

Cálculo I

Bloque III: Integración impropia y numérica, sucesiones y series.

Rafael Bravo de la Parra

U. D. Matemáticas, Universidad de Alcalá

Curso 2019-20

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Índice

- 1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.
- 2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
- 3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized font. The "99" is larger and more prominent. The text is white with a blue outline, set against a background of overlapping light blue and orange shapes.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.
 - Integración numérica
 - Integrales impropias
- 2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
- 3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized font. The "Cartagena" part is in a light blue color, and the "99" is in a darker blue. The text is set against a background of light blue and orange geometric shapes.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Integración numérica: Regla del Punto Medio

Cálculo aproximado de $\int_a^b f(x) dx$

$[a, b]$ se divide en n subintervalos de longitud $h = (b - a)/n$,

$[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$), con $x_i = a + ih$.

Denotamos por $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$, el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Regla del Punto Medio

$$M_n = hf(\bar{x}_1) + \dots + hf(\bar{x}_n) = h \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i).$$

Fórmula del error: Suponiendo que $|f''(x)| \leq K$ para $x \in [a, b]$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - M_n \right| = E_M \leq \frac{K}{24} h^2 (b - a)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Integración numérica: Regla del Trapecio

Cálculo aproximado de $\int_a^b f(x) dx$

$[a, b]$ se divide en n subintervalos de longitud $h = (b - a)/n$,

$[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$), con $x_i = a + ih$.

Regla del Trapecio

$$T_n = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \dots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

$$T_n = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Fórmula del error: Suponiendo que $|f''(x)| \leq K$ para $x \in [a, b]$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Integración numérica: Regla de Simpson

Cálculo aproximado de $\int_a^b f(x) dx$

$[a, b]$ se divide en n , **número par**, subintervalos de longitud $h = (b - a)/n$,
 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$), con $x_i = a + ih$.

Regla de Simpson

Siendo i par se hace la siguiente aproximación de la integral entre x_i y x_{i+2} :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))$$

que se basa en la interpolación cuadrática. La fórmula para el intervalo $[a, b]$ es:

$$S_n = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Fórmula del error: Suponiendo que $|f^{(4)}(x)| \leq K$ para $x \in [a, b]$:

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Índice

- 1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.
 - Integración numérica
 - Integrales impropias
- 2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
- 3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized font. The "Cartagena" part is in a light blue color, and the "99" is in a darker blue. The text is set against a background of overlapping light blue and orange geometric shapes.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Integrales impropias: intervalos no acotados

Definición (Integrales impropias: $\int_a^\infty f(x) dx$, $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ e $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$.)

- ❶ Si f es continua en $[a, \infty)$ entonces si el límite existe (número real):

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

- ❷ Si f es continua en $(-\infty, b]$ entonces si el límite existe (número real):

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

Si existen los límites las integrales $\int_a^\infty f(x) dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ se dicen **convergentes** y en caso contrario **divergentes**.

- ❸ Si $\int_a^\infty f(x) dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ son convergentes para algún $a \in \mathbb{R}$ se define:

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Integrales impropias: funciones no acotadas

Definición (Integrales impropias: funciones no acotadas.)

- ❶ Sea f continua en $[a, b)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$. Si existe el límite (número real) se define:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx.$$

- ❷ Sea f continua en $(a, b]$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$. Si existe el límite (número real) se define:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

Si existen los límites la integral se dice **convergente** y en caso contrario **divergente**.

- ❸ Sea f tal que $\lim_{x \rightarrow c^+} |f(x)| = \infty$ o $\lim_{x \rightarrow c^-} |f(x)| = \infty$ para algún $c \in (a, b)$, f es continua en $[a, c) \cup (c, b]$ e $\int_a^c f(x) dx$ e $\int_c^b f(x) dx$ son ambas convergentes. Entonces se define:

CLASES PARTICULARES Y GRUPOS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Integrales impropias: Criterio de comparación

Teorema

Sean f y g dos funciones continuas en $[a, \infty)$ tales que

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \text{ para todo } x \in [a, \infty)$$

Se tiene entonces:

- ❶ Si $\int_a^\infty f(x) dx$ es convergente entonces $\int_a^\infty g(x) dx$ es convergente.
- ❷ Si $\int_a^\infty g(x) dx$ es divergente entonces $\int_a^\infty f(x) dx$ es divergente.

Teoremas análogos se pueden enunciar para los demás tipos de

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.
- 2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
- 3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized font. The "99" is larger and more prominent. The text is white with a blue outline, set against a background of overlapping blue and orange geometric shapes.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.
- 2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
 - Sucesiones
 - Series numéricas.
- 3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized font. The "Cartagena" part is in a light blue color, and the "99" is in a darker blue. Below the text is a horizontal bar with a gradient from light blue to orange.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Sucesiones

Definición

Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Notación: La sucesión de **términos** $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ se denota $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición (Sucesión convergente)

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ **converge** a un número real L si podemos acercar tanto como queramos los términos a_n a L sin más que coger n suficientemente grande. El número L se denomina **límite** de la sucesión. Si la sucesión $\{a_n\}$ no es **convergente** se dice que es

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Límites de sucesiones y operaciones.

