



# Programación de sistemas

## Árboles

Julio Villena Román

<jvillena@it.uc3m.es>

MATERIALES CREADOS EN EL TRABAJO DE DIFERENTES AUTORES:

Carlos Delgado Kloos, M. Carmen Fernández Panadero.

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Contenidos

- ❖ **Concepto de árbol**
- ❖ **Terminología**
- ❖ **Implementación**
- ❖ **Casos especiales**
  - Árboles binarios de búsqueda
  - Montículos (*heaps*)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Cita

*“The structure of concepts is formally called a **hierarchy** and since ancient times has been a basic structure for all Western knowledge. Kingdoms, empires, churches, armies have all been structured into hierarchies. Tables of contents of reference material are so structured, mechanical assemblies, computer software, all scientific and technical knowledge is so structured...”*

Robert M. Pirsig:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Concepto de árbol



Un **árbol** es una estructura de datos **no lineal** que almacena los elementos **jerárquicamente**

Cartagena99

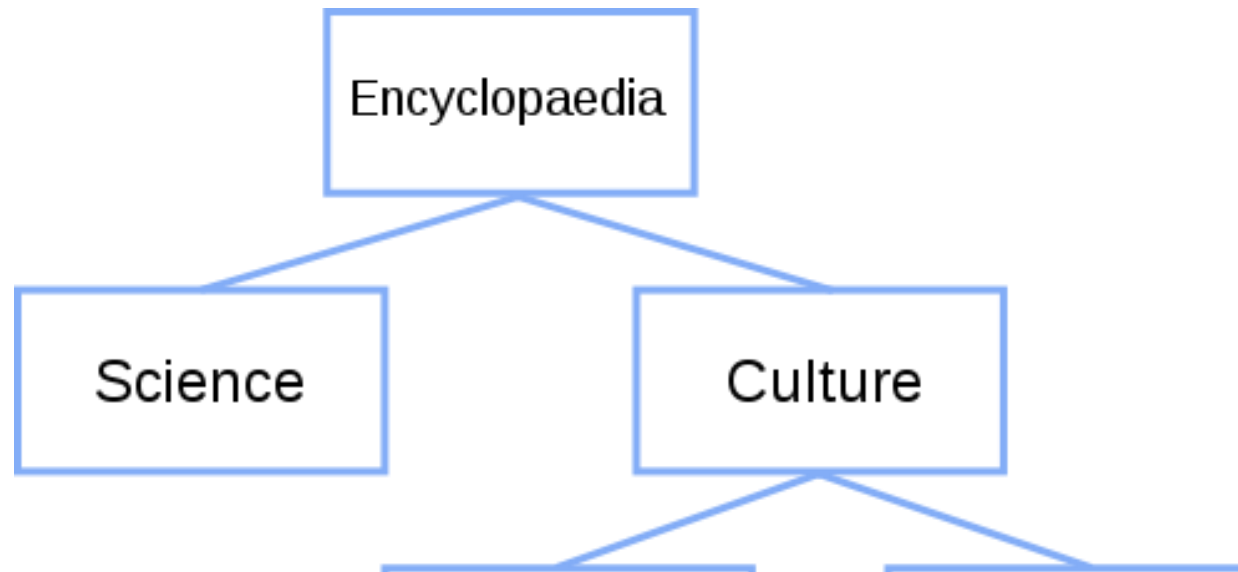
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ejemplos

## 1. Clasificación de la información en una enciclopedia



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

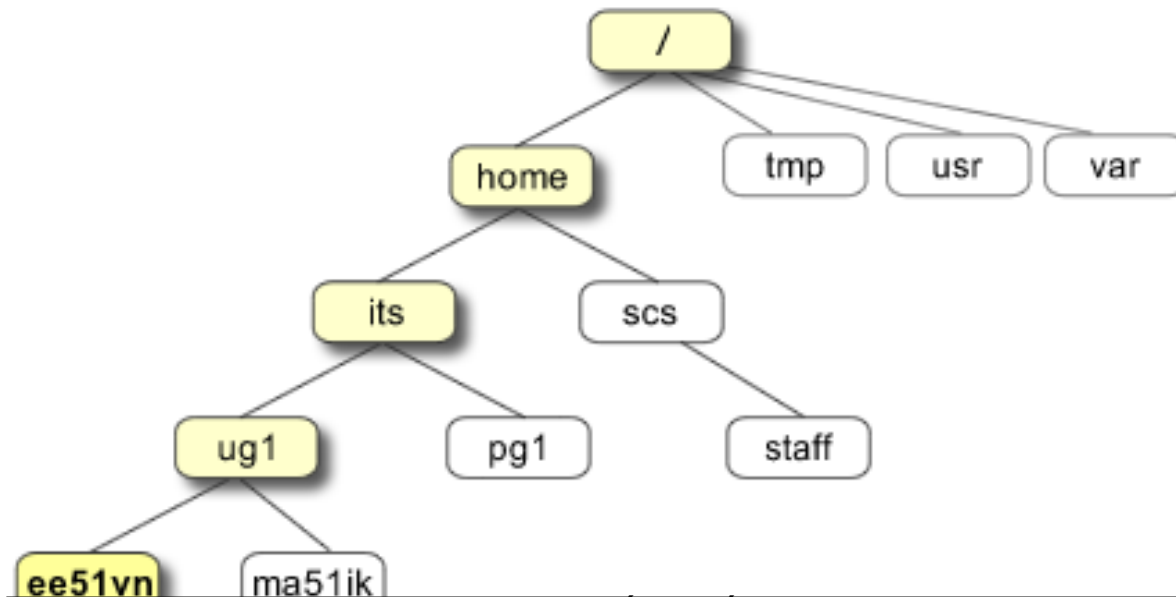
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Ejemplos

## 2. Sistema de ficheros



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

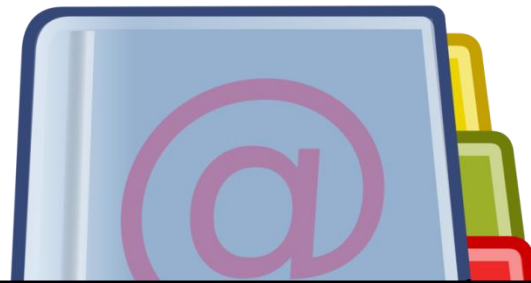
# Ejemplos

**3. Estructura organizativa de una empresa**

**4. Estructura de rangos del ejército**

**5. Estructura de un libro**

...



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Definición no recursiva

- Un árbol consiste en un conjunto de **nodos** y un conjunto de **aristas**, de forma que:
  - Se distingue un nodo llamado **raíz**
  - A cada nodo h (**hijo**), excepto la raíz, le llega una arista de otro nodo p (**padre**)
  - Para cada nodo hay un **camino** (secuencia de aristas) único desde la raíz
  - Los nodos que no tienen hijos se denominan

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

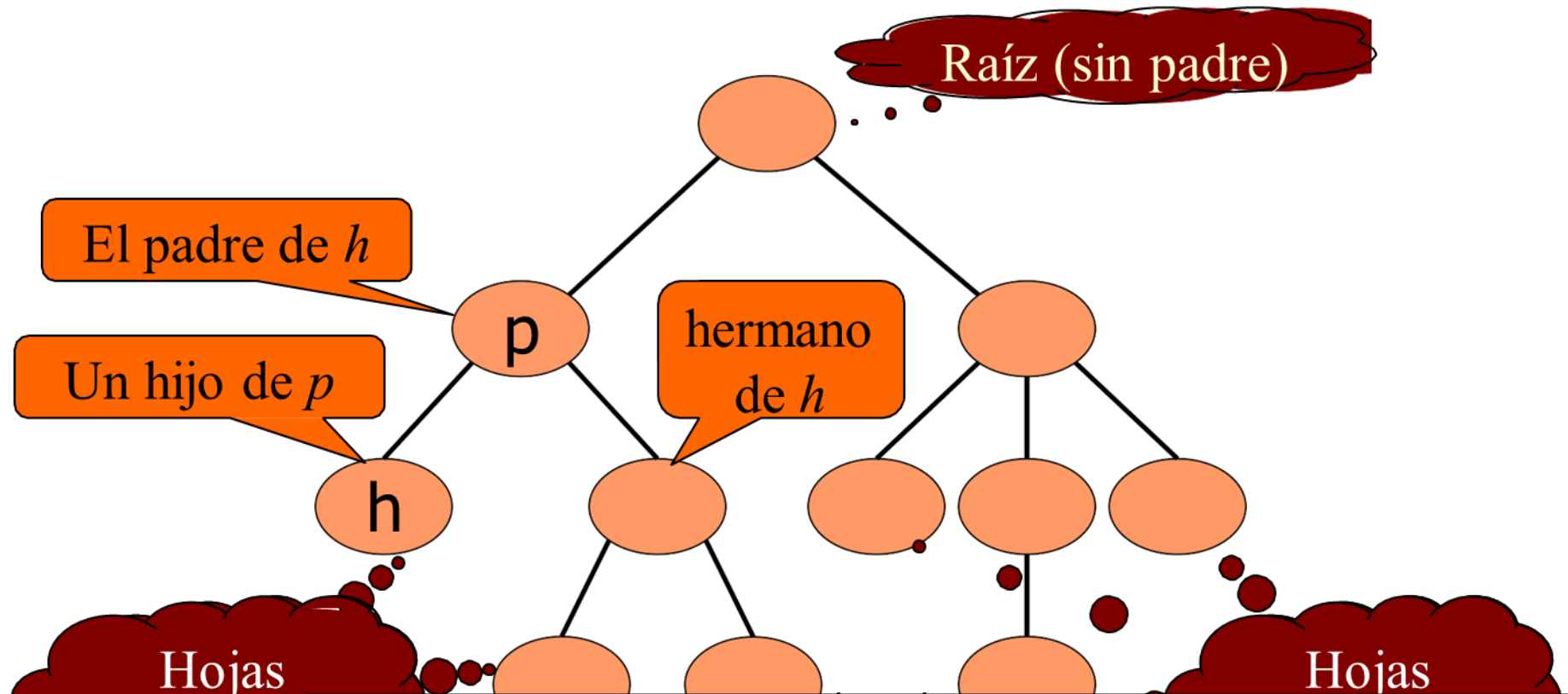
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99





# Definición no recursiva



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

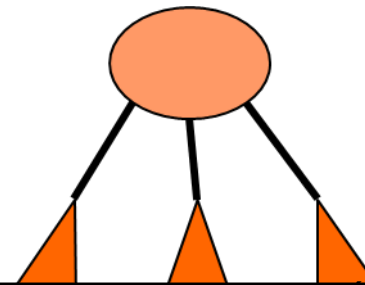
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Definición recursiva

- Un árbol es:
  - Vacío
  - Un nodo y cero o más árboles conectados al nodo mediante una arista



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

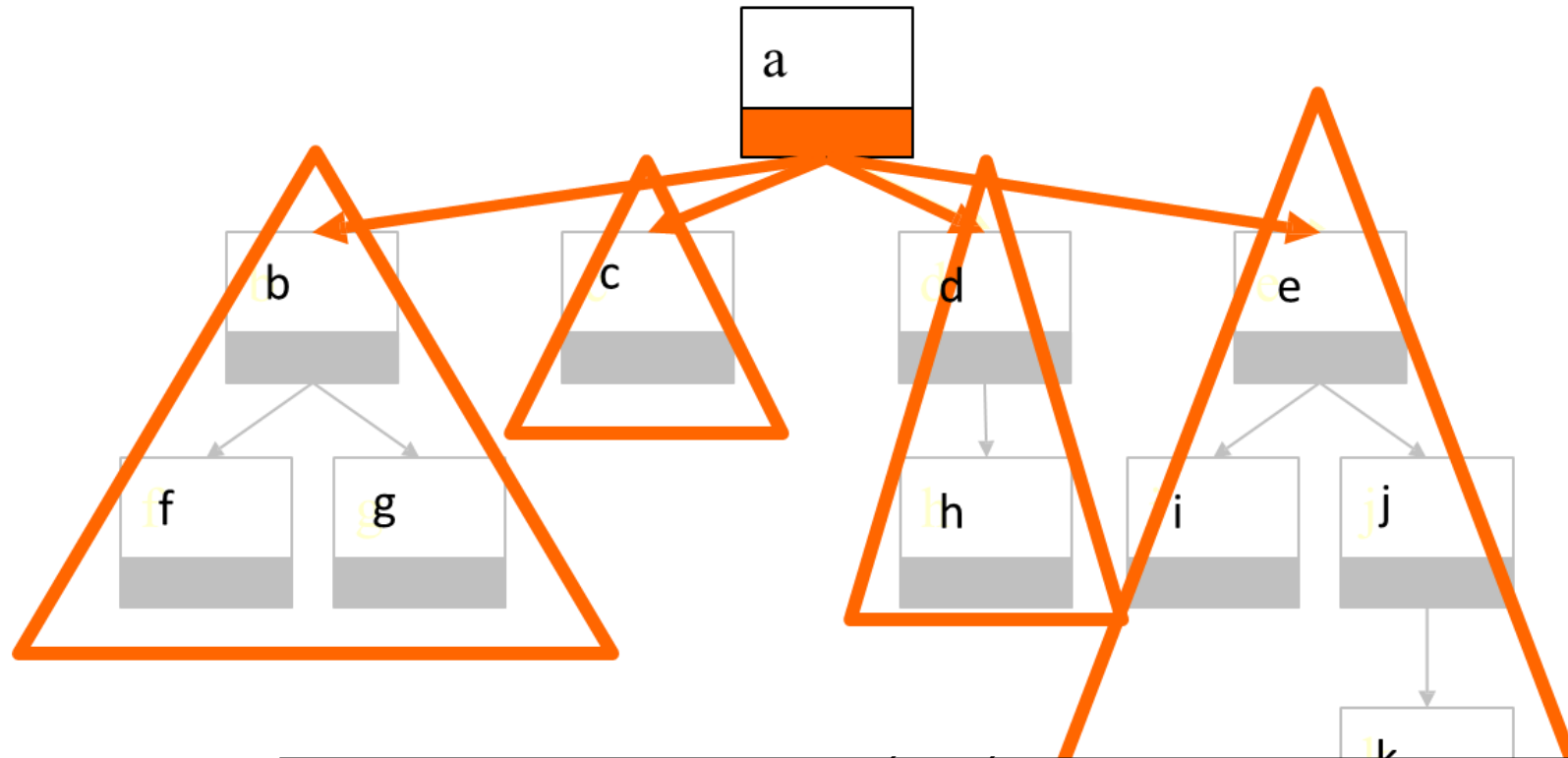
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

también "subárboles"



# Definición recursiva



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

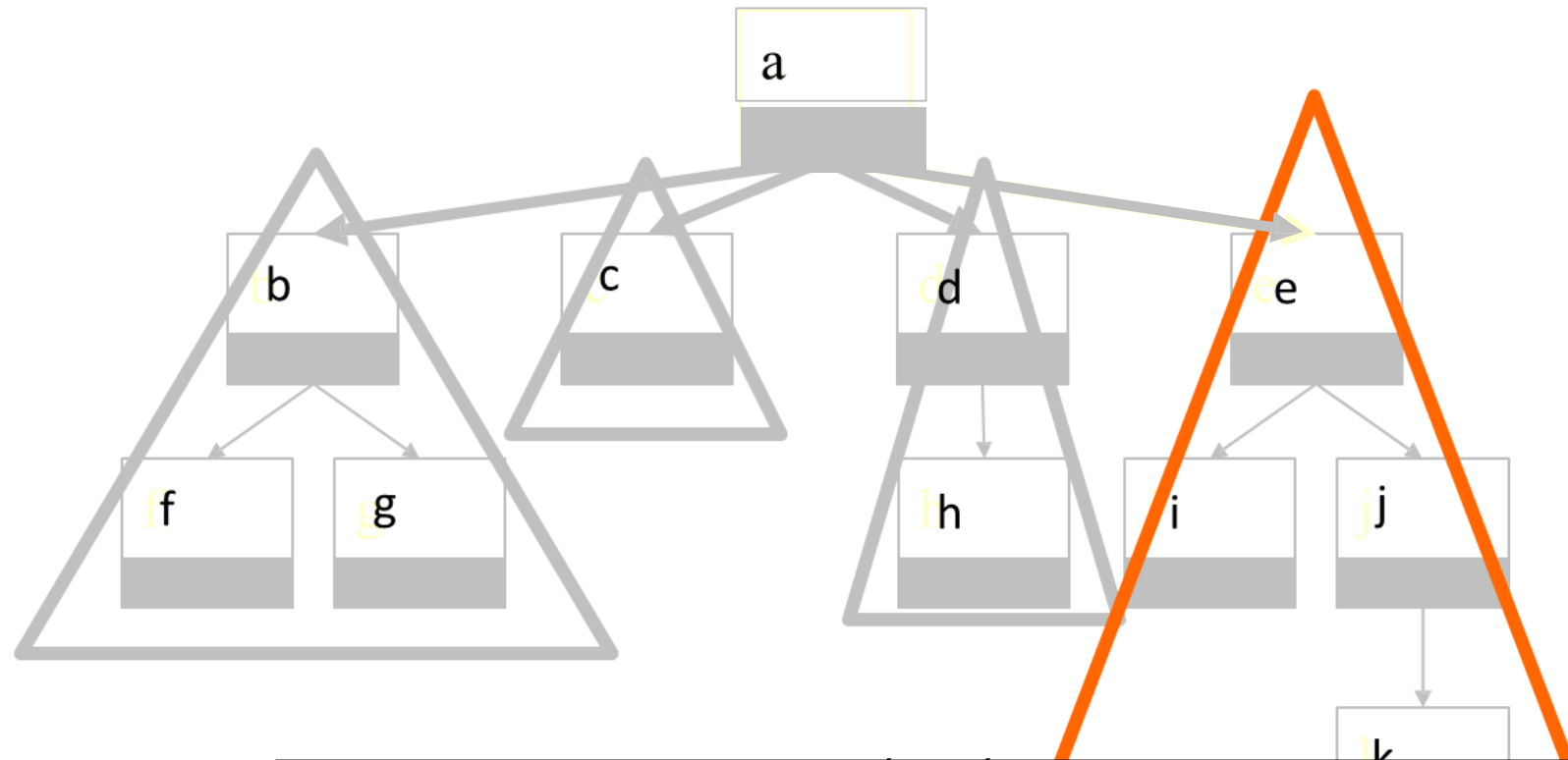
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Definición recursiva



