Tema I. Números reales.

Índice general

Capítulo 1. Tema I. Números reales. 5
1. Preliminares 5
2. Introducción a los números reales. 16
3. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ 27
4. Ejercicios del tema. 38

Capítulo 1

Tema I. Números reales.

Este capítulo está compuesto de tres bloques, en el primer bloque, detallaremos algunas notaciones que emplearemos durante el curso, en el segundo bloque, describiremos los conceptos más importantes relacionados con los números reales y, en el tercer bloque, trabajaremos con el espacio euclídeo n-dimensional.

Adicionalmente, al final del tema, se encuentra una colección de ejercicios relacionados con los contenidos del tema.

1. Preliminares

Comenzaremos la primera parte del tema, recordando algunos conceptos y notaciones que emplearemos durante el curso.

1.1. Notación matemática. La matemática se apoya en un lenguaje simbólico formal que sigue una serie de convenciones propias. Los símbolos representan un concepto, una operación, una entidad matemática según ciertas reglas. Estos símbolos no deben considerarse abreviaturas, sino entidades con valor propio y autónomo. En esta sección presentaremos los símbolos más comunes que se emplearán durante el curso.

1.1.1. Conjuntos. En matemáticas, un conjunto es una colección de objetos diferenciados considerada como un objeto en sí. Es decir, una colección de objetos considerada como una única entidad se considera un conjunto. A los objetos que forman la colección se les denomina elementos del conjunto. En general, los elementos de un conjunto se representan por letras minúsculas, mientras que los propios conjuntos se suelen representar por letras mayúsculas. Normalmente, para describir un conjunto, se suelen poner entre llaves los elementos del mismo. Por ejemplo, el conjunto A formado por los números 1, 2 y 3 se denota en matemáticas como:

$$A = \{1, 2, 3\}. \tag{1}$$

Otro ejemplo, podría ser el conjunto B formado por los números 1, 2, 3, 4 que en notación matemática se escribiría:

$$B = \{1, 2, 3, 4\}. \tag{2}$$

En teoría de conjuntos se definen las siguientes operaciones básicas (para los ejemplos se emplean los conjuntos A y B definidos, respectivamente por (1) y (2)):

Operación	Notación	Se lee	Ejemplo
Pertenencia	$x \in A$	x pertenece a A	$1 \in A$
No pertenencia	$x \notin A$	x no pertenece a A	$4 \notin A$
Inclusión	$A \subset B$	A está contenido en B	$A \subset B$
Inclusión	$B \supset A$	B contiene a A	$B \supset A$
Inclusión	$A \subseteq B$	A está contenido o es igual a B	$A \subseteq B$
Inclusión	$B \supseteq A$	B contiene o es igual a A	$B \supseteq A$
Unión	$A \cup B$	La unión de A con B	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
Intersección	$A \cap B$	La intersección de A con B	$A \cap B = \{1, 2, 3\}$
Producto cartesiano	$A \times B$	El producto cartesiano de A por B	$A \times B = \{(a, b) \; : \; a \in A, \; b \in B\}$

Además de las operaciones básicas anteriores, destacamos la diferencia de conjuntos y el complementario de un conjunto en otro.

La diferencia de A menos B (o entre A y B) es otro conjunto $A \setminus B$ (o también $A - B$) cuyos elementos son todos aquellos elementos de A que no lo sean de B:

$$A \setminus B = \{x \in A \,:\, x \notin B\}. \tag{3}$$

Por ejemplo, para los conjuntos A y B definidos en (1) y (2):

$$A \setminus B = \emptyset, \quad B \setminus A = \{4\}.$$

Por último, definiremos el concepto de complementario de un conjunto en un conjunto dado. Para ello, supongamos que tenemos un conjunto C, y sea D un subconjunto de C, esto es, $D \subset C$, se define el complementario de D en C y se denotará como D^c (o también $\overline{D}$) como el conjunto formado por los elementos de C que no están en D:

$$D^c = \{x \in C \,:\, x \notin D\},$$

o lo que es lo mismo, $D^c = C \setminus D$. Por ejemplo, consideremos el conjunto de los números reales positivos:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\} \subset C = \mathbb{R}, \tag{4}$$

el complementario de dicho conjunto en $\mathbb{R}$ será:

$$D^c = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \notin D\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < 0\}. \tag{5}$$

Un resultado muy importante relacionado con la teoría de conjuntos que merece ser destacado, son las llamadas Leyes de Morgan, que establecen la relación existente entre el complementario de la intersección con la unión de los complementarios y el complementario de la unión como la intersección de los complementarios:

1. $(B \cap D)^c = B^c \cup D^c$.
2. $(B \cup D)^c = B^c \cap D^c$.