Teorema

Supongamos que existen los límites $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2$. Se tiene entonces

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$.
- Si $L_2 \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$.

Teorema

Sea $\{a_n\}$ una sucesión y f una función tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \geq 1$. Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Límites de sucesiones

Definición (Límites infinitos)

La sucesión $\{a_n\}$ **diverge** a ∞ ($-\infty$) si podemos hacer tan grandes (*grandes negativos*) como queramos los términos a_n sin más que coger n suficientemente grande.

Notación: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ($-\infty$).

Teorema

Sea $\{a_n\}$ una sucesión y f una sucesión tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \geq 1$. Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty \text{ } (-\infty) \quad \text{entonces} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty \text{ } (-\infty).$$

Teorema

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n \leq b_n$ para todos los n mayores que algún índice N

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Sucesiones monótonas.

Definición (Sucesión monótona)

Una sucesión $\{a_n\}$ se denomina

creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Una sucesión se denomina **monótona** si es creciente o decreciente.

Definición (Sucesión acotada)

Una sucesión $\{a_n\}$ se denomina acotada superiormente, acotada inferiormente y acotada si lo es, respectivamente, el conjunto formado por todos sus términos, $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.
- 2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
 - Sucesiones
 - Series numéricas.
- 3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized font. The "Cartagena" part is in a light blue color, and the "99" is in a darker blue. The text is set against a background of light blue and yellow geometric shapes, possibly representing a map or a stylized 'C'.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series numéricas.

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ utilizamos la notación $\sum_{n=p}^q a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$ con $p \leq q$.

A $\{a_n\}$ le asociamos la sucesión $\{s_n\}$ donde $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Definición (Serie)

- Para la sucesión $\{s_n\}$ se utiliza también la expresión simbólica $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ o abreviadamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ o } \sum a_n,$$

que se denomina **serie infinita** o simplemente **serie**.

- A los números $a_1, a_2, a_3, \dots$ se les denomina **términos de la serie** o **términos**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES Y GRUPOS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series numéricas: convergencia.

Definición (Convergencia de una serie)

Se dice que la **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** si existe el límite de la sucesión de sus sumas parciales, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ y, en este caso, a s se le denomina

suma de la serie y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Si $\{s_n\}$ no tiene un límite finito se dice que la **serie diverge**.

Series geométricas

Una **serie geométrica** de razón r y primer elemento $a \neq 0$ es de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = a + a r + a r^2 + \cdots + a r^n + \cdots$$

Teorema (Convergencia de las series geométricas)

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Series numéricas: convergencia.

Teorema (Condición necesaria de convergencia de una serie.)

Si la serie $\sum a_n$ es convergente entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Corolario

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no existe o es $\neq 0$ entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ no implica la convergencia de la serie

La **serie armónica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Teorema

Si las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes, con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, y c es un número se tiene que:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series de términos positivos.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice de términos positivos si $a_n \geq 0$ para todo $n = 1, 2, \dots$

Teorema (Criterio de la integral)

Sea $f(x)$ una función continua, positiva y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$ tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \geq 1$.

- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es divergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

El teorema sigue siendo válido si se cumplen las hipótesis en un intervalo $[\alpha, \infty)$ para algún $\alpha > 1$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series de términos positivos.

Criterio de comparación directa.

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$.

❶ Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

❷ Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

Criterio de comparación en el límite.

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Si

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

La comparación se establece con las series p o con las series geométricas.

Series de términos positivos.

Teorema (Criterio del cociente)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c.$$

- Si $c < 1$ entonces la serie converge.
- Si $c > 1$, o si $c = \infty$, entonces la serie diverge.
- Si $c = 1$ el criterio no decide.

Teorema (Criterio de la raíz)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Si c = 1 el criterio no decide.

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el

Rafael Bravo de la Parra

entonces, incitarlo lesiona bienes o derechos

Series alternadas.

Una **serie alternada** es aquella cuyos términos son positivos y negativos alternativamente.

Criterio de convergencia.

Sea la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, con $a_n \geq 0$, que verifica:

- ❶ $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n (la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente).
- ❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (condición necesaria de convergencia).

entonces la serie converge.

Además si s es la suma de la serie se tiene que el residuo R_n al estimarla a través de s_n verifica que

$$|R_n| = |s - s_n| \leq a_{n+1}.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Convergencia absoluta.

Definición (Convergencia absoluta)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Definición (Convergencia condicionada)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es **condicionalmente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente pero la serie de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Convergencia absoluta.

Teorema (Criterio del cociente)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no nulos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = c.$$

- Si $c < 1$ entonces la serie es absolutamente convergente.
- Si $c > 1$, o si $c = \infty$, entonces la serie es divergente.
- Si $c = 1$ el criterio no decide.