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

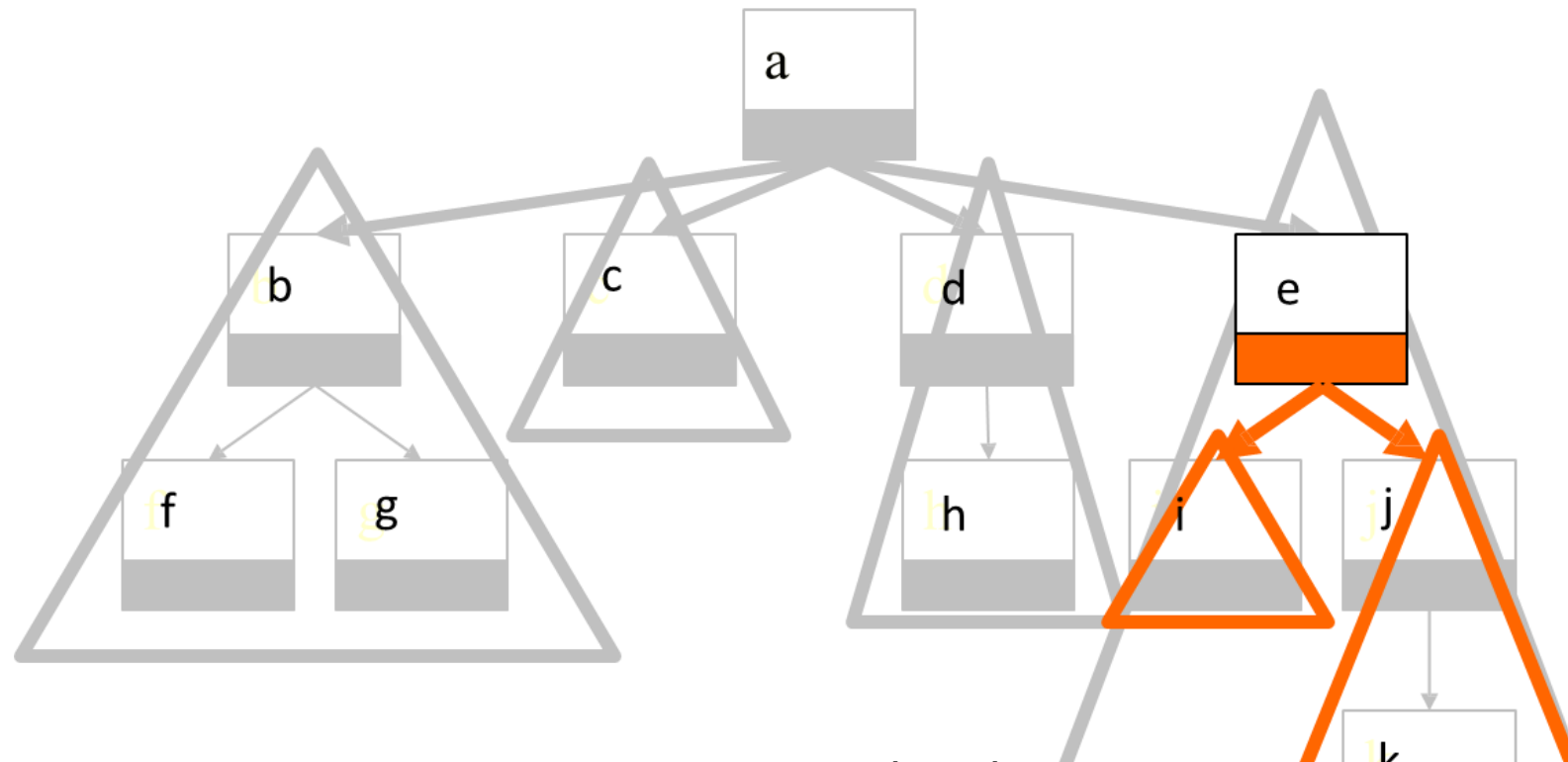
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Definición recursiva



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

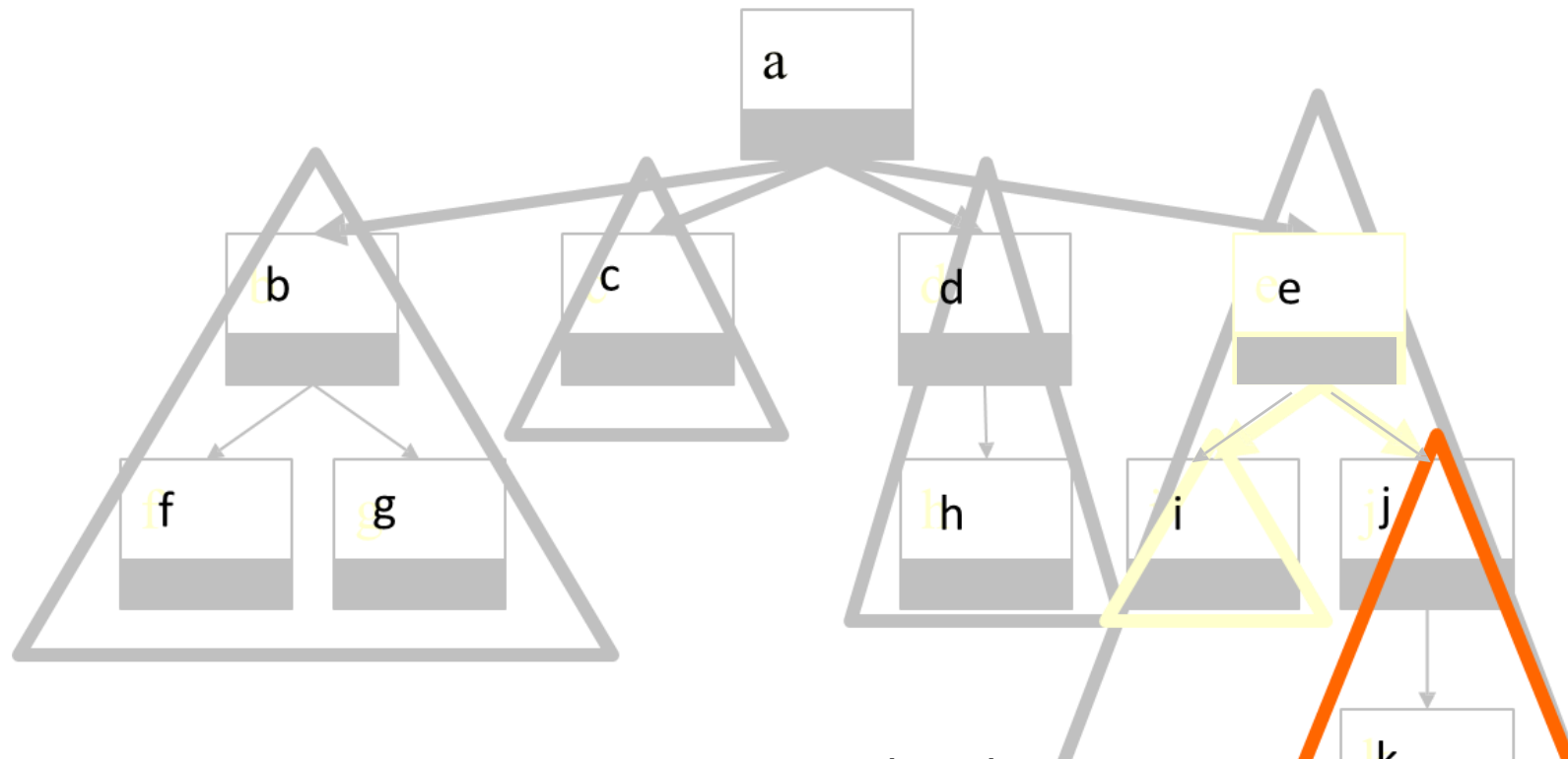
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Definición recursiva



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

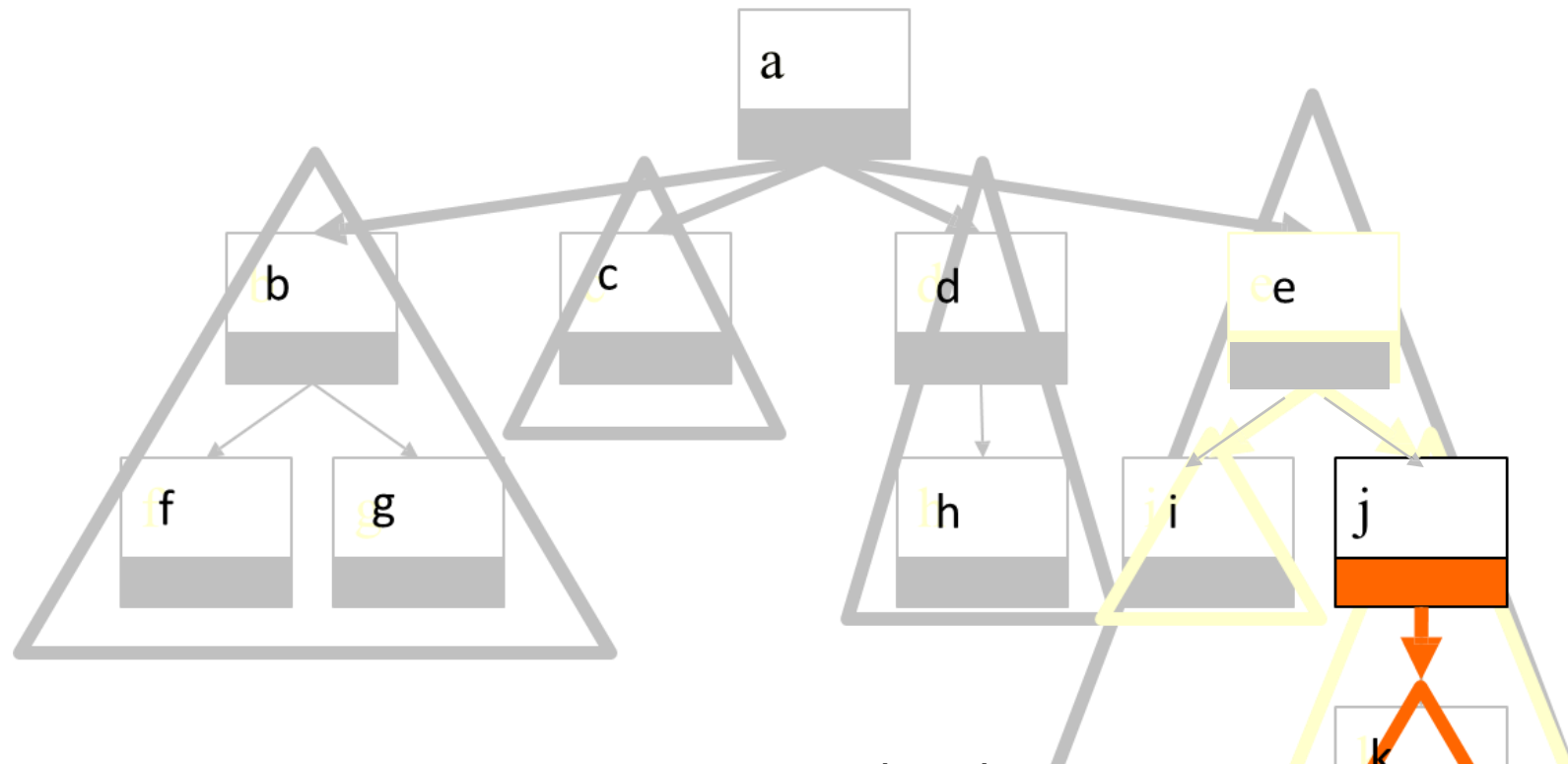
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Definición recursiva



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Terminología

- Un nodo es **externo**, si no tiene hijos (es *hoja*)
  - Según la definición recursiva: si todos los subárboles conectados a ese nodo están vacíos
- Un nodo es **interno**, si tiene uno o más hijos
  - Según la definición recursiva: si alguno de los subárboles conectados a ese nodo no está vacío
- Un nodo es **ascendiente** de otro, si es padre suyo o ascendiente de su padre
- Un nodo es **descendiente** de otro, si este último

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

que ese nodo hace de raíz

Cartagena99



# Terminología

- Un **camino** de un nodo a otro, es una secuencia de aristas consecutivas que llevan del primero al segundo
  - La **longitud** del camino es el número de aristas
- La **profundidad** de un nodo es la longitud del camino de la raíz a ese nodo
- La **altura** de un árbol es el valor de la profundidad del nodo más profundo

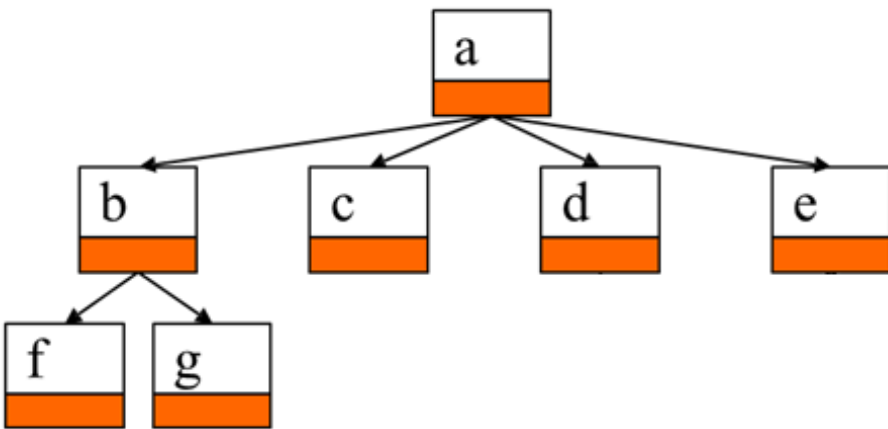
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ejemplo



**Tamaño** del árbol: 7

**Altura** del árbol: 2

Nodo	Altura	Profundidad	Tamaño	Int./Ext.
a	2	0	7	Interno
b	1	1	3	Interno
c	0	1	1	Externo
d	0	1	1	Externo
e	0	1	1	Externo
f	0	2	1	Externo
g	0	2	1	Externo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

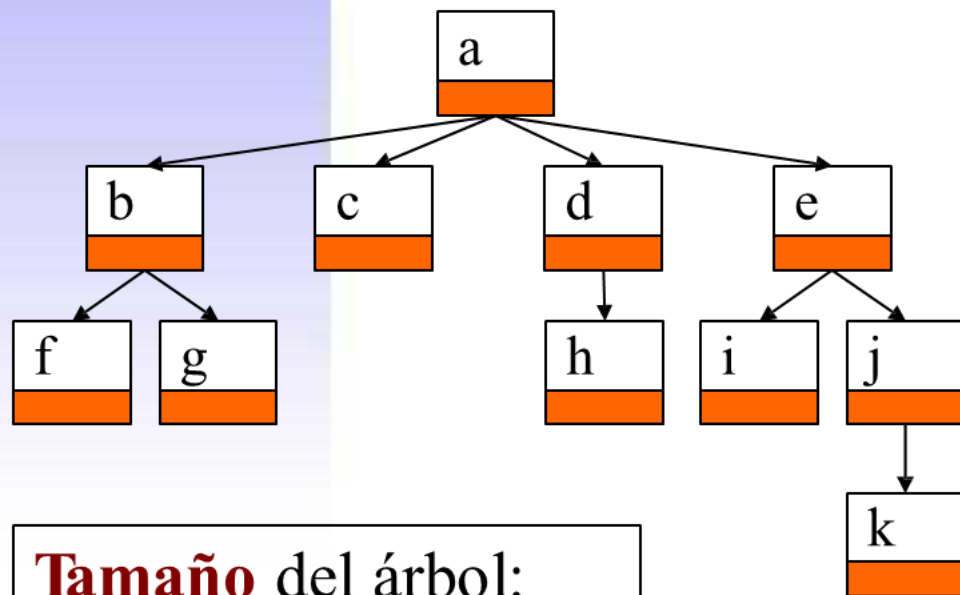
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Ejercicio 1



- Completa la tabla para el siguiente árbol



Nodo	Altura	Profundidad	Tamaño	Int./Ext.
a				Interno
b	1	1	3	Interno
c	0	1	1	Externo
d				
e				
f	0	2	1	Externo
g	0	2	1	Externo
h				
i				
j				
k				

**Tamaño** del árbol:

**Altura** del árbol:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

k

# Terminología: Árbol ordenado

- Un árbol es **ordenado**, si para cada nodo existe un orden lineal para todos sus hijos



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Terminología: Árbol binario

- Un árbol **binario** es un árbol ordenado en el que cada nodo tiene 2 árboles (izquierdo y derecho).
  - Árbol binario según la definición recursiva de árbol
  - Los árboles izquierdo y/o derecho pueden estar vacíos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# La interfaz BTree

```
public interface BTree<E> {  
  
    static final int LEFT = 0;  
    static final int RIGHT = 1;  
  
    boolean isEmpty();  
    E getInfo() throws BTreeException;  
    BTree<E> getLeft() throws BTreeException;  
    BTree<E> getRight() throws BTreeException;  
  
    void insert(BTree<E> tree, int side) throws BTreeException;  
    BTree<E> extract(int side) throws BTreeException;  
  
    String toStringPreOrder();  
    String toStringInOrder();  
    String toStringPostOrder();  
    String toString(); // preorder
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

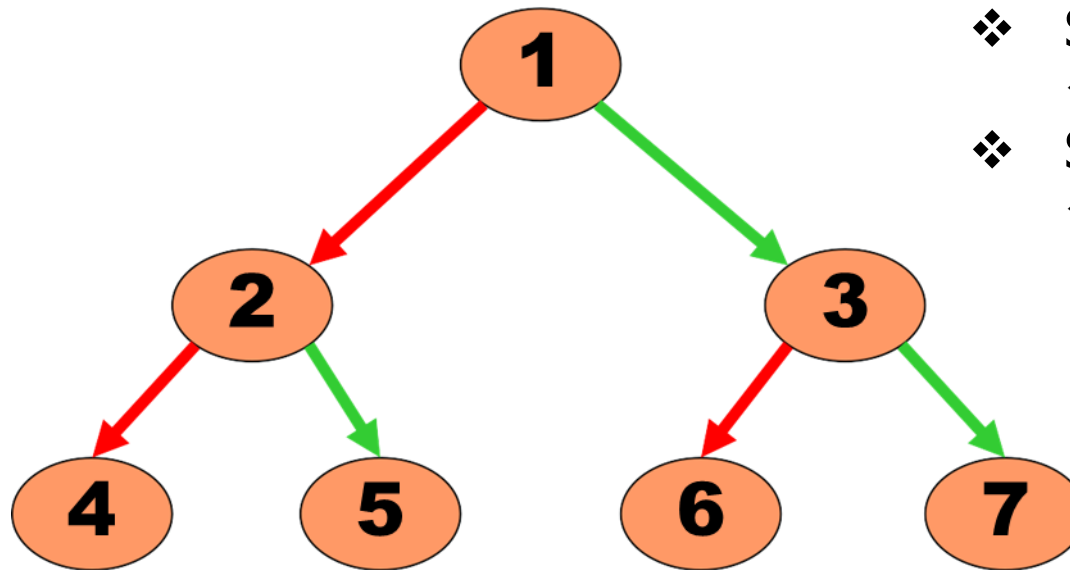
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

