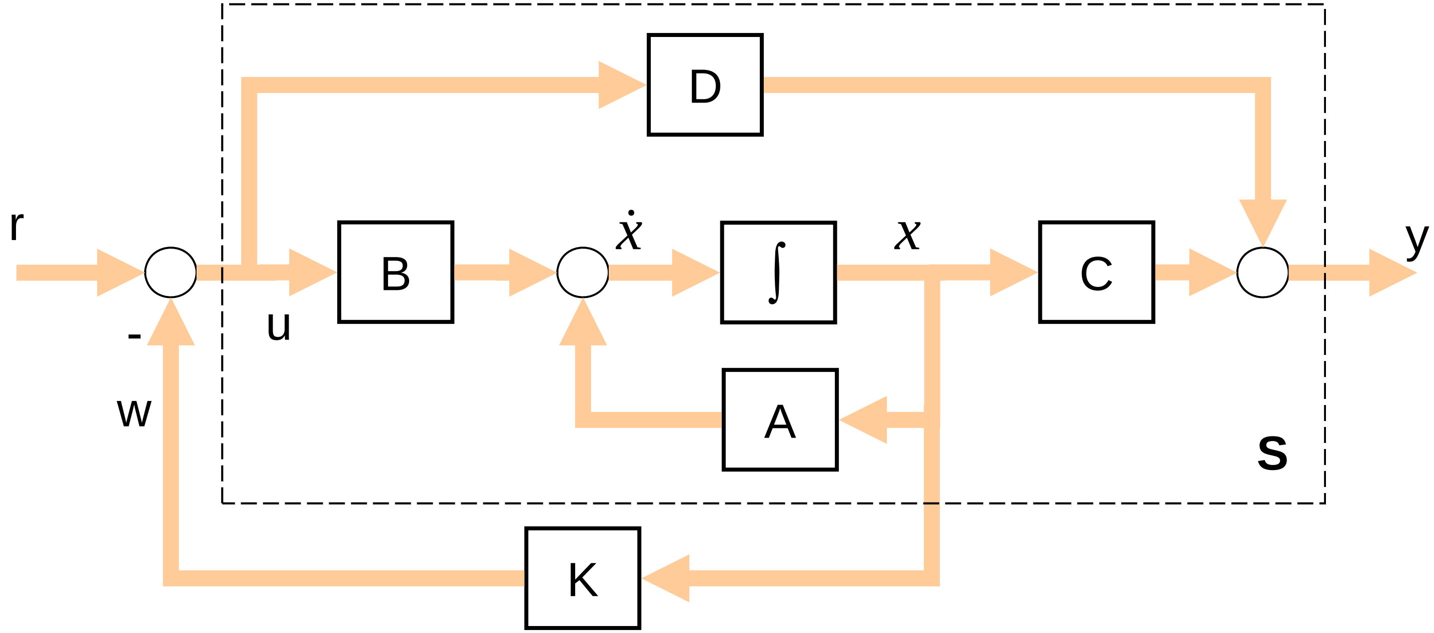
$$y = [I + DK]^{-1}Cx + [I + DK]^{-1}Dr$$

$$\dot{x} = Ax + B(r - Ky) = Ax + Br - BK[I + DK]^{-1}Cx - BK[I + DK]^{-1}Dr$$

$$\dot{x} = \left[A - BK[I + DK]^{-1}C\right]x + \left[B - BK[I + DK]^{-1}D\right]r$$

Si D=0 $\quad \dot{x} = [A - BKC]x + Br$

REALIMENTACIÓN DEL ESTADO



S:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

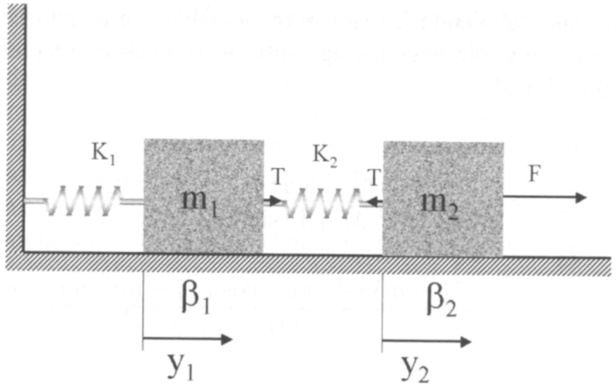
$$\begin{cases} w = Kx \\ u = r - w \end{cases}$$

$$\dot{x} = Ax + B(r - Kx) = [A - BK]x + Br$$
$$y = Cx + D[r - Kx] = [C - DK]x + Dr$$