Teorema (Criterio de la raíz)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no nulos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c.$$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

- Si $c = 1$ el criterio no decide.

Convergencia y divergencia de series.

Estrategia para analizar la convergencia/divergencia de la serie $\sum a_n$

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$? Si no es así, la serie es divergente.
- 2 ¿Es una serie de términos positivos (o negativos)? Si lo es:
 - i. ¿Es una serie geométrica o una serie p? Si lo es, se aplica el resultado de convergencia/divergencia correspondiente.
 - ii. ¿Es una serie comparable directamente o en el límite con una geométrica o una serie p? Si lo es, se aplica el criterio correspondiente.
 - iii. ¿Se le puede aplicar el criterio del cociente, de la raíz o de la integral? Si alguno es concluyente se aplica.
- 3 ¿Es una serie alternada? Si lo es y ya se ha comprobado que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ falta asegurarse que $\{|a_n|\}$ es decreciente a partir de un cierto n_0 para asegurar la convergencia.
- 4 Si la serie no se puede considerar de términos positivos o negativos, es decir, tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos, no necesariamente alternados, podemos estudiar su convergencia absoluta a través de los criterios de series de términos positivos (incluidos los criterios del cociente y la raíz para este tipo de convergencia). Si la serie

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.
- 2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
- 3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized font. The "99" is larger and more prominent. The text is white with a blue outline, set against a background of overlapping blue and orange geometric shapes.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.
- 2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
- 3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.
 - Series de potencias
 - Series de Taylor

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, bold font. The "99" is significantly larger and more prominent than "Cartagena". The text is white with a blue outline, set against a background of overlapping blue and orange geometric shapes.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series de potencias.

Series de potencias.

Una **serie de potencias** tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

donde x es una variable y las constantes c_n se denominan **coeficientes de la serie**.

De forma más general a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ se denomina **serie de potencias en $x - a$** o **serie de potencias con centro en a** .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series de potencias.

Convergencia de las series de potencias.

Teorema (Convergencia de una serie de potencias)

En una serie de potencias, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, se da una de las siguientes alternativas de convergencia:

- ❶ La serie sólo converge cuando $x = a$.
- ❷ La serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.
- ❸ Existe un $R > 0$ tal que la serie
 - Converge absolutamente si $|x - a| < R$, $x \in (a - R, a + R)$.
 - Diverge si $|x - a| > R$, $x \in (-\infty, a - R) \cup (a + R, \infty)$.

Al número R se le denomina radio de convergencia de la serie de potencias y puede ser:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series de potencias: Diferenciación e Integración.

Teorema (Diferenciación e integración término a término)

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ con radio de convergencia R .

La función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es diferenciable y, por tanto, continua e integrable en el intervalo $(a-R, a+R)$. Además:

$$\textcircled{1} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}.$$

$$\textcircled{2} \quad \int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

siendo los radios de convergencia de ambas series iguales a R .

Corolario

La función $f(x)$ tiene derivada de orden n para todo $n \in \mathbb{N}$ en el intervalo $(a-R, a+R)$,
siendo

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

$n=n$

Rafael Bravo de la Parra

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
documento, si esta lesiona bienes o derechos de terceros.

Índice

- 1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.
- 2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
- 3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.
 - Series de potencias
 - Series de Taylor

The logo for Cartagena99, featuring the text "Cartagena99" in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Polinomios y Series de Taylor

Definición (Polinomio de Taylor)

Sea f una función derivable n veces en el punto a . Se define su polinomio de Taylor de grado n con centro en a como

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En el caso de $a = 0$ se denominan polinomios de Maclaurin.

Definición (Serie de Taylor)

Sea f una función que posee derivada de orden n para todo $n \in \mathbb{N}$ en el punto a . Se define su serie de Taylor con centro en a como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Fórmula de Taylor con resto

Definición

Sea $p_n(x)$ el polinomio de Taylor de grado n con centro en a de la función f . Se denomina resto n -ésimo de Taylor con centro en a de la función f a:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Teorema (Teorema de Taylor)

Sea f una función $n + 1$ veces derivable en un intervalo abierto I que contiene al punto a .

Entonces para cada $x \in I$ existe un punto c , que depende de x y de n , situado entre a y x tal que:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{(n+1)}.$$

o también

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aproximación de funciones

Teorema

Sea f una función que posee derivada de orden n para todo $n \in \mathbb{N}$ en el punto a . Se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \text{ si y solo si } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Series de Maclaurin con sus intervalos de convergencia

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1, 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (-\infty, \infty)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (-\infty, \infty)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series de Taylor de funciones definidas mediante series de potencias

Teorema

Sea f una función que admite un desarrollo en serie de potencias en a ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ para } |x-a| < R$$

entonces los coeficientes verifican

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

En su intervalo de convergencia, una serie de potencias es la serie

Cartagena99

CLASAS O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70