```
public BTree<E> (BTree<E> tree);
```

# Una interfaz varias implementaciones

- Implementación basada en arrays



- ❖ Subárbol izquierdo
  - ✓ Posición nodo raíz \* 2
- ❖ Subárbol derecho
  - ✓ Posición nodo raíz \* 2 + 1

Cartagena99

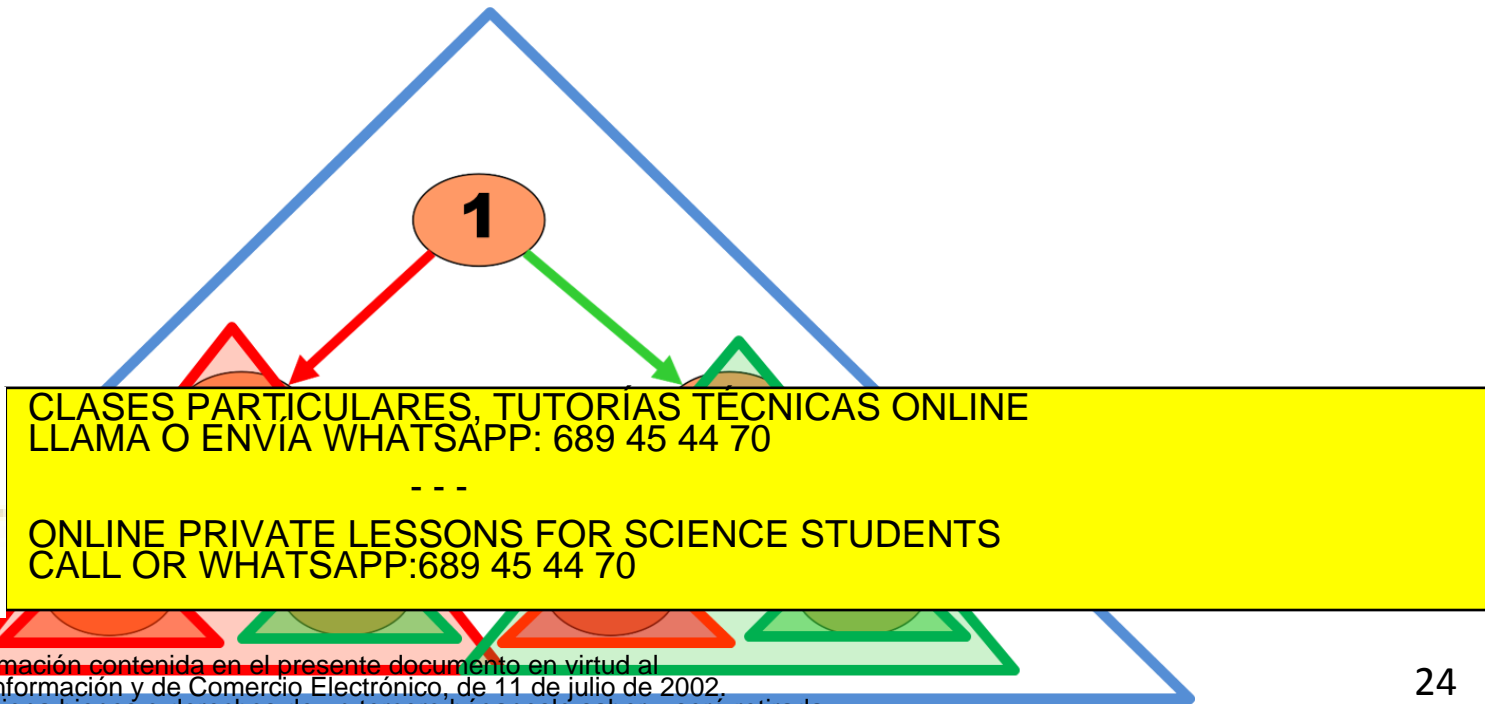
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Una interfaz varias implementaciones

- Implementación basada en enlaces
  - *Linked Binary Node (LBNode)*
  - *Linked Binary Tree (LBTree)*
  - ✓ Cada árbol (*LBTree*) tiene un nodo raíz (atributo *LBNode*)
  - ✓ Cada nodo raíz *LBNode* apunta a dos árboles (atributos *LBTree*), los cuales pueden estar vacíos (null)



Cartagena99



# La clase LBNode

```
public class LBNode<E> {  
  
    private E info;  
    private BTree<E> left;  
    private BTree<E> right;  
  
    public LBNode(E info, BTree<E> left, BTree<E> right) {...}  
    public E getInfo() {...}  
    public void setInfo(E info) {...}  
    public BTree<E> getLeft() {...}  
    public void setLeft(BTree<E> left) {...}  
    public BTree<E> getRight() {...}  
    public void setRight(BTree<E> right){...}
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ejercicio 2



- Completa la implementación de la clase **LBNode**.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# La clase LBTre

```
public class LBTre<E> implements BTree<E> {  
  
    private LBNode<E> root;  
  
    public LBTre() {  
        root = null;  
    }  
  
    public LBTre(E info) {  
        root = new LBNode<E>(info, new LBTre<E>(), new LBTre<E>());  
    }  
  
    public boolean isEmpty() {
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# La clase LBTre

```
...
public E getInfo() throws BTreeException {
    if (isEmpty()) {
        throw new BTreeException("empty trees do not have info");
    }
    return root.getInfo();
}

public BTree<E> getLeft() throws BTreeException {
    if (isEmpty()) {
        throw new BTreeException("empty trees do not have a left child");
    }
    return root.getLeft();
}

public BTree<E> getRight() throws BTreeException {
```

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Algoritmos básicos

- Tamaño: **size()**
- Altura: **height()**
- Recorridos
  - Pre-orden: **toStringPreOrder()**
  - In-orden: **toStringInOrder()**
  - Post-orden: **toStringPostOrder()**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# La clase `LBTree`: `size()`

```
public int size() {  
    if (isEmpty()) {  
        return 0;  
    } else {  
        return 1 + root.getLeft().size()  
            + root.getRight().size();  
    }  
}
```

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# La clase LBTre: height()

```
public int height() {  
    if (isEmpty()) {  
        return -1;  
    } else {  
        int leftHeight = root.getLeft().height();  
        int rightHeight = root.getRight().height();  
        if (leftHeight > rightHeight) {  
            return 1 + leftHeight;  
        } else {  
            return 1 + rightHeight;  
        }  
    }  
}
```

1+Math.max(leftHeight,  
rightHeight);

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

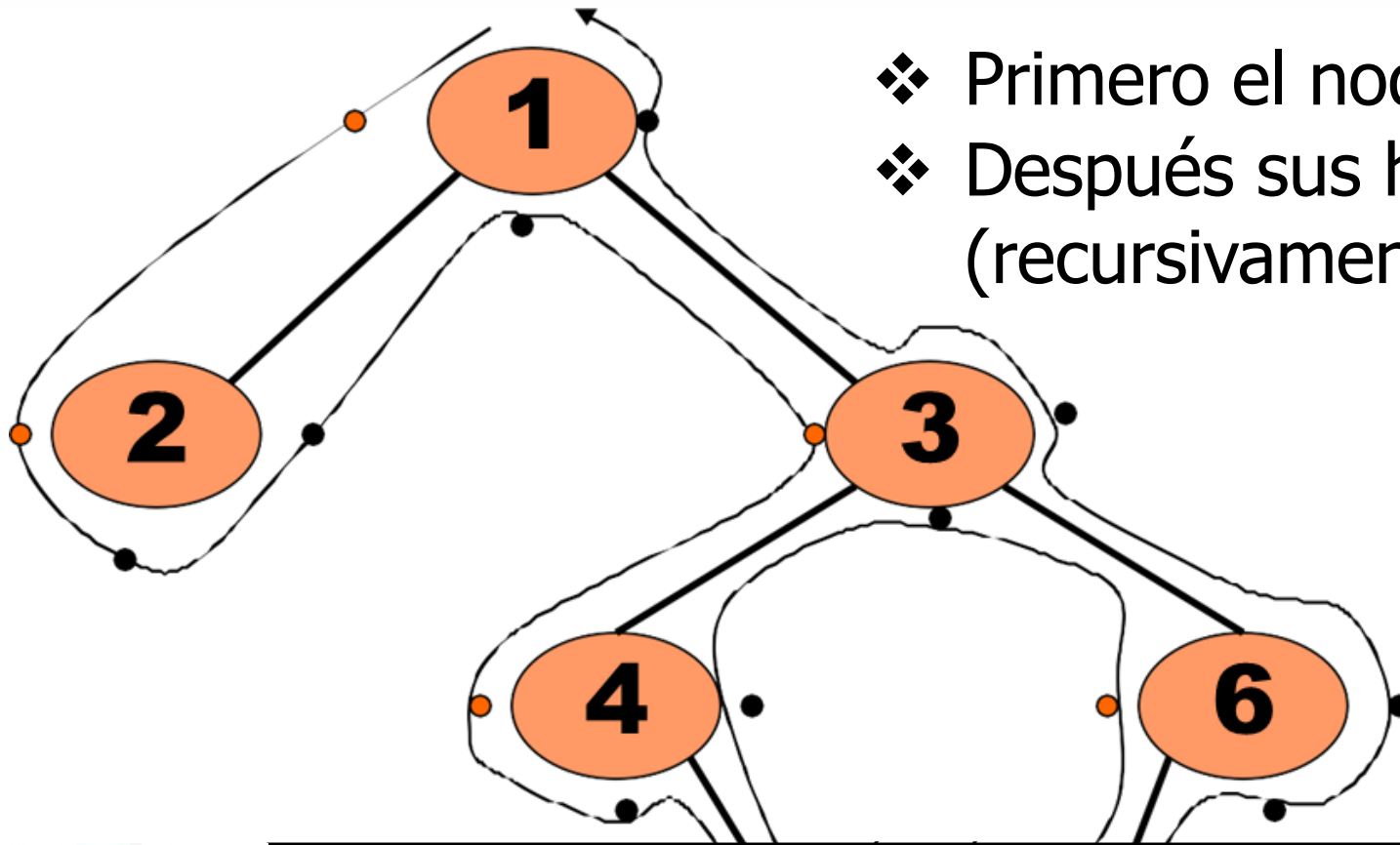
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70





# Recorrido Pre-orden



- ❖ Primero el nodo raíz
- ❖ Después sus hijos (recursivamente)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

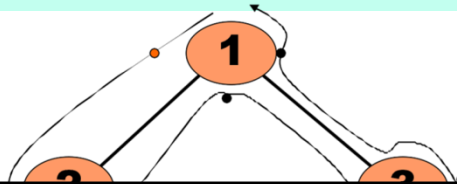
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# La clase LBTree: toStringPreOrder()

```
public String toStringPreOrder() {  
    if (isEmpty()) {  
        return "";  
    } else {  
        return root.getInfo().toString() + " " +  
            root.getLeft().toStringPreOrder() +  
            root.getRight().toStringPreOrder();  
    }  
}
```



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

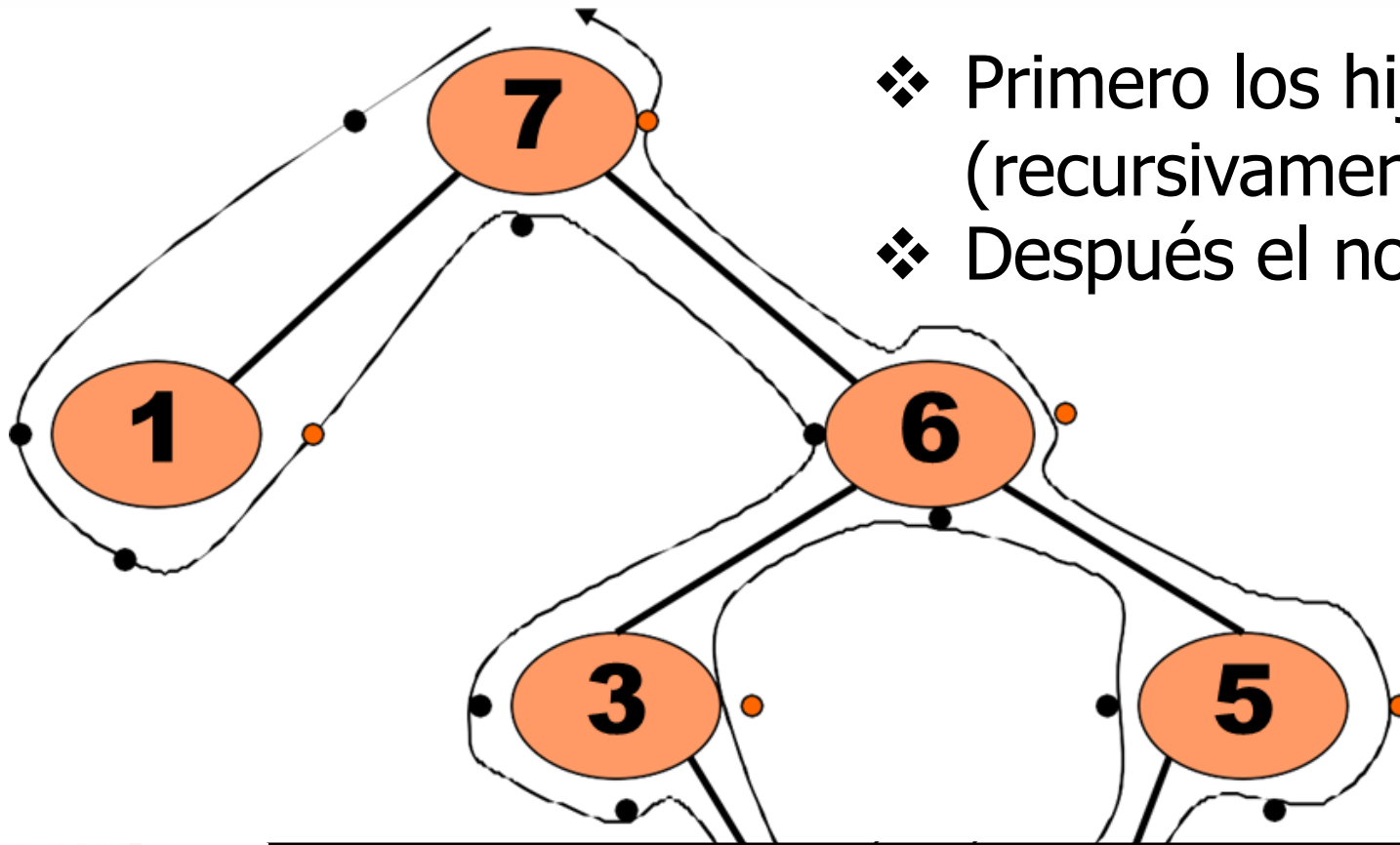
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Recorrido Post-orden



- ❖ Primero los hijos (recursivamente)
- ❖ Después el nodo raíz

Cartagena99

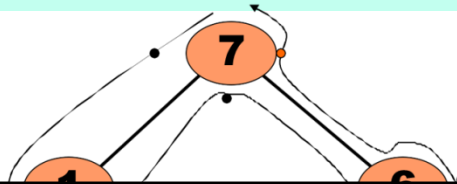
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# La clase LBTree: toStringPostOrder()

```
public String toStringPostOrder() {  
    if (isEmpty()) {  
        return "";  
    } else {  
        return root.getLeft().toStringPostOrder() +  
            root.getRight().toStringPostOrder() +  
            root.getInfo().toString() + " ";  
    }  
}
```



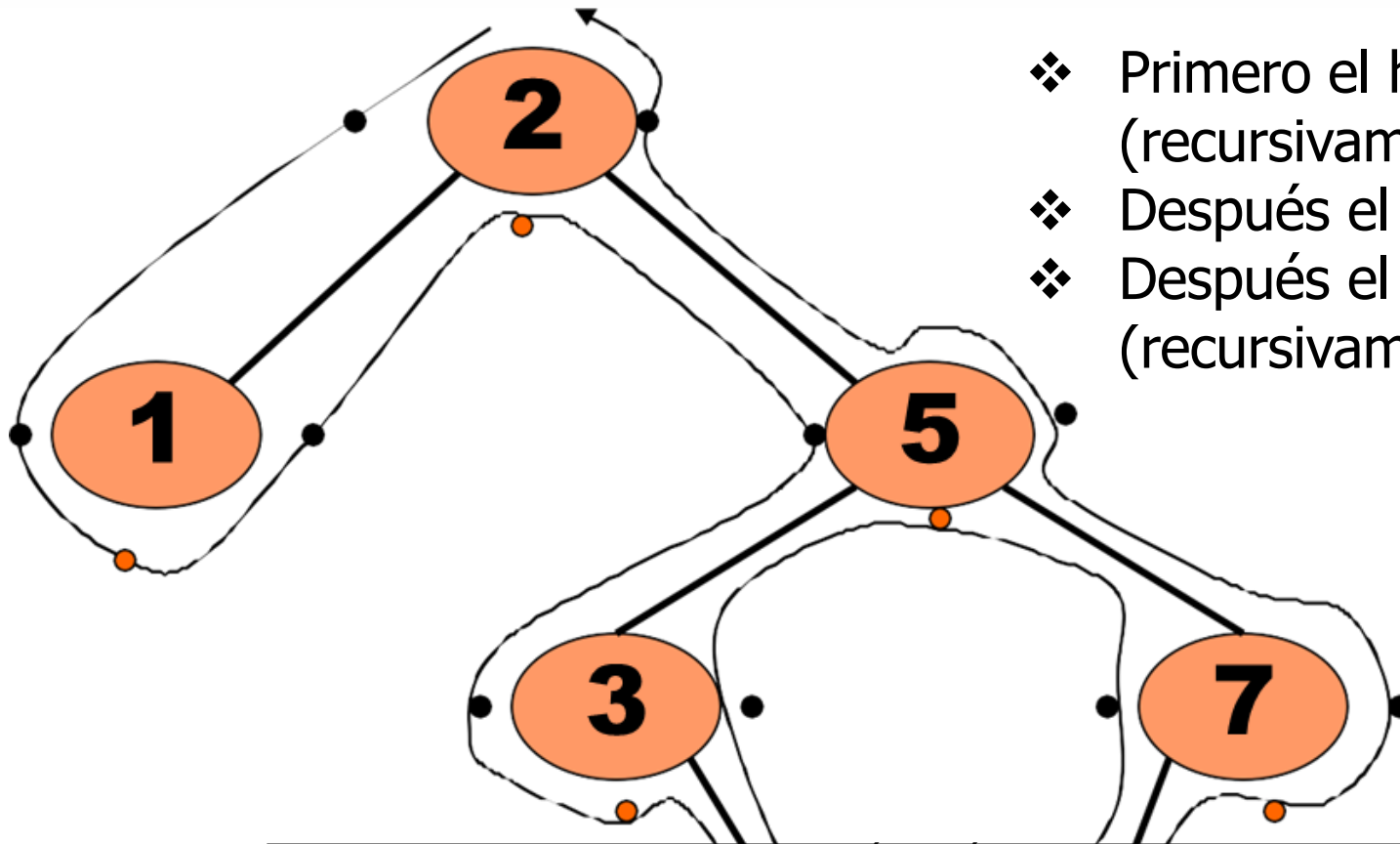
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Recorrido In-orden (simétrico)



- ❖ Primero el hijo izquierdo (recursivamente)
- ❖ Después el nodo raíz
- ❖ Después el hijo derecho (recursivamente)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

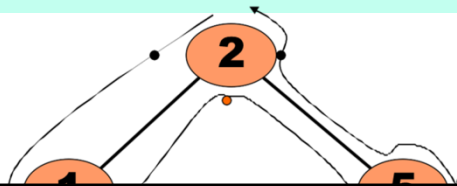
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# La clase LBTree: toStringInOrder()