Para D=0

$$\dot{x} = [A - BK]x + Br$$
$$y = Cx$$

EJEMPLO



$$T = m_1\ddot{y}_1 + \beta_1\dot{y}_1 + K_1 y_1$$
$$T = K_2(y_2 - y_1)$$
$$F = m_2\ddot{y}_2 + \beta_2\dot{y}_2 + T$$

$$(m_1 s^2 + \beta_1 s + K_1)y_1 = T$$
$$s[(m_1 s + \beta_1)y_1] = T - K_1 y_1$$
$$x_1 = (m_1 s + \beta_1)y_1$$
$$\dot{x}_1 = T - K_1 y_1$$

$$x_1 = (m_1 s + \beta_1)y_1$$
$$s(m_1 y_1) = x_1 - \beta_1 y_1$$
$$x_2 = m_1 y_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - \beta_1 y_1$$

$$F = m_2\ddot{y}_2 + \beta_2\dot{y}_2 + T$$
$$(m_2 s^2 + \beta_2 s)y_2 = F - T$$
$$s(m_2 s + \beta_2)y_2 = F - T$$
$$x_3 = (m_2 s + \beta_2)y_2$$
$$\dot{x}_3 = F - T$$

$$x_3 = (m_2 s + \beta_2)y_2$$
$$s(m_2 y_2) = x_3 - \beta_2 y_2$$
$$x_4 = m_2 y_2$$
$$\dot{x}_4 = x_3 - \beta_2 y_2$$

$$\dot{x}_1 = T - K_1 y_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - \beta_1 y_1$$
$$\dot{x}_3 = F - T$$
$$\dot{x}_4 = x_3 - \beta_2 y_2$$

$$T = K_2(y_2 - y_1)$$
$$x_2 = m_1 y_1$$
$$x_4 = m_2 y_2$$

EJEMPLO

$$T = K_2(y_2 - y_1)$$
$$x_2 = m_1 y_1$$
$$x_4 = m_2 y_2$$

$$y_1 = \frac{1}{m_1} x_2$$
$$y_2 = \frac{1}{m_2} x_4$$

$$T = \frac{K_2}{m_2} x_4 - \frac{K_2}{m_1} x_2$$

$$\dot{x}_1 = T - K_1 y_1$$
$$\dot{x}_1 = \frac{K_2}{m_2} x_4 - \frac{K_2}{m_1} x_2 - \frac{K_1}{m_1} x_2 =$$
$$-\frac{K_1 + K_2}{m_1} x_2 + \frac{K_2}{m_2} x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \beta_1 y_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - \frac{\beta_1}{m_1} x_2$$

$$\dot{x}_3 = F - T$$
$$\dot{x}_3 = -\frac{K_2}{m_1} x_2 + \frac{K_2}{m_2} x_4 + F$$