1.1.2. Expresiones. Las expresiones matemáticas son comunmente empleadas en los enunciados y las demostraciones de teoremas, proposiciones, propiedades, ... A continuación pasamos a listar los más importantes:

Expresión	Notación	Se lee	Ejemplo
Igualdad	$x = y$	x es igual a y	$2 = 2$
Menor que	$x < y$	x es menor que y	$1 < 2$
Menor o igual que	$x \leq y$	x es menor o igual que y	$1 \leq 1$
Mayor que	$x > y$	x es mayor que y	$2 > 1$
Mayor o igual	$x \geq y$	x es mayor o igual que y	$2 \geq 2$
Aproximado	$x \approx y$	x es aproximadamente y	$1{,}0001 \approx 1$
Equivalente	$x \equiv y$	x es equivalente a y	$1 \equiv \frac{2}{2}$
Cuantificador universal	$\forall x \ldots$	Para todo x	$\forall \epsilon > 0$
Cuantificador existencial	$\exists x$	Existe por lo menos un x	$\exists N \in \mathbb{N}$
Cuantificador existencial con unicidad	$\exists!\, x$	Existe un único x	$\exists!\, x \in A$
Tal que	$x \mid y$ (x t.q. y)	x, tal que y	$\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N$
Implicación	$p \Rightarrow q$	p implica q	$[a \leq b] \Rightarrow [a + 1 \leq b + 1]$
Doble implicación	$p \Leftrightarrow q$	p si y sólo si q	$\frac{a}{2} \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 2$

Por ejemplo, la definición de que el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es l:

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \geq N \quad |x_n - l| \leq \epsilon, \tag{6}$$

es un ejemplo de expresión matemática compuesta por varias expresiones simples. Si tenemos en cuenta el cuadro anterior, la definición de límite se puede leer de la siguiente forma:

Para todo epsilon mayor que cero existe un número natural N, tal que para todo n mayor o igual que N, el valor absoluto de la diferencia de x_n y l es menor o igual que epsilon.

1.2. Potencias y propiedades. Dado un número real $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y un número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define la potencia n-ésima de a como el número resultante de multiplicar a n veces consigo mismo:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}. \tag{7}$$

Resulta evidente que $a^1 = a$; además, por convenio, $a^0 = 1$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} (-3)^2 &= (-3)\cdot(-3) = 9, \\ (-3)^3 &= (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27, \\ 3^3 &= 3\cdot 3\cdot 3 = 27. \end{aligned} \tag{8}$$

Dado un número real $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y un número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define la potencia inversa n-ésima de a como el inverso para la multiplicación del número resultante de multiplicar a n veces consigo mismo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \tag{9}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 3^{-2} &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \\ (-3)^{-3} &= \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27}, \\ 3^{-3} &= \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a,\, b \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{10}$$

Dado un número real $a \in \mathbb{R}$ y un número racional $p = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, se define $a^{n/m}$ como el siguiente número:

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}. \tag{11}$$

Por ejemplo:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
3^{4/5} &= \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81},\\
(-3)^{3/2} &= \sqrt{(-3)^3} = \sqrt{-27} \notin \mathbb{R},\\
(-3)^{4/2} &= \sqrt{(-3)^4} = \sqrt{81},\\
\left(\frac{5}{3}\right)^{-2/3} &= \left(\frac{3}{5}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{3^2}{5^2}}.
\end{aligned}
$$

Dado un número real $a \in \mathbb{R}$ y un número $r \in \mathbb{R}$, se define a^r de la siguiente forma:

$$
(13)\qquad a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n},
$$

donde $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ es tal que:

$$
(14)\qquad \lim_{n\to\infty} r_n = r.
$$

La existencia de la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está garantizada por una propiedad del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

Destacamos las siguientes propiedades de las potencias. Dados a, b, n, m elementos de $\mathbb{R}$ se tiene que:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,
3. $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$,
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Por ejemplo:

$$
(15)\qquad \frac{3^{\frac{4}{5}}}{3^{-\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{4}{5}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{13}{10}}.
$$

1.3. Logaritmos y sus funciones inversas. Dado un número real positivo $x > 0$ (argumento), la función logaritmo le asigna el exponente $\alpha \in \mathbb{R}$ (o potencia) a la que el número fijo $b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$ y $b \neq 1$, (base) se ha de elevar para obtener dicho argumento. Es la función inversa de $x = b^\alpha$. Esta función se escribe como $\alpha = \log_b(x)$, lo que permite obtener α:

$$
(16)\qquad \log_b(x) = \alpha \Leftrightarrow x = b^\alpha.
$$

Esto es, el logaritmo en base b de x es igual a α si y solamente si b elevado a α es x.

Por ejemplo $\log_{10}(100) = 2$ ya que

$$
(17)\qquad 2 = \log_{10}(100) \Leftrightarrow 10^2 = 100.
$$

Se denomina logaritmo neperiano de $x > 0$ y lo denotaremos por $\log(x)$ o por $\ln(x)$ al logaritmo en base e de x.

Las propiedades más importantes de los logaritmos son las siguientes:

1. El logaritmo de su base es 1; $\log_b(b) = 1$ ya que $b^1 = b$.
2. El logaritmo de 1 es cero (independientemente de la base); $\log_b(1) = 0$ ya que $b^0 = 1$ para cualquier número real.
3. Si $b > 1$ y $0 < a < 1$, el logaritmo de a es un número negativo.
4. Si $0 < b < 1$ y $0 < a < 1$, el logaritmo de a es un número positivo.
5. $\log_b(c \cdot d) = \log_b(c) + \log_b(d)$ para cualquier base b y para cualquier par de números reales positivos c y d.
6. $\log_b(\frac{c}{d}) = \log_b(c) - \log_b(d)$ para cualquier base b y para cualquier par de números reales positivos c y d.
7. $\log_b(a^x) = x\log_b(a)$ para cualquier base b y para cualquier número real positivo a.
8. $\log_b(\sqrt[x]{a}) = \dfrac{\log_b(a)}{x}$ para cualquier base b y cualquier número real x positivo.