```
public String toStringInOrder() {  
    if (isEmpty()) {  
        return "";  
    } else {  
        return root.getLeft().toStringInOrder() +  
            root.getInfo().toString() + " " +  
            root.getRight().toStringInOrder();  
    }  
}
```



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

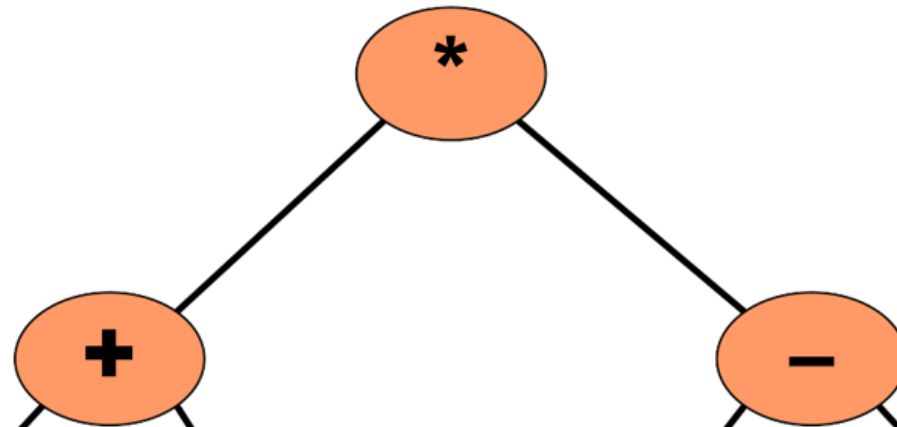


Cartagena99

# Ejercicio 3



- Dado el siguiente árbol binario, indica qué recorrido (pre-orden, in-orden, post-orden) produce el resultado  $(A+B)*(C-D)$ .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Diferente notación matemática

Infix	Prefix	Postfix
$A+B$	$+AB$	$AB+$
$A+B-C$	$--+ABC$	$AB+C-$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

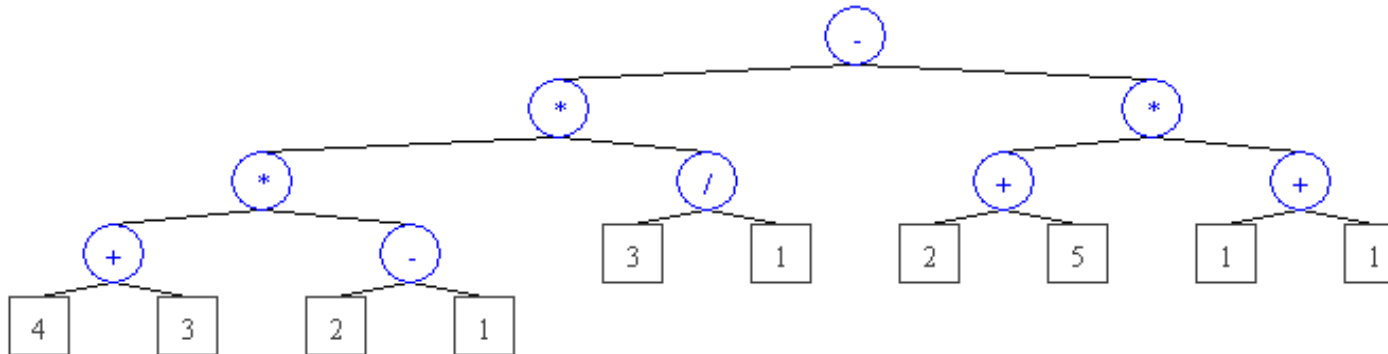
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Actividad



Expresiones matemáticas como árboles:

<http://www.cs.jhu.edu/~goodrich/dsa/05trees/Demo1/>

Evaluate

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Programación de sistemas

## Árboles (II)

Julio Villena Román

<jvillena@it.uc3m.es>

MATERIALES BASADOS EN EL TRABAJO DE DIFERENTES AUTORES:

Carlos Delgado Kloos, M. Carmen Fernández Panadero.

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Contenidos

- ❖ Concepto de árbol
- ❖ Terminología
- ❖ Implementación
- ❖ **Casos especiales**
  - **Árboles binarios de búsqueda**
  - **Montículos (*heaps*)**

Cartagena99

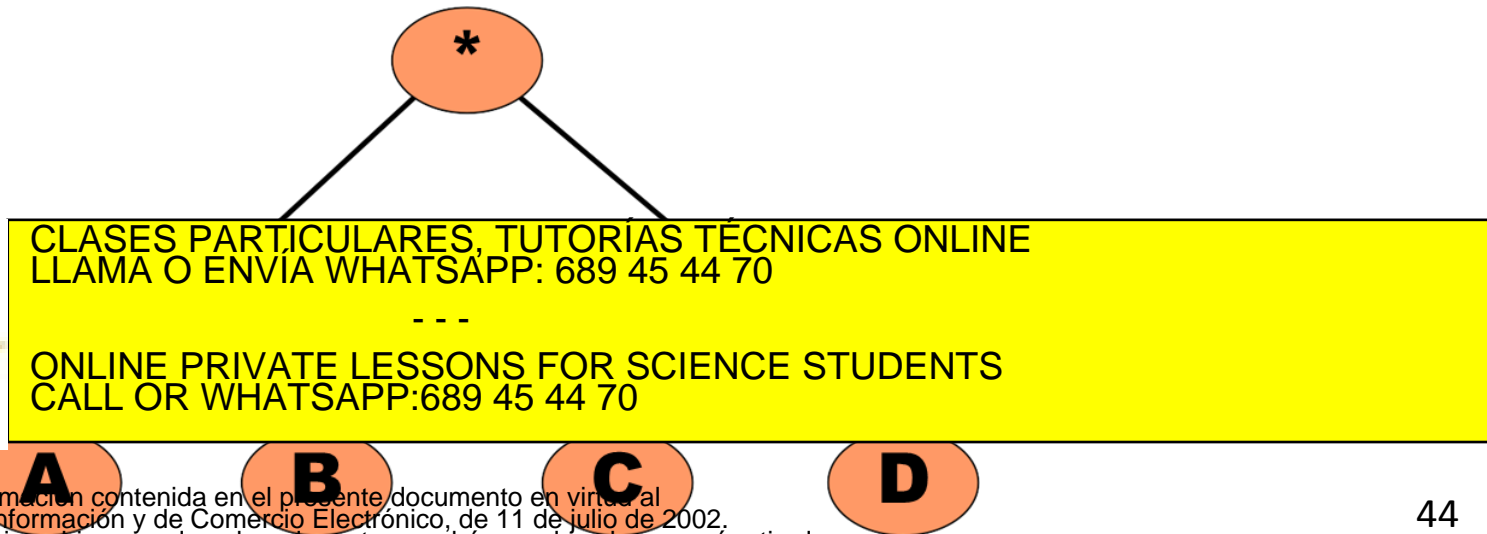
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Notación

- Hasta ahora:
  - **Un nodo, tres atributos:** información almacenada, subárbol izquierdo y subárbol derecho
  - **Un árbol, un atributo:** nodo raíz
- Al pintar un árbol representamos la información almacenada como el contenido de cada nodo



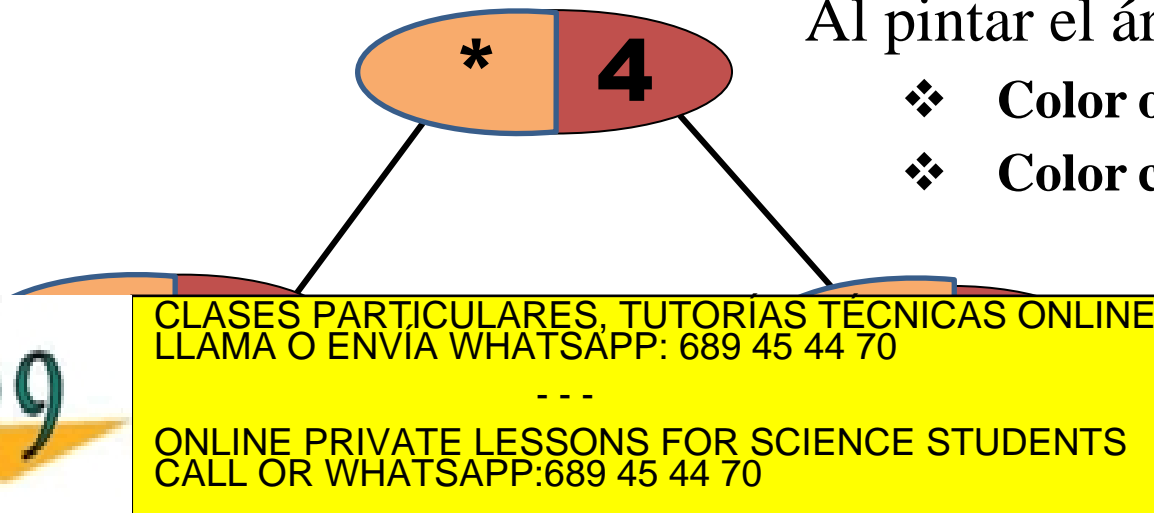
Cartagena99

# Notación

- A partir de ahora:
  - Añadimos un atributo más: **la clave (key)**
    - Facilita la utilización del árbol en operaciones de búsqueda, inserción, eliminación
    - Dependiendo de la implementación, la clave puede añadirse como atributo del nodo o como atributo del árbol

Al pintar el árbol

- ❖ **Color oscuro: Clave**
- ❖ **Color claro: Información**



Cartagena99

A 1

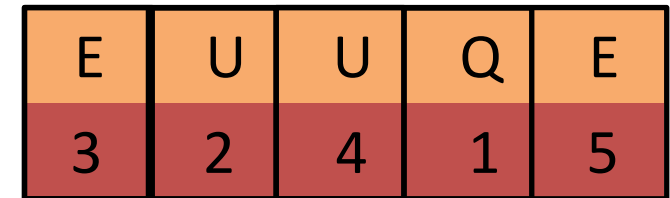
B 3

C 6

D 9

# Ejemplo de uso de claves

- **Colas con prioridad**
  - Estructura de datos lineal que devuelve los elementos de acuerdo con el valor de una clave que determina la prioridad y no al orden en que fueron insertados



E	U	U	Q	E
3	2	4	1	5

**COLA CON PRIORIDAD**

\*1 Valor de prioridad máximo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