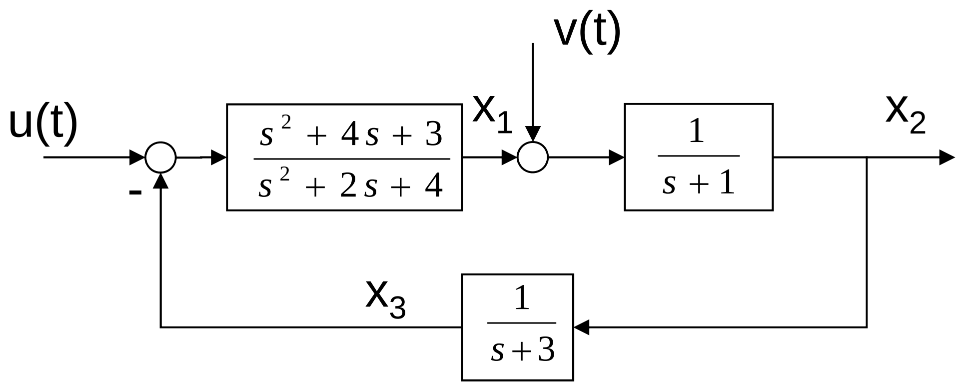
$$\dot{x}_4 = x_3 - \beta_2 y_2$$
$$\dot{x}_4 = x_3 - \frac{\beta_2}{m_2} x_4$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{K_1 + K_2}{m_1} & 0 & \frac{K_2}{m_2} \\ 1 & -\frac{\beta_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_2}{m_1} & 0 & \frac{K_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\beta_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO

Obtener el modelo de estado:



EJERCICIO

Movimiento de una antena para seguimiento

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) = Pm(t)$$

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) = e(t)Km$$

Pm par motor
Km cte del motor

$$s^2 J\theta(t) + sB\theta(t) = e(t)Km$$

$$s\left(sJ\theta(t) + B\theta(t)\right) = e(t)Km$$

$$x_1 = sJ\theta(t) + B\theta(t)$$

$$\dot{x}_1 = e(t)Km$$

$$x_2 = J\theta(t)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - B\theta(t)$$

$$y = \theta(t)$$

$$x_2 = Jy \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{J}x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - By = x_1 - \frac{B}{J}x_2$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -\frac{B}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}Km\\ 0\end{bmatrix}e(t) \qquad y = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Otra opción:

$$x_1 = \theta(t) \qquad \dot{x}_1 = x_2 \qquad y = x_1$$

$$x_2 = \dot{\theta}(t) \qquad J\dot{x}_2 + Bx_2 = e(t)Km \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = -\frac{B}{J}x_2 - \frac{Km}{J}e(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{B}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -\frac{Km}{J}\end{bmatrix}e(t)$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO

- Conocer la evolución del estado requiere resolver la ecución diferencial.
- Los métodos de resolución son variados, recurriendo incluso a soluciones numéricas aproximadas cuando no es posible obtener una expresión analítica global.
- Afrontaremos el caso lineal, aunque éste factor no es obligado debido al sistema de representación en variables de estado sino a la probabilidad de solución analítica del problema matemático.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Solución global = Solución general de la homogénea+Solución particular completa

Solución de la homogénea: Evolución libre del sistema

Solución de la completa: Evolución forzada del sistema

SOLUCIÓN DE LA HOMOGÉNEA

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

Método de integración por aproximaciones sucesivas de Peano-Baker:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad x(t_0) = x_0$$

$$\varphi_0 = x_0$$

$$\varphi_k = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi_{k-1}(\tau), u(\tau), \tau) d\tau$$

Solución: $x(t) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k(t)$

SOLUCIÓN DE LA HOMOGÉNEA II

Caso concreto:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau) x_0 d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau x_0$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\left[x_0 + \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) d\tau_1 x_0 \right] d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau) \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) d\tau_1 d\tau x_0$$

$$\varphi_2 = \left[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau) \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) d\tau_1 d\tau \right] x_0$$

$$x(t) = \phi(t, t_0) x_0 \qquad \phi(t, t_0) \quad \text{Matriz de transición}$$

$$\phi(t, t_0) = \lim_{k \to \infty} \left[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau) \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \cdots + \int_{t_0}^{t} A(\tau) \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) \cdots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} A(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1 d\tau \right]$$

Si el producto de $A(t)$ y $\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau$ es conmutativo: $\quad \phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau}$