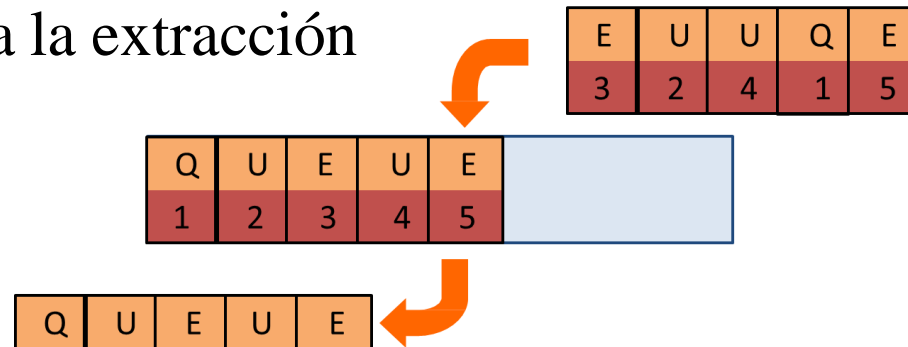
Cartagena99

# Ejemplo de uso de claves

- **Colas con prioridad**

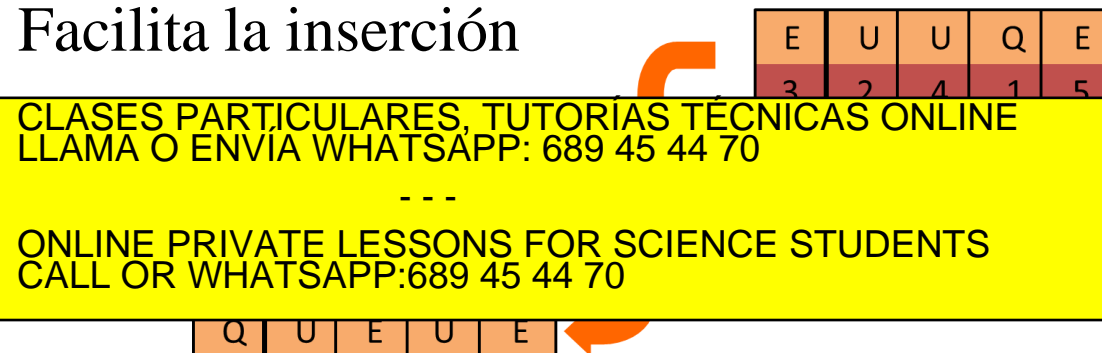
- Implementación 1: Comparar al insertar

- ✓ Facilita la extracción



- Implementación 2: Comparar al extraer

- ✓ Facilita la inserción



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Q U E U E

# Árboles binarios de búsqueda

- Concepto de árbol binario de búsqueda
- Operaciones
  - Búsqueda
  - Inserción
  - Eliminación

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Árboles binarios de búsqueda: Concepto

Un **árbol binario de búsqueda** es un árbol binario en el que para cada nodo  $n$ ,

- todas las claves de los nodos del subárbol **izquierdo** son **menores** que la clave de  $n$  (o iguales)
- y todas las del subárbol **derecho** **mayores** (o iguales).

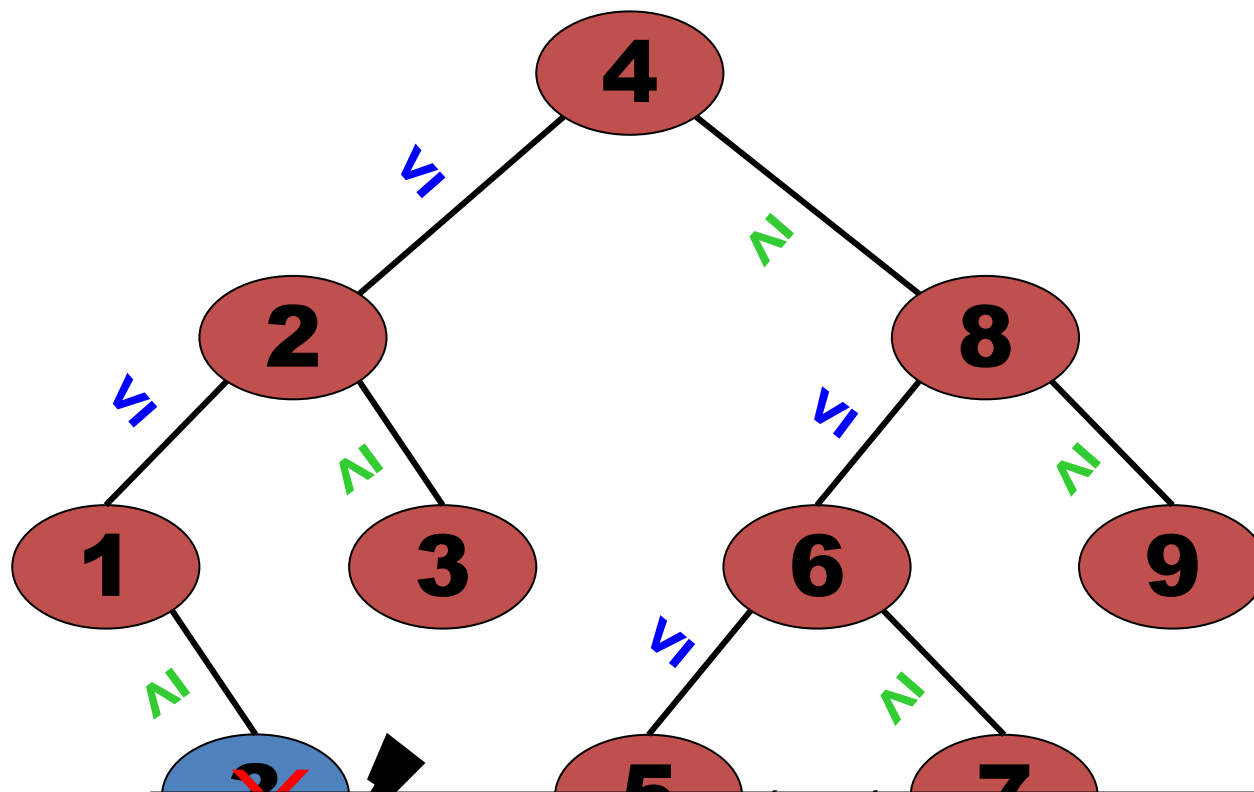
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ejemplo (I)



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

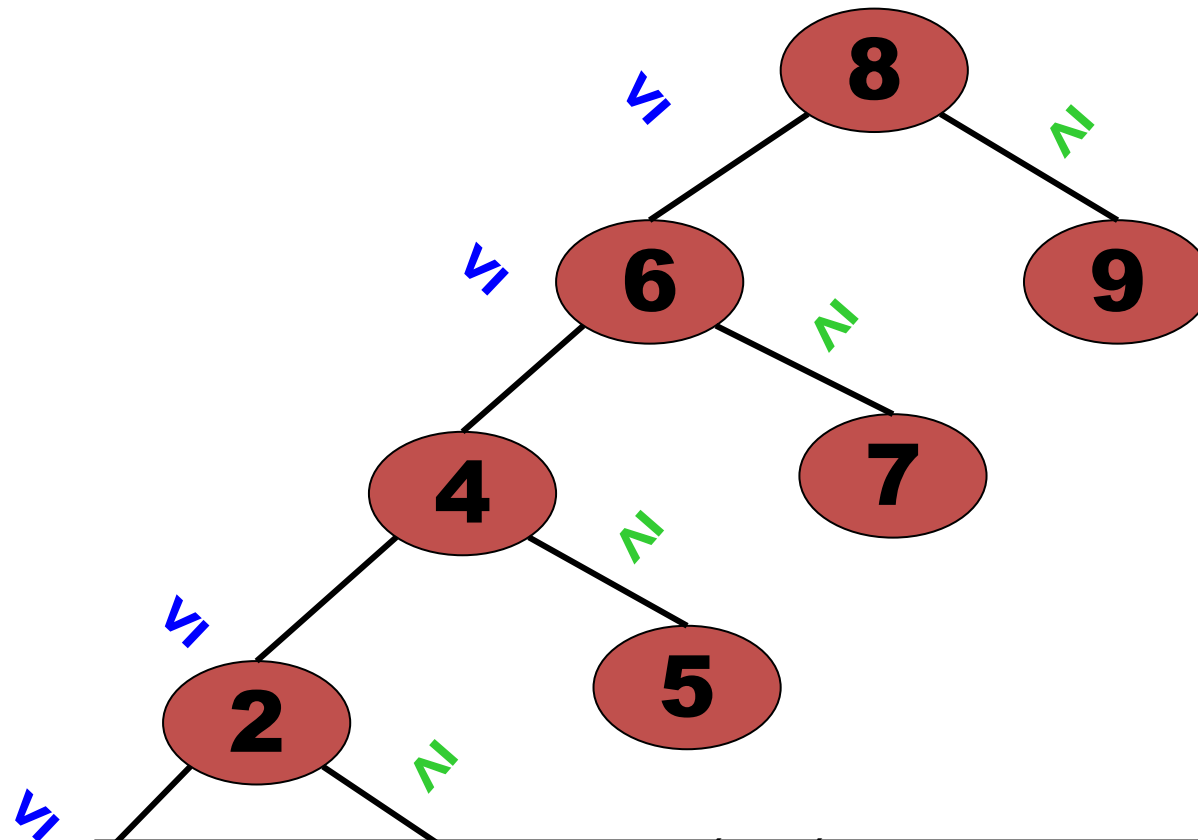
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

... implementación electrónica (en el subarbol izquierdo de 2 hay una clave mayor que 2)

# Ejemplo (II)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

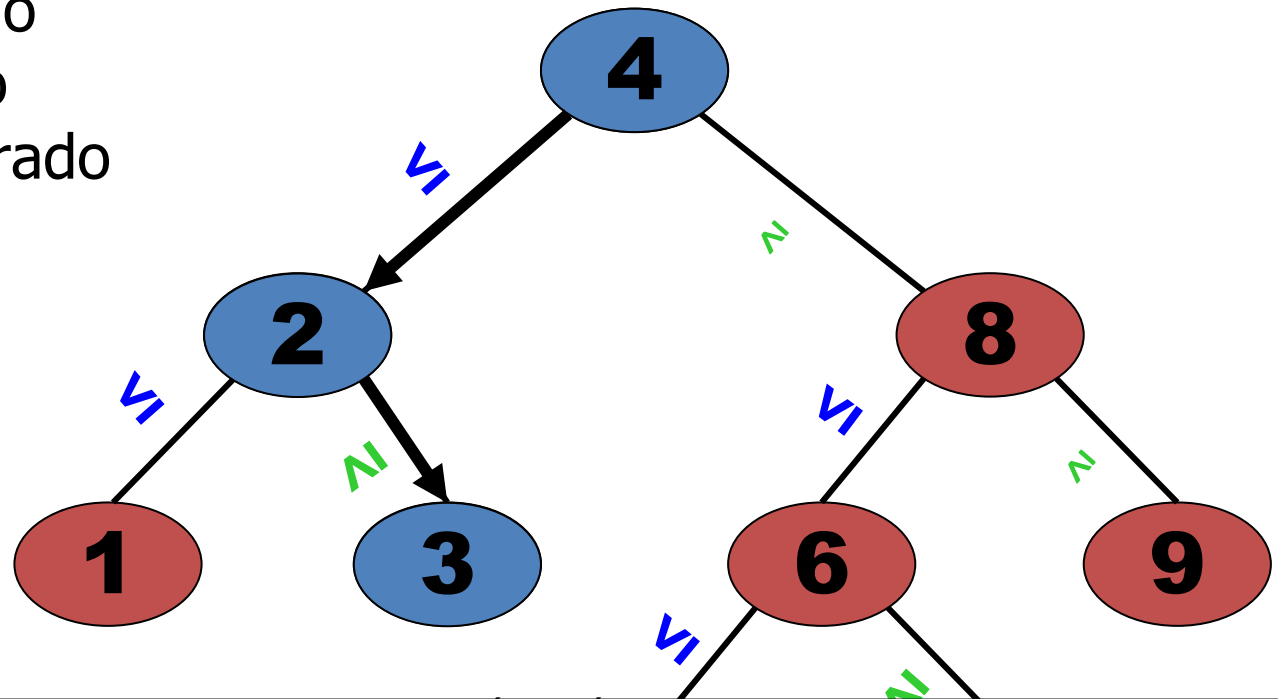
Cartagena99

❖ Implementación correcta de árbol binario de búsqueda

# Operación: Búsqueda

Buscamos el "3":

- $3 < 4$ : Subárbol izquierdo
- $3 > 2$ : Subárbol derecho
- $3 = 3$ : Elemento encontrado



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

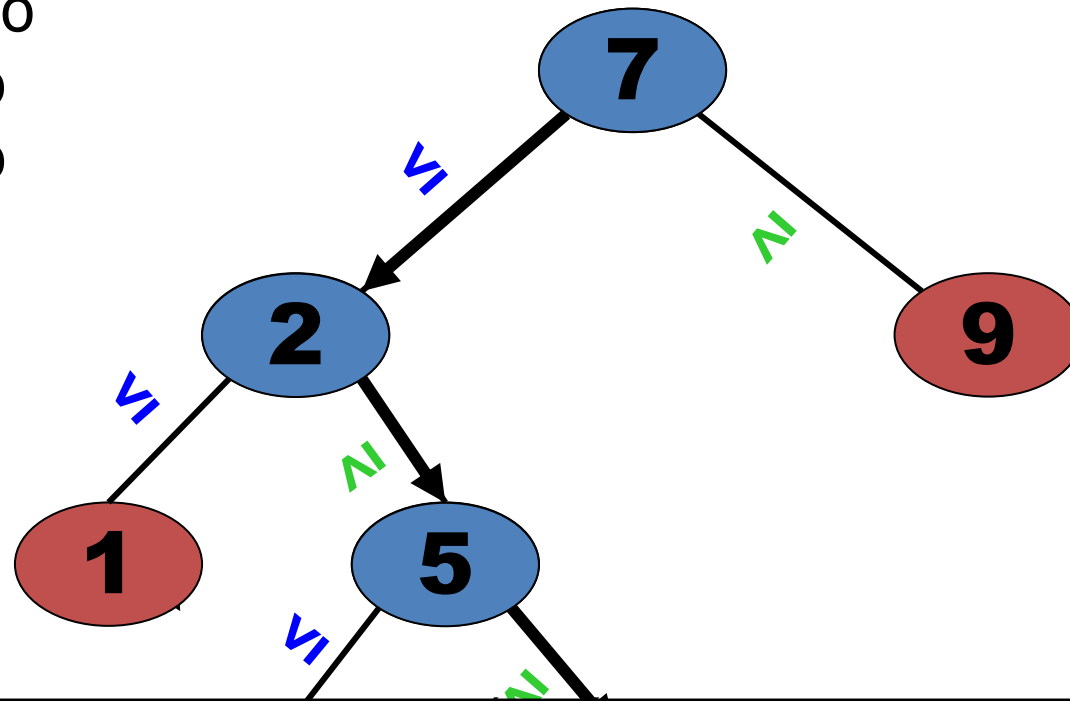
Cartagena99

<http://www.cosc.canterbury.ac.nz/mukuldan/usa1/BS1.html>

# Operación: Inserción

Insertar "6":

- $6 < 7$ : Subárbol izquierdo
- $6 > 2$ : Subárbol derecho
- $6 > 5$ : Subárbol derecho
- Huevo libre: insertar



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

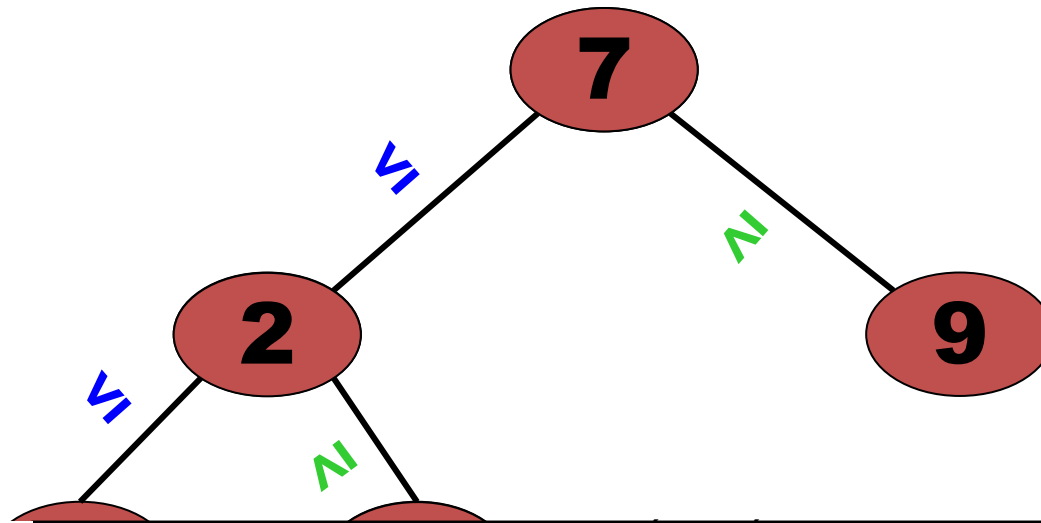
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Ejercicio 4



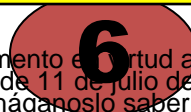
- Dado el siguiente árbol binario de búsqueda, inserta en orden tres elementos que contienen las siguientes claves: 4, 8 y 5



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

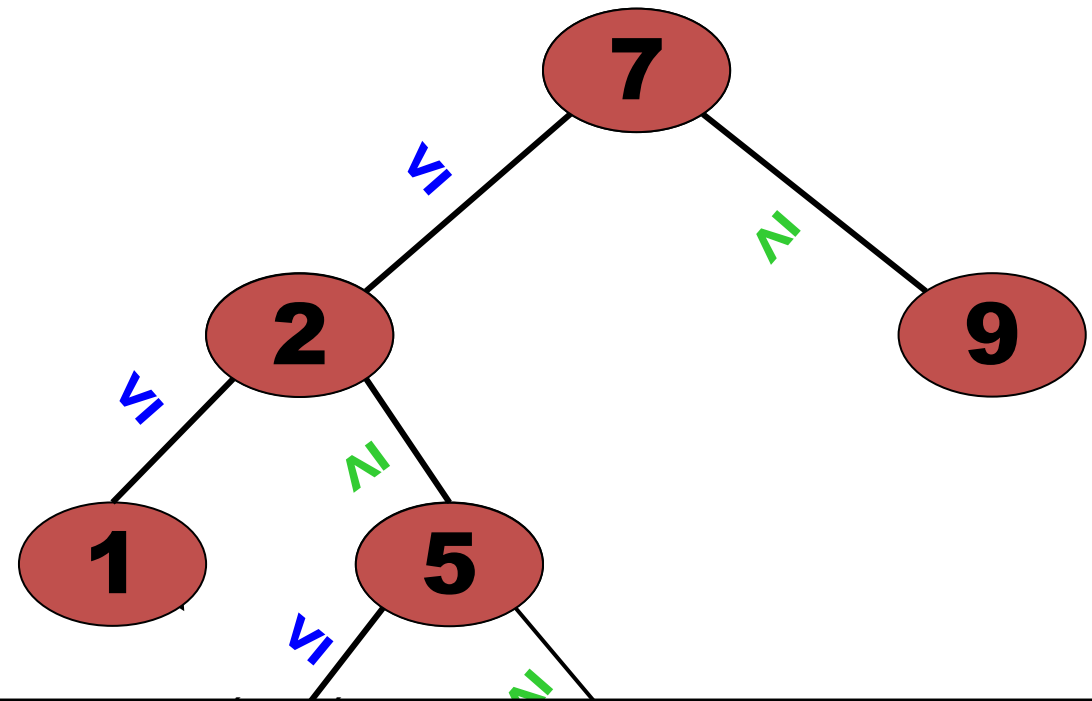


Cartagena99

# Operación: Eliminar (I)

Si los subárboles izquierdo y derecho están vacíos ("hoja")

- Eliminar directamente
- Por ejemplo, eliminar "3"



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

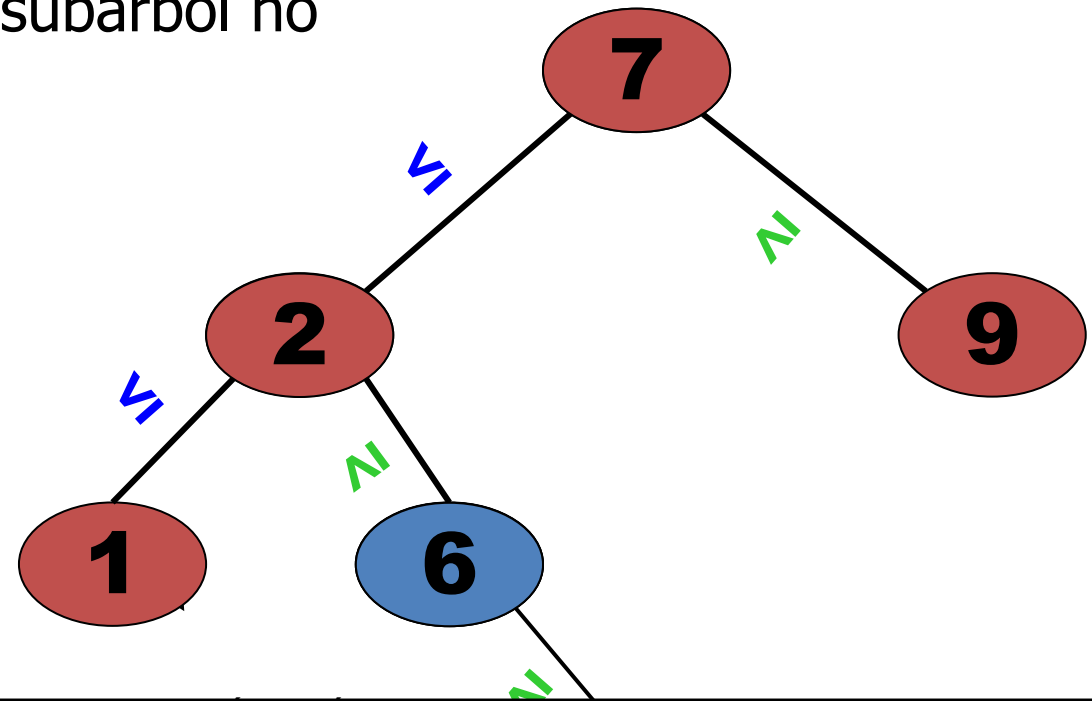
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Operación: Eliminar (II)

Si uno de los dos subárboles está vacío

- Reemplazar por el nodo raíz del subárbol no vacío
- Por ejemplo, eliminar "5"



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

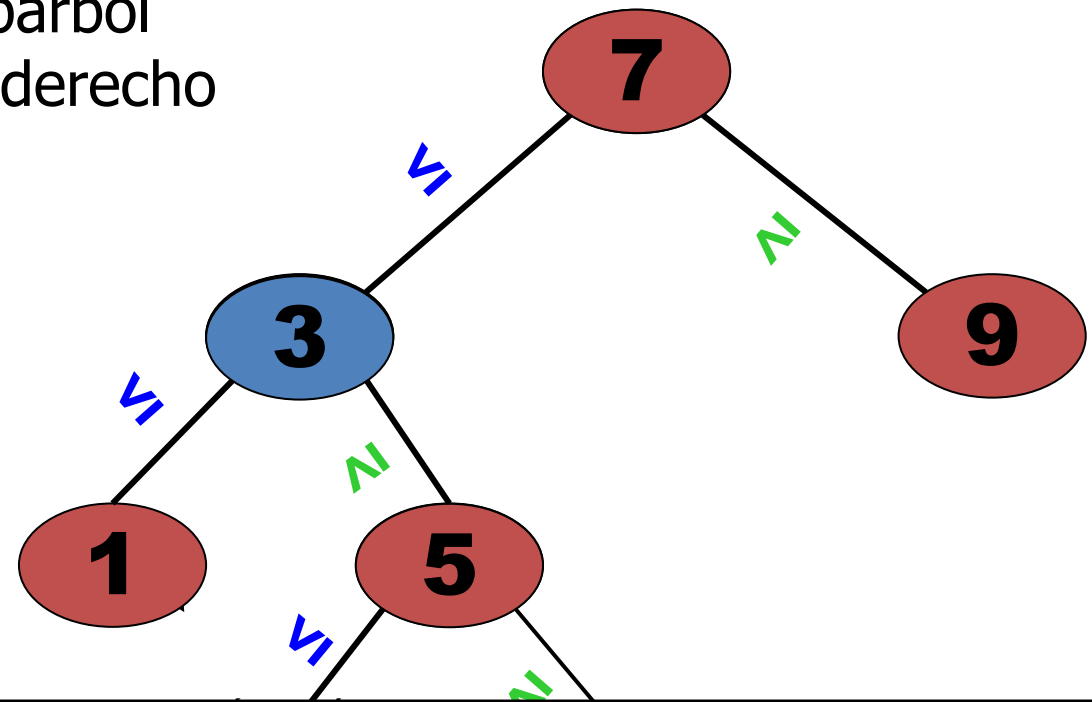
Cartagena99



# Operación: Eliminar (III)

Si ninguno de los subárboles está vacío

- Reemplazar por el mayor del subárbol izquierdo o el menor del subárbol derecho
- Por ejemplo, eliminar "2"
  - Reemplazar por "1" o por "3"



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

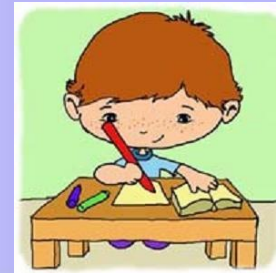
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

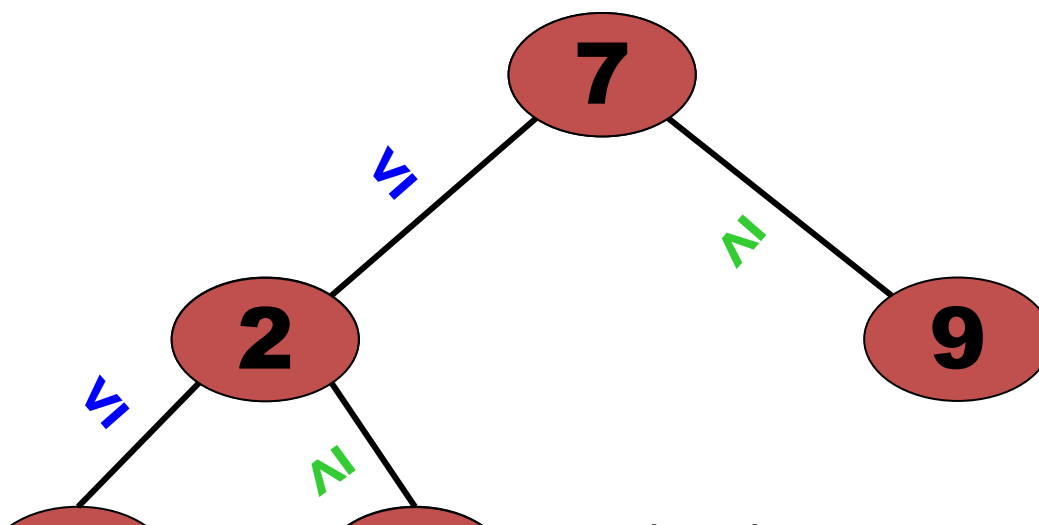
Cartagena99

<http://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ss98/audii/applets/BST/BST-Example.html>

# Ejercicio 5



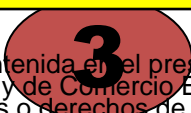
- Dado el siguiente árbol binario de búsqueda, elimina el elemento cuya clave es 7. Propón dos formas de realizar dicha operación



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

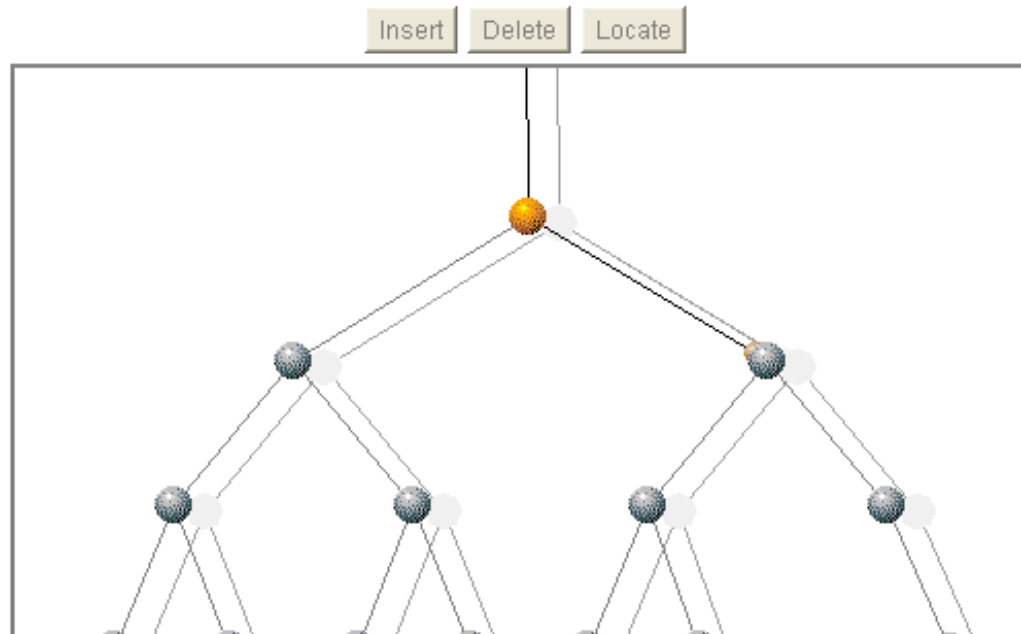
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Cartagena99

# Actividad

<http://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ss98/audi/applets/BST/BST-Example.html>



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

target none right pause

Cartagena99

# Montículos (*heaps*)

- Un **montículo** (binario)\* es un árbol binario *completo* en el que cada nodo tiene una clave mayor\*\* o igual que la de su padre.

\* normalmente se sobreentiende montículo *binario*

\*\* también podría definirse como menor o igual (el orden es arbitrario)

Aplicaciones:

- Colas con prioridad

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

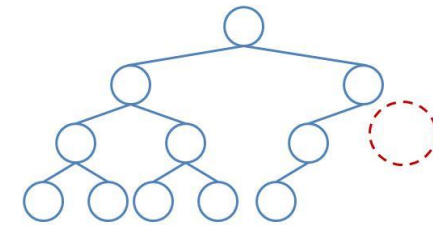
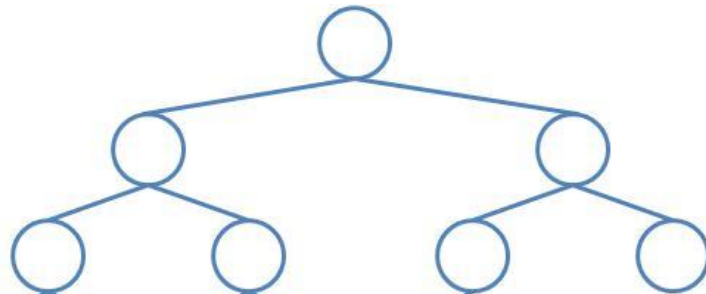
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Montículos: propiedades

1. Para cada nodo  $n$  (excepto para el raíz), su clave es mayor o igual que la de su padre.
2. Completo  
Para una profundidad  $K$ , todos los subárboles hasta  $K-1$  están no vacíos y en  $K$  los árboles no vacíos están colocados de izquierda a derecha



**No Completo**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

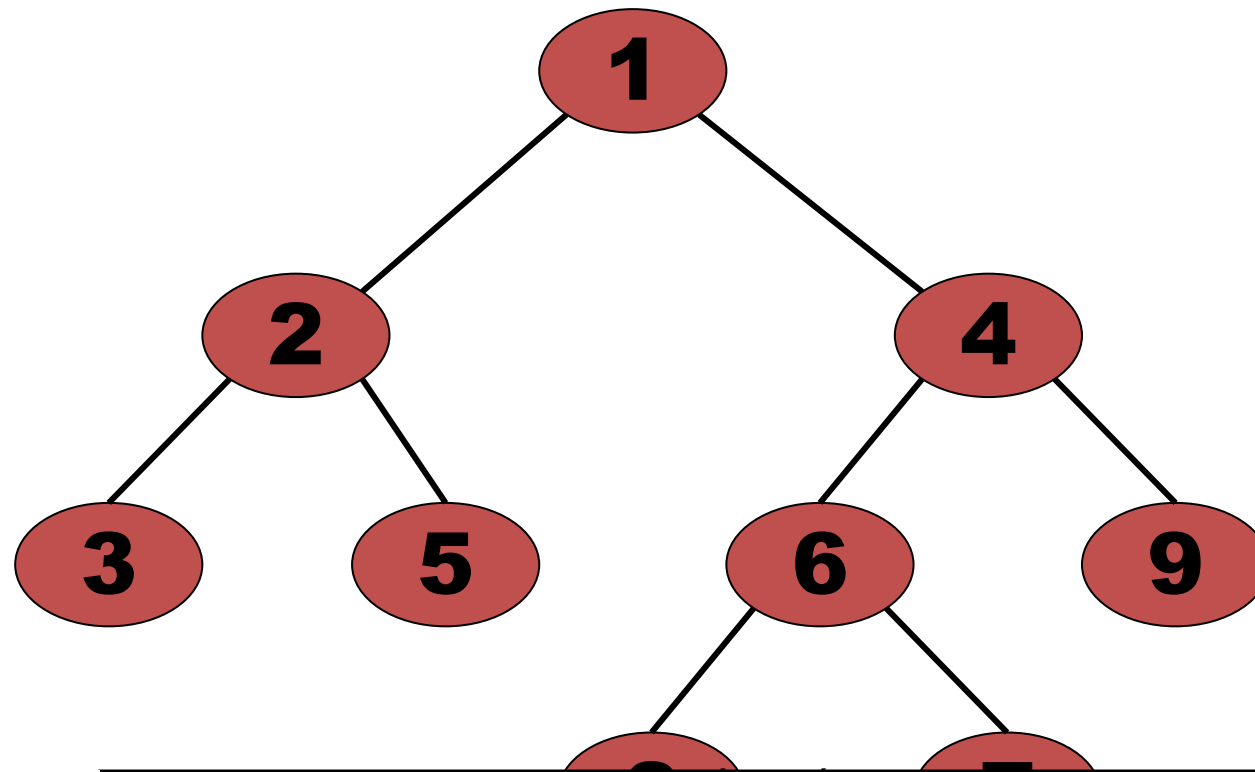
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



**No Completo**

# Ejemplo (1)



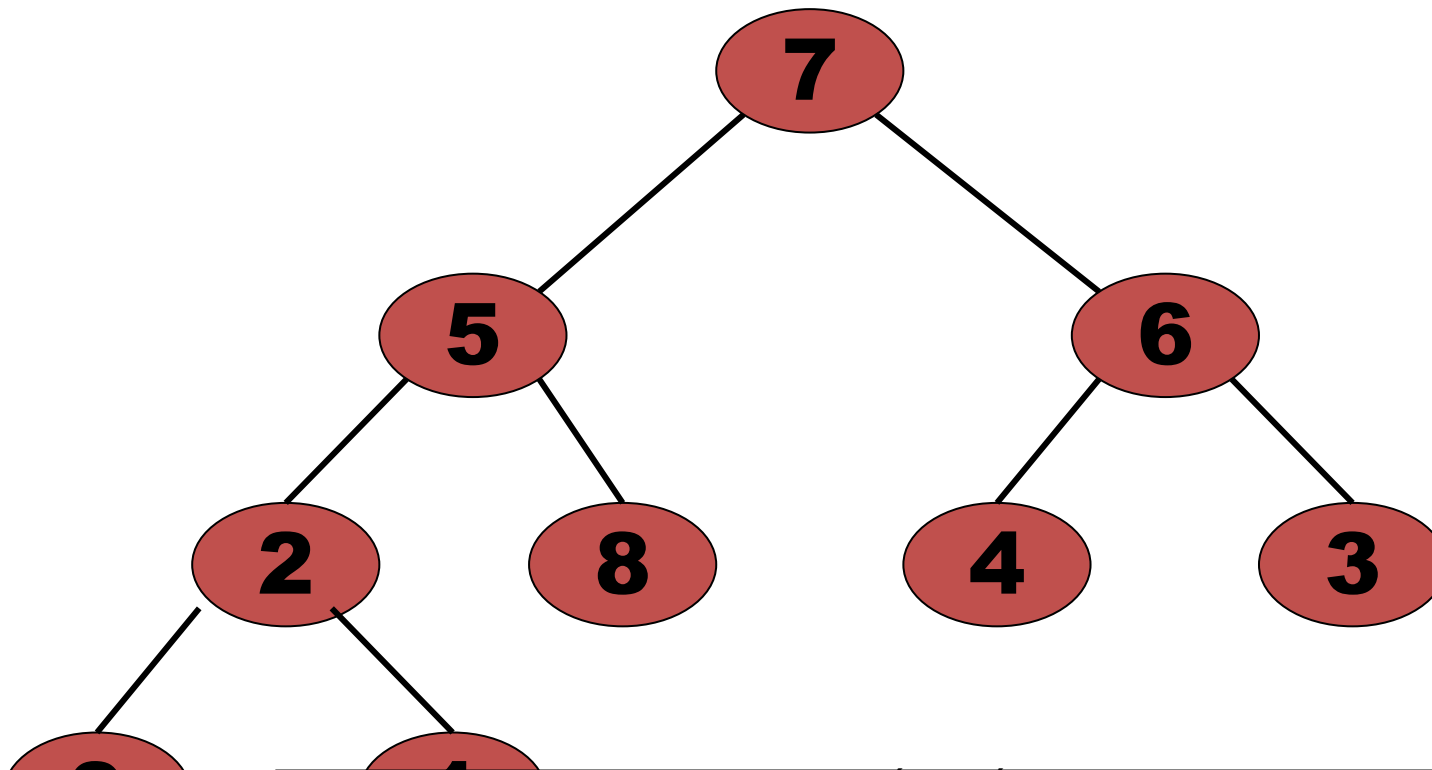
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Ejemplo (2)



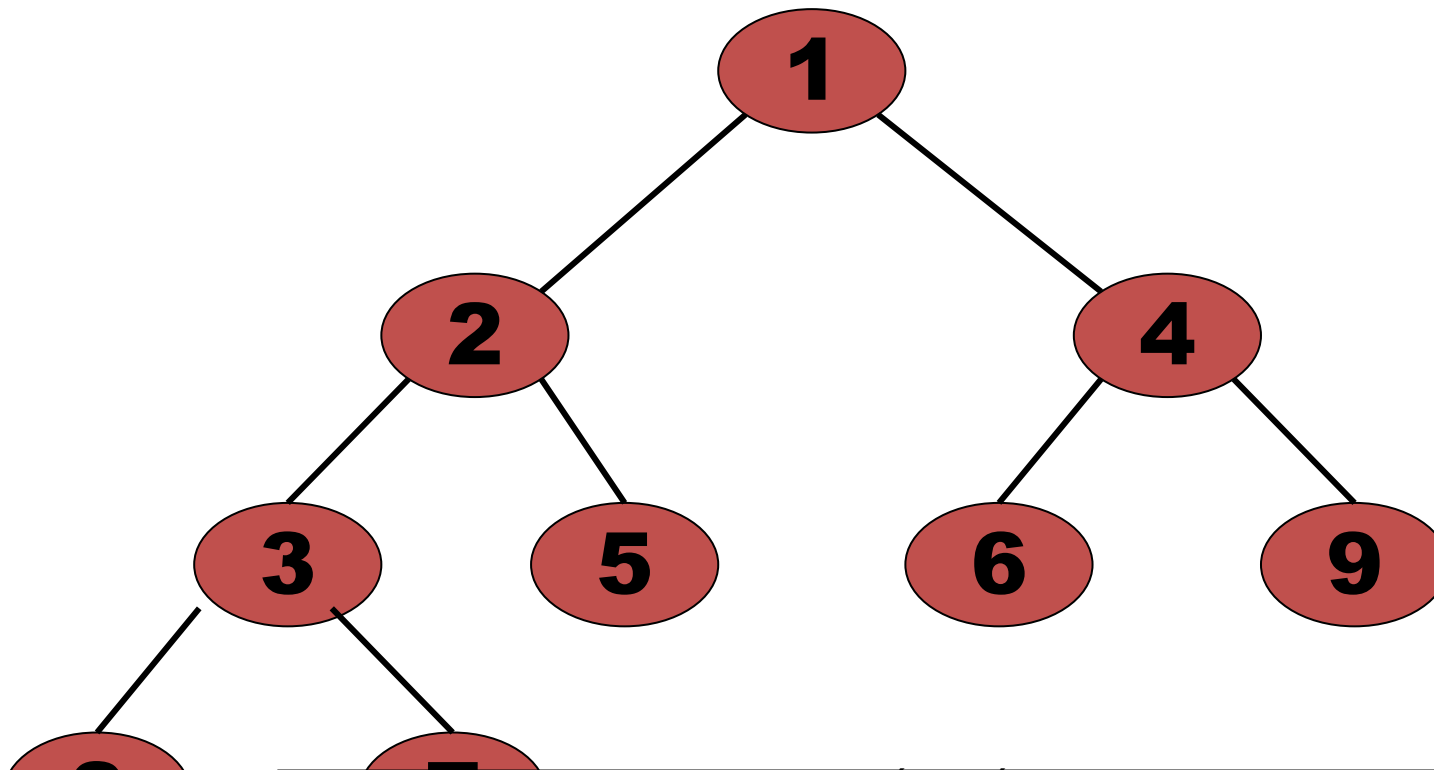