CASOS PARTICULARES

La matriz A(t) es diagonal:

$$\phi(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}=e^{\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}a_{11}(\tau) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & a_{nn}(\tau)\end{bmatrix}d\tau}=e^{\begin{bmatrix}\int_{t_0}^{t}a_{11}(\tau)d\tau & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \int_{t_0}^{t}a_{nn}(\tau)d\tau\end{bmatrix}}$$

$$\phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}e^{\int_{t_0}^{t}a_{11}(\tau)d\tau} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & e^{\int_{t_0}^{t}a_{nn}(\tau)d\tau}\end{bmatrix}$$

A(t) factorizable: $A(t)=M\alpha(t)$

$$\phi(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}=e^{M\int_{t_0}^{t}\alpha(\tau)d\tau}$$

CASOS PARTICULARES

Matriz A es invariante:

$$\phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} = e^{A\int_{t_0}^{t} d\tau} = e^{A(t-t_0)} = \phi(t-t_0)$$

La matriz A es un escalar:

$$\phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE TRANSICIÓN

Derivación respecto del tiempo:

$$\frac{d\phi(t,t_0)}{dt} = A(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau + \cdots = A(t)\phi(t,t_0)$$

Valor en t$_o$:

$$x(t_0) = \phi(t_0,t_0)x(t_0) \quad \Rightarrow \quad \phi(t_0,t_0) = I$$

Transitividad de la solución:

$$x(t_2) = \phi(t_2,t_0)x(t_0) \qquad x(t_2) = \phi(t_2,t_1)x(t_1) = \phi(t_2,t_1)\phi(t_1,t_0)x(t_0)$$

$$x(t_1) = \phi(t_1,t_0)x(t_0) \qquad \phi(t_2,t_0) = \phi(t_2,t_1)\phi(t_1,t_0)$$

PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE TRANSICIÓN

Inversión de tiempos:

$$\phi(t_0,t_0)=\phi(t_0,t_1)\phi(t_1,t_0) \quad \Rightarrow \quad \phi(t_0,t_1)=\phi^{-1}(t_1,t_0)$$

Si A invariante:

$$\phi(-t)=e^{-At}=\left(e^{At}\right)^{-1}=\phi^{-1}(t)$$

Cambio de representación:

$$x(t)=\phi(t,t_0)x_0 \qquad x(t)=T(t)\hat{x}(t)$$

$$T(t)\hat{x}(t)=\phi(t,t_0)T(t_0)\hat{x}(t_0)$$

$$\hat{x}(t)=T^{-1}(t)\phi(t,t_0)T(t_0)\hat{x}(t_0) \quad \Rightarrow \quad \hat{\phi}(t,t_0)=T^{-1}(t)\phi(t,t_0)T(t_0)$$

SOLUCIÓN DE LA COMPLETA

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Método de variación de las constantes:

$$x(t) = \phi(t,t_0)z(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{\phi}(t,t_0)z(t) + \phi(t,t_0)\dot{z}(t) = A(t)\phi(t,t_0)z(t) + B(t)u(t)$$

$$\phi(t,t_0)\dot{z}(t) + \underbrace{\left[\dot{\phi}(t,t_0) - A(t)\phi(t,t_0)\right]}_{0} z(t) = B(t)u(t)$$

$$\dot{z}(t) = \phi^{-1}(t,t_0)B(t)u(t)$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(\tau,t_0)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$z(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

SOLUCIÓN DE LA COMPLETA II

$$x(t) = \phi(t,t_0)z(t)$$

$$z(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$x(t) = \phi(t,t_0)x(t_0) + \phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$\boxed{x(t) = \phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau}$$

Evolución libre: $\phi(t,t_0)x(t_0)$

Evolución forzada: $\int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$

EJERCICIO

Determinar la evolución del sistema ante entrada escalón:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \qquad \begin{matrix} t_0 = 1 \\ x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^t \end{matrix}$$

SOLUCIÓN

$$x(t)=\phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \qquad \phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}=\begin{bmatrix} e^{t-t_0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t,1)x_0=\begin{bmatrix} e^{t-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(t-1)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{t-1} \\ -e^{-2(t-1)} \\ 2e^{-(t-1)} \end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} e^{t-1} \\ -e^{-2(t-1)} \\ 2e^{-(t-1)} \end{bmatrix}+\int_{1}^{t}\begin{bmatrix} e^{t-\tau} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix} 2e^{t-1}-1 \\ -e^{-2(t-1)} \\ 3e^{-(t-1)}-1 \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE JORDAN