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Ejemplo (3)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

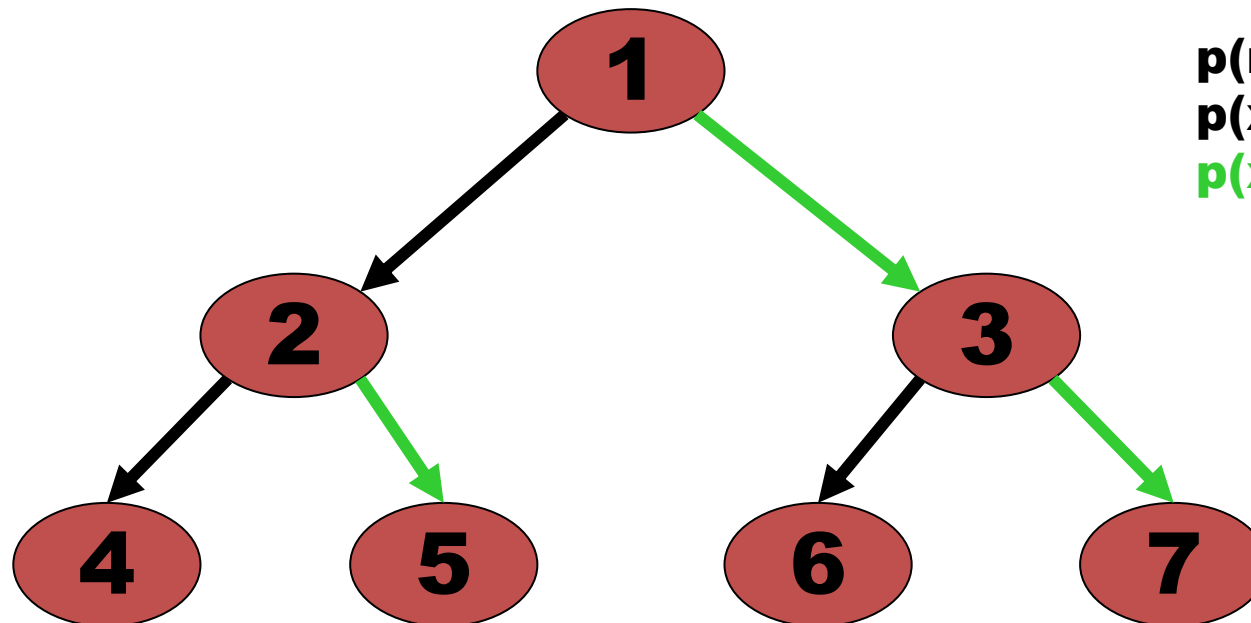
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Implementación basada en secuencias



$$\begin{aligned} p(\text{root}) &= 1 \\ p(\text{x.left}) &= 2 * p(\text{x}) \\ p(\text{x.right}) &= 2 * p(\text{x}) + 1 \end{aligned}$$

Cartagena99

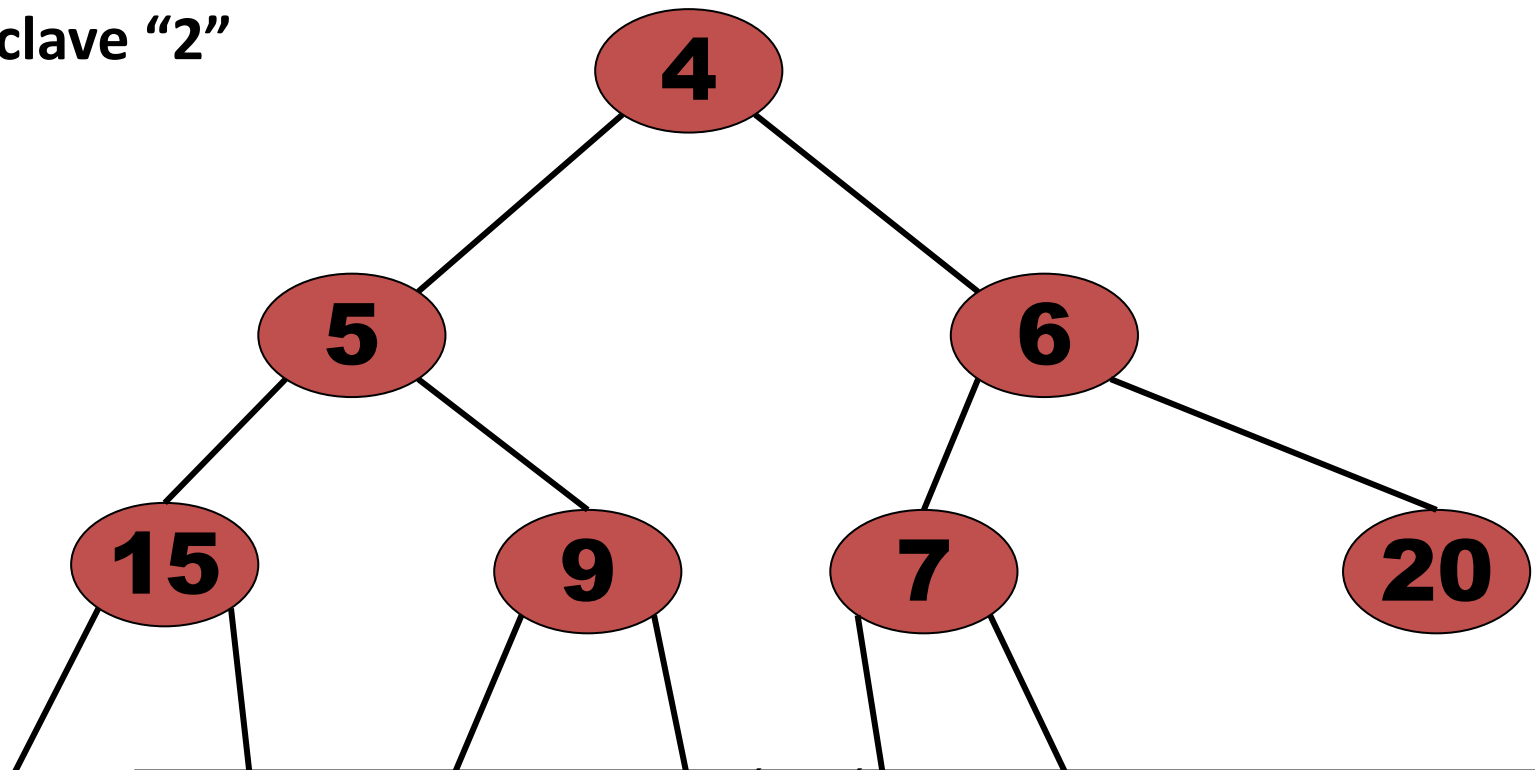
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Insertar

Insertar elemento  
con clave "2"



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

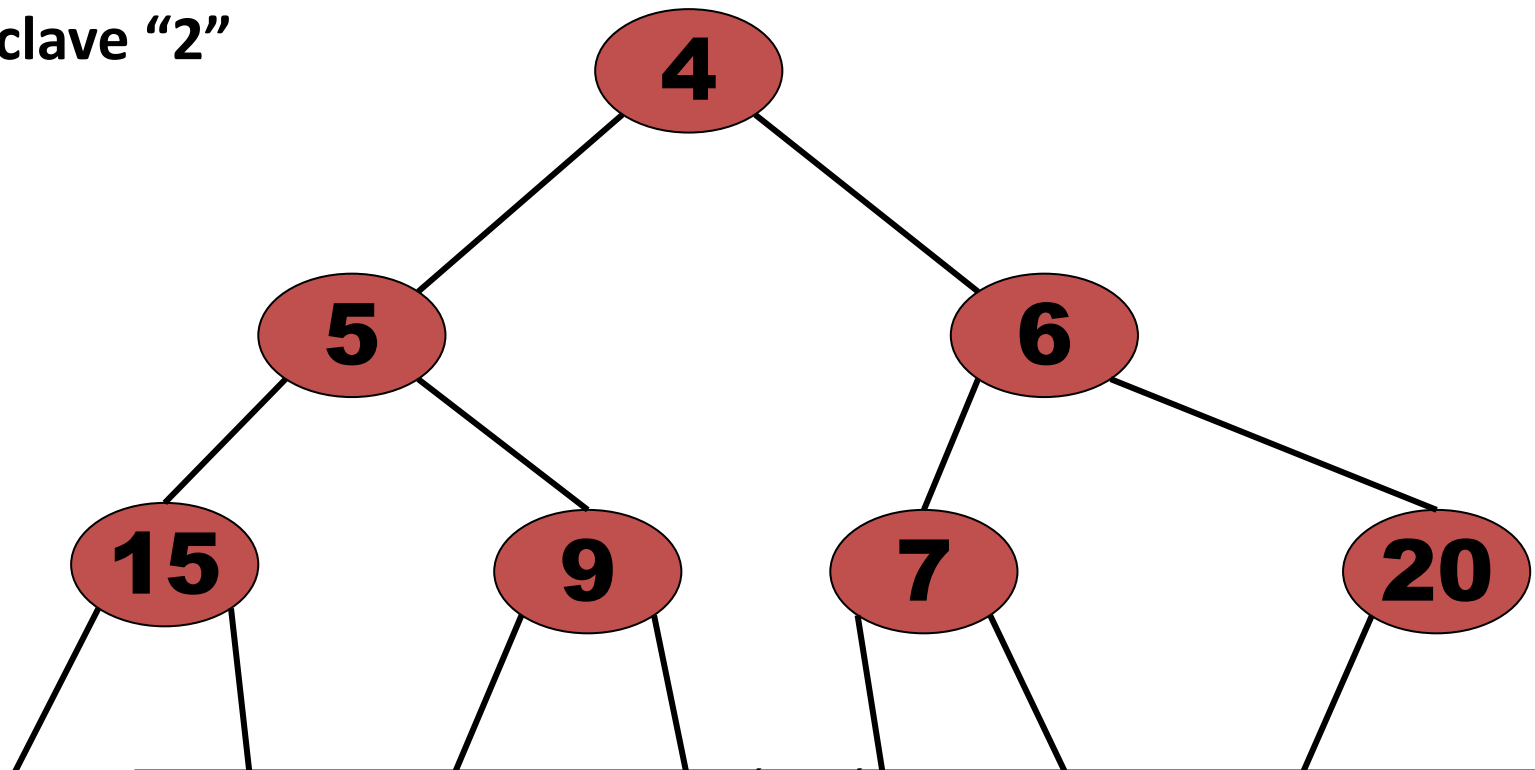
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Insertar

Insertar elemento  
con clave "2"



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

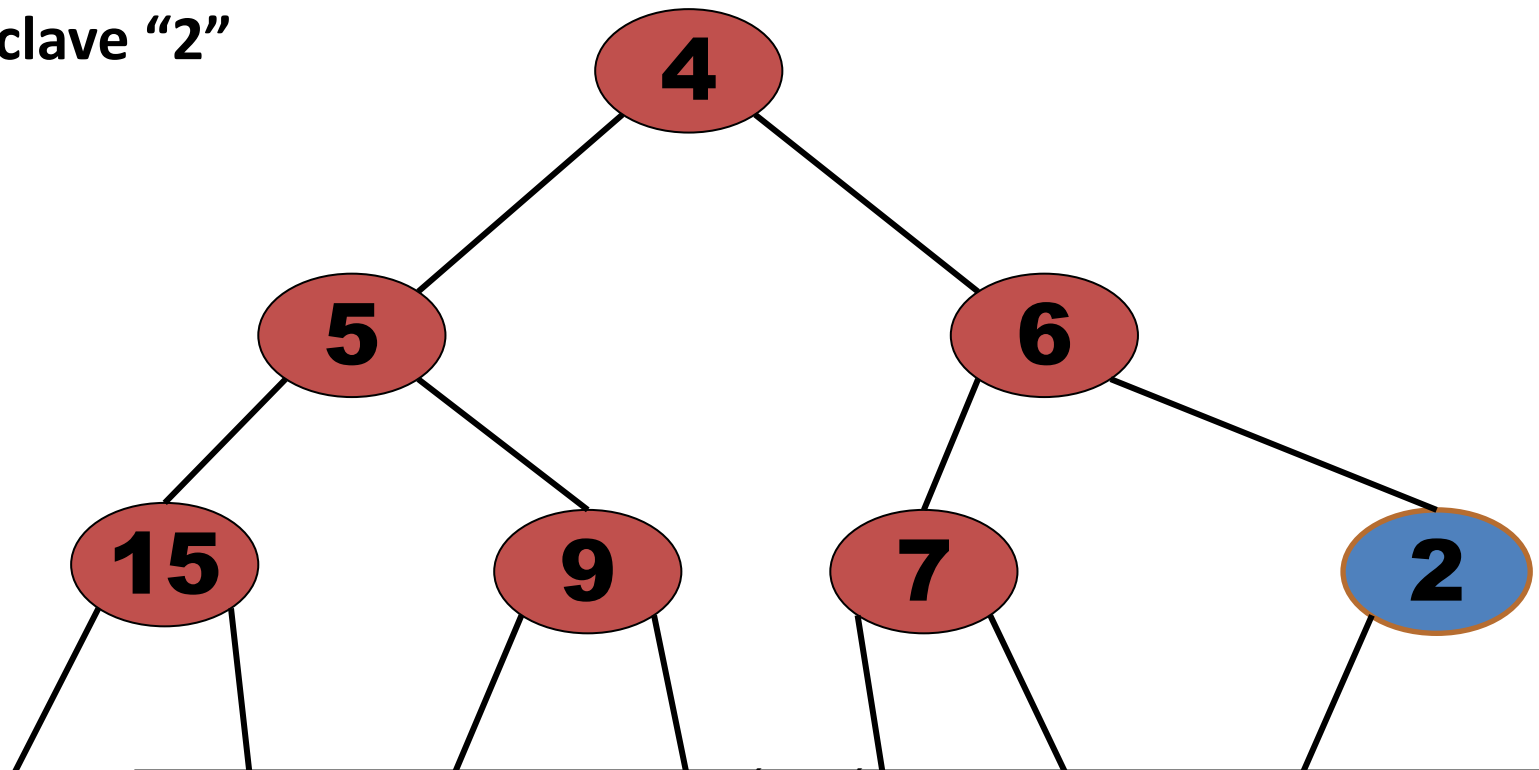
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Insertar

Insertar elemento  
con clave "2"



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

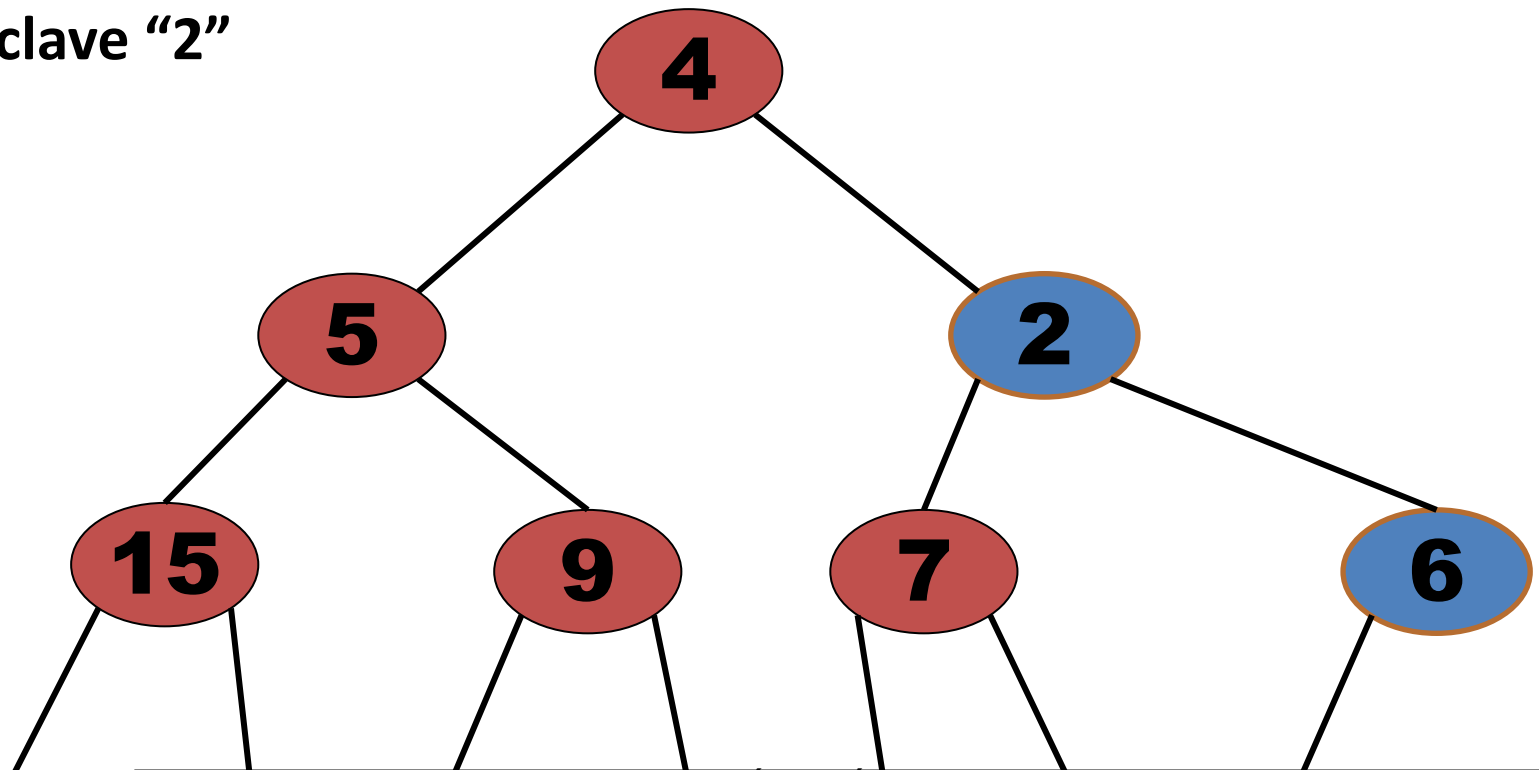
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Insertar

Insertar elemento  
con clave "2"



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

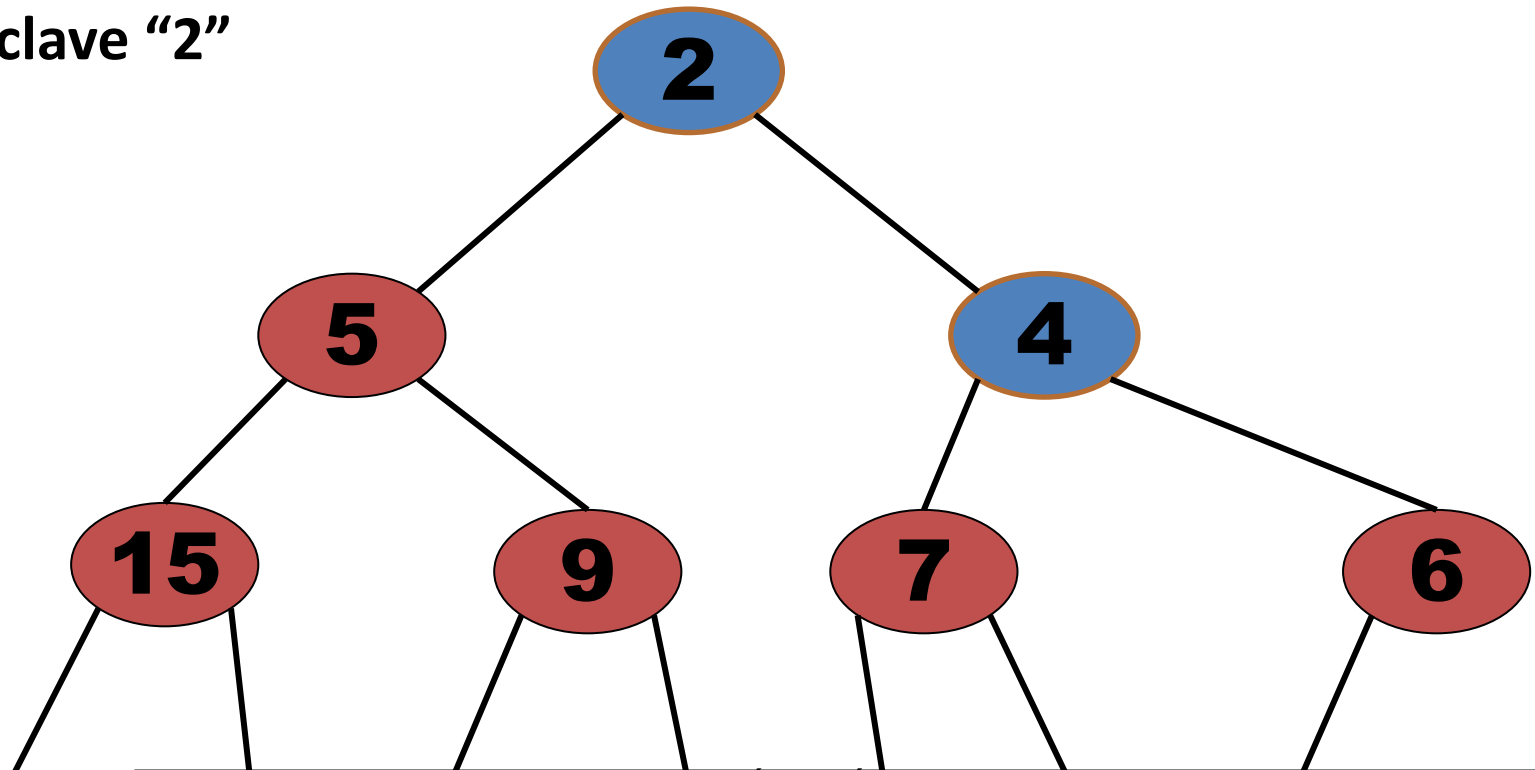
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Insertar

Insertar elemento  
con clave "2"



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

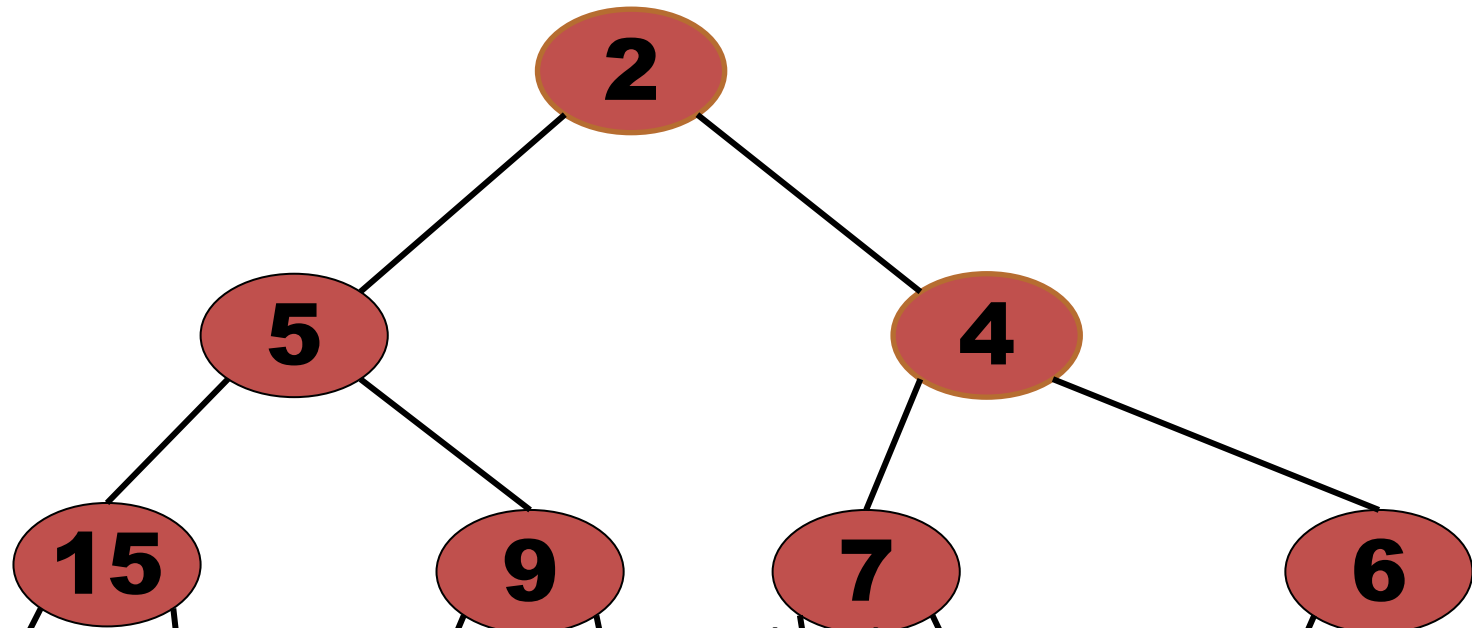
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Ejercicio 6



- Dado el siguiente montículo, inserta tres elementos con claves 3, 8 y 1.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

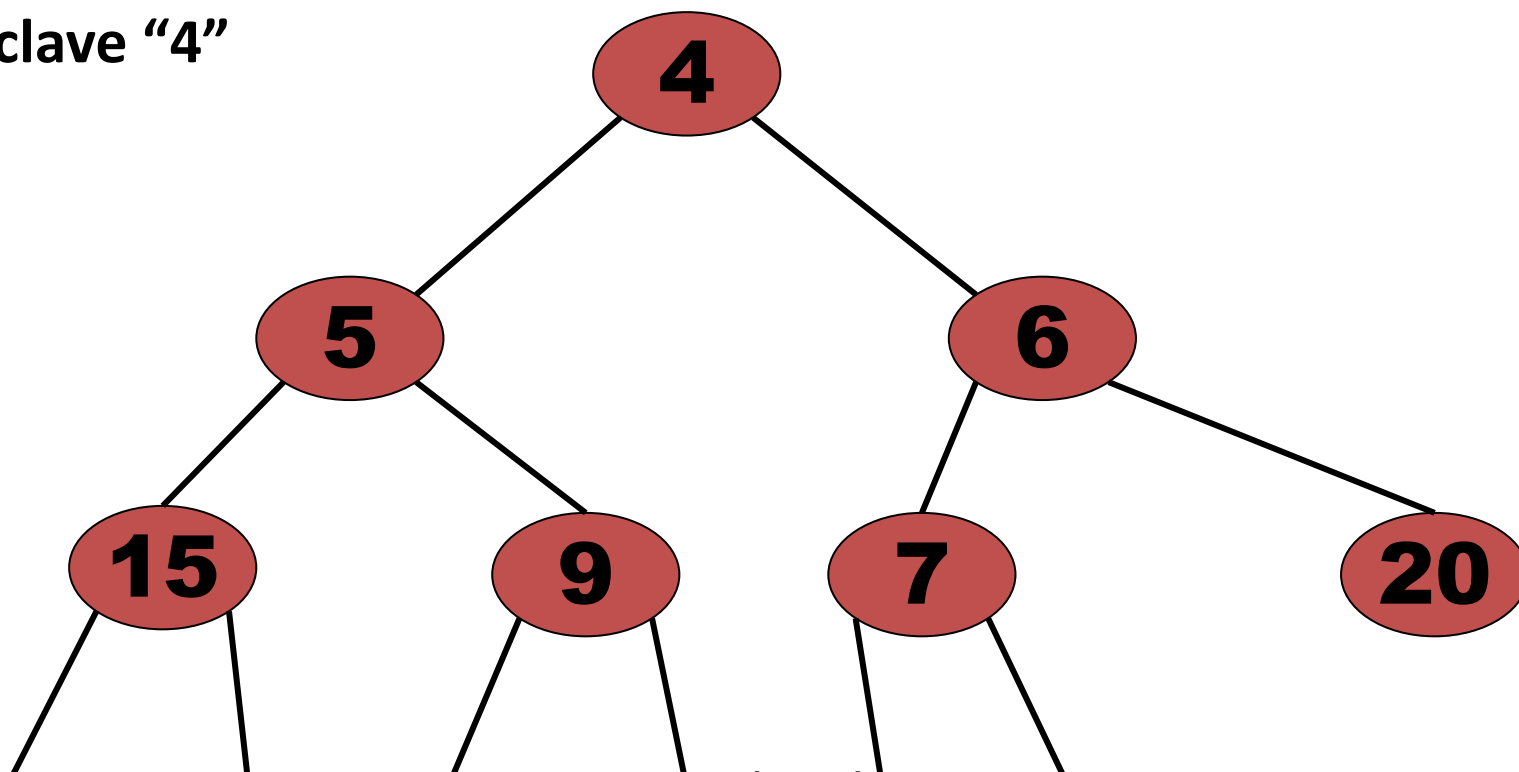
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

10 23 14 12 11 8 20

# Eliminar

Eliminar elemento  
con clave "4"



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

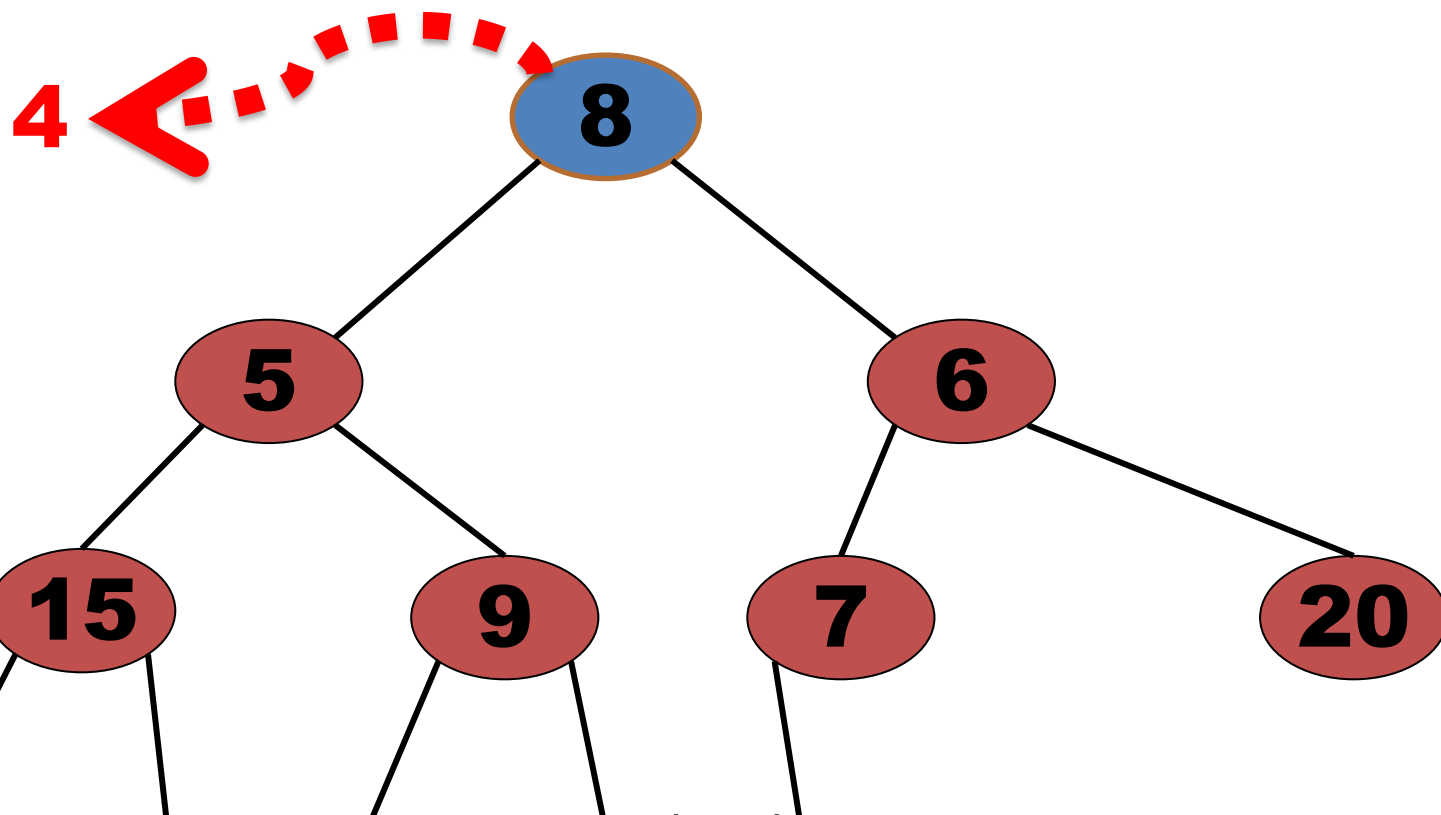
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Eliminar



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

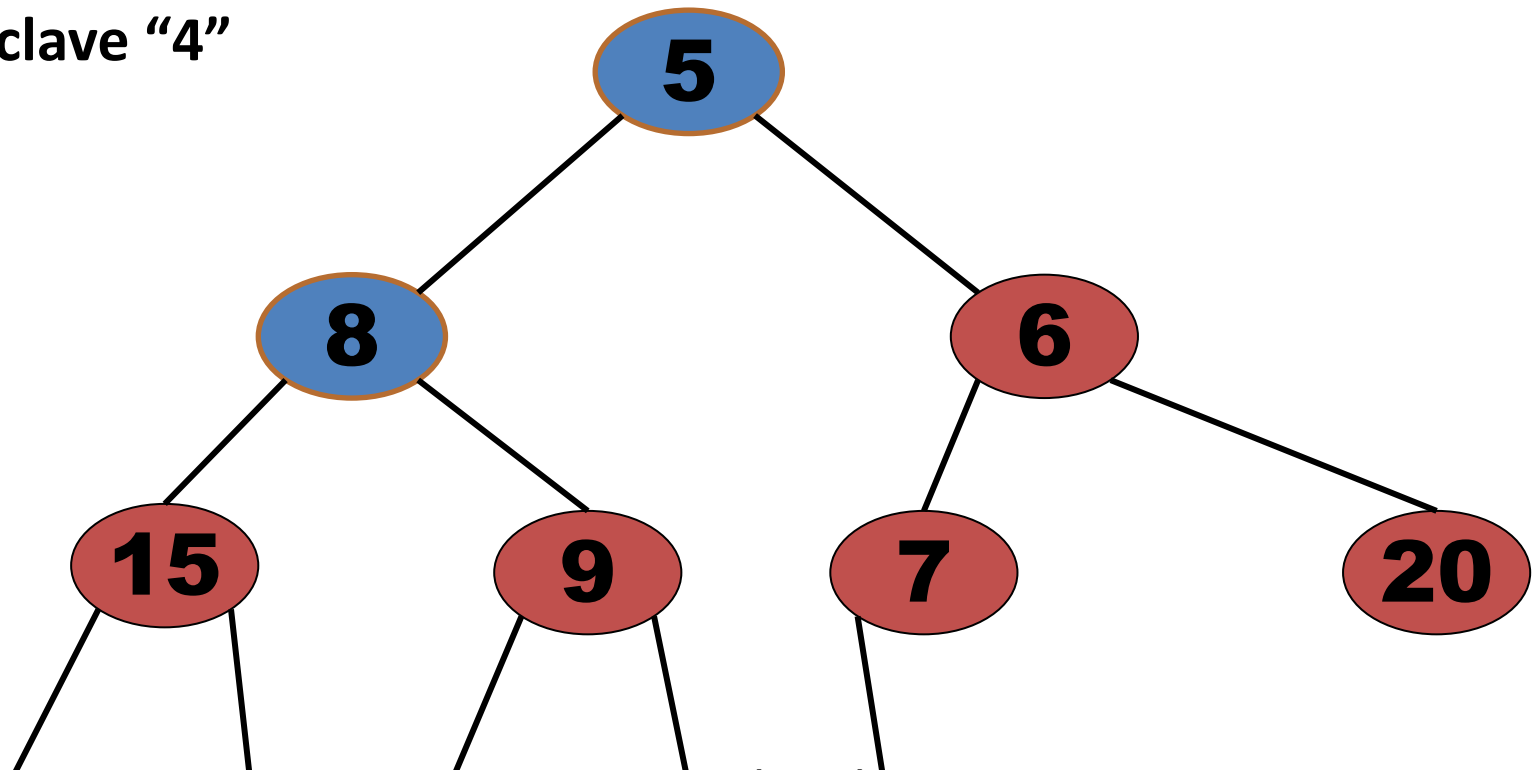
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Eliminar

Eliminar elemento  
con clave "4"



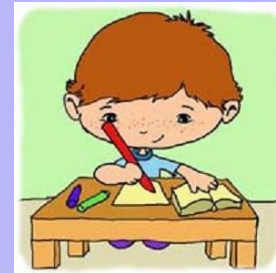
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

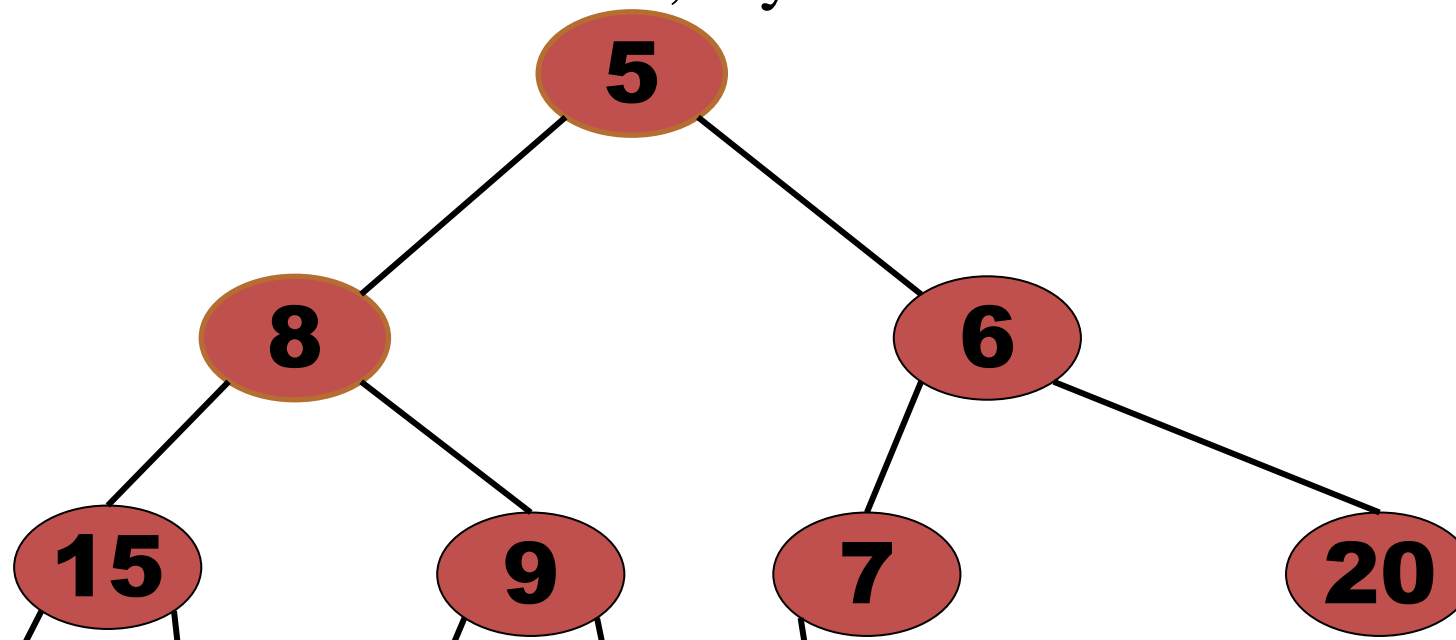
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Ejercicio 7



- Dado el siguiente montículo, elimina tres elementos con claves 15, 5 y 7.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Ejemplo

## Montículo - Cola con prioridad

add:

controls:

o/p:  $H[1..6] = [8][3\ 6][2\ 1\ 5]$

```
      | 6-----|
      |         |
      |         | 5-----|
8-----|         |
      |         | 1-----|
      |         | 2-----|
      |         |
```

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

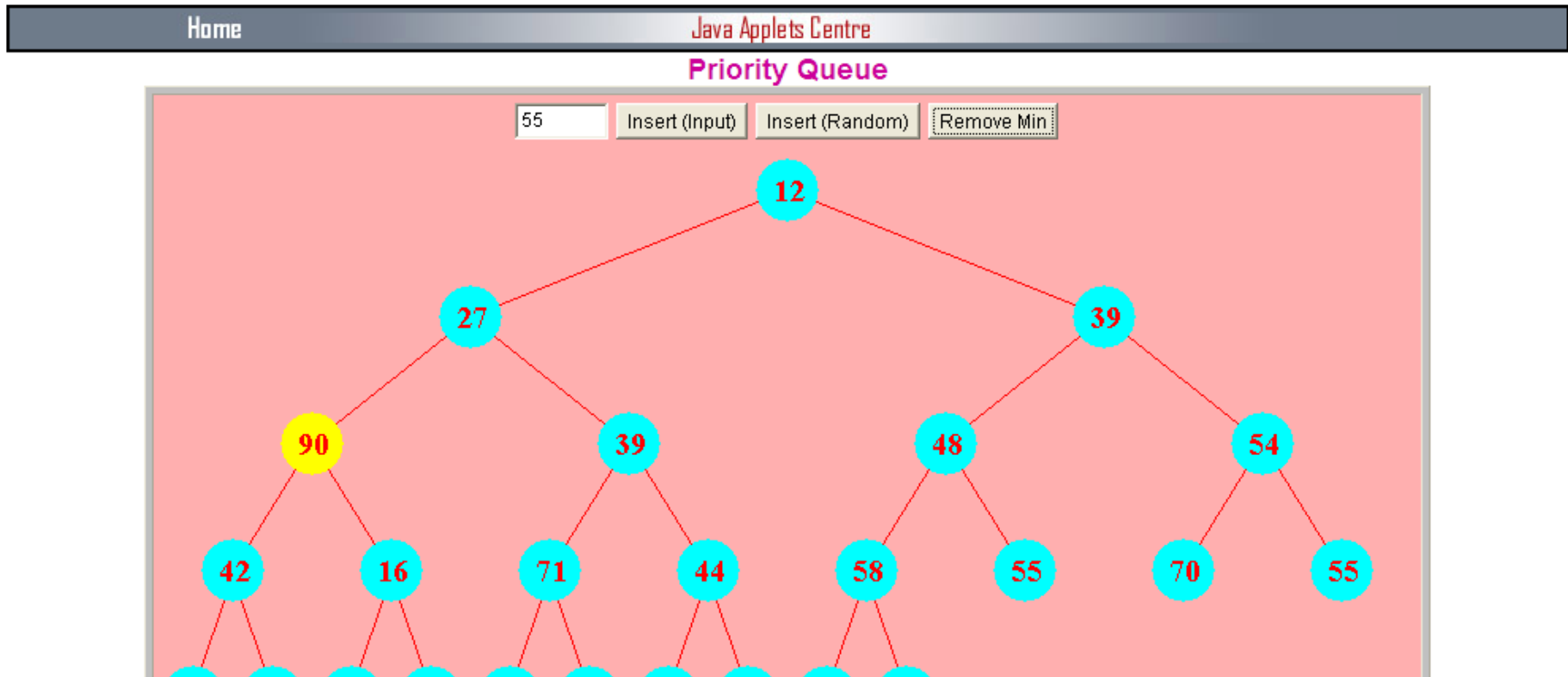
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

<http://www.csse.monash.edu.au/~llloyd/llideAlqDS/Priority-Q/>

Cartagena99

# Ejemplo

## Montículo - Cola con prioridad



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

<http://www.cosc.canterbury.ac.nz/mukundan/dsa/MinHeapApplet.html>