Para los casos en que: $A(t) = M\alpha(t)$ ya hemos visto que:

$$\phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} = e^{M\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)d\tau}$$

El método de Jordan consiste en hacer una transformación:

$$x(t) = T\hat{x}(t) \qquad \hat{x}(t) = T^{-1}x(t)$$

Transformando a la matriz del sistema para que sea diagonal en cajas de Jordan (forma canónica de Jordan):

$$\hat{A}(t) = \hat{M}(t)\alpha(t) = T^{-1}A(t)T = T^{-1}MT\alpha(t)$$

$$\phi(t,t_0) = T\hat{\phi}(t,t_0)T^{-1}$$

Si todos los autovalores de A(t) son distintos, T se compone por columnas de los vectores propios asociados a los autovalores.

EJEMPLO

Calcular la matriz de transición del sistema definido por la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Autovalores: $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -4$

$$v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{\phi}(t,t_0) = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 2 & e^{-4(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t,t_0) = T\hat{\phi}(t,t_0)T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(2e^{-(t-t_0)} + e^{-4(t-t_0)}\right) & \frac{1}{3}\left(e^{-(t-t_0)} - e^{-4(t-t_0)}\right) \\ \frac{2}{3}\left(e^{-(t-t_0)} - e^{-4(t-t_0)}\right) & \frac{1}{3}\left(e^{-(t-t_0)} - 2e^{-4(t-t_0)}\right) \end{bmatrix}$$

EJERCICIO

Hallar la matriz de transición del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix}\lambda+3 & -1 & 0\\ -1 & \lambda+3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+3\end{bmatrix}=(\lambda+3)^3-(\lambda+3)=(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+4) \qquad \begin{cases}\lambda_1=-2\\ \lambda_2=-3\\ \lambda_3=-4\end{cases}$$

$$\lambda=-2 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}v_{11}=v_{12}\\ v_{13}=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda=-3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\\ v_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}v_{22}=0\\ v_{21}=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad v_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda=-4 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{31}\\ v_{32}\\ v_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}v_{31}=-v_{32}\\ v_{33}=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad v_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\phi(t,t_0)=T\hat{\phi}(t,t_0)T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{-2t}+e^{-4t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-2t}-e^{-4t}\right) & 0\\ \frac{1}{2}\left(e^{-2t}-e^{-4t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-2t}+e^{-4t}\right) & 0\\ 0 & 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}$$

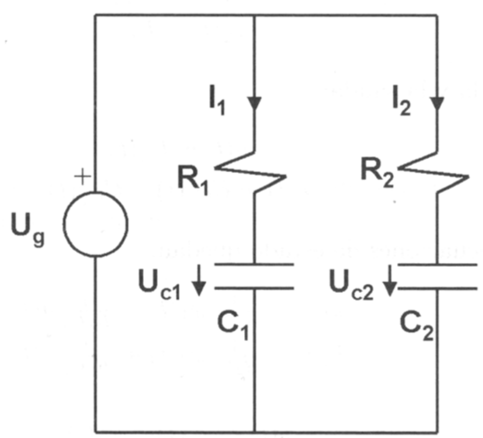
EJERCICIO

Para el sistema planteado determinar la evolución de la tensión en cada condensador, así como la diferencia entre ambas a partir del instante $t_0=0$

Considerando C_1:

$$C_1 = 10^{-6} F$$

$$C_1 = 2 \cdot 10^{-6} F$$



$$R_1 = 100K \quad R_2 = 200K \quad C_2 = 10^{-6} F$$

Condiciones iniciales:

$$Uc_1 = 2V \quad Uc_2 = -1V$$

Para cada valor de C_1 considerar las entradas:

- Entrada nula.
- Escalón unitario a partir de t_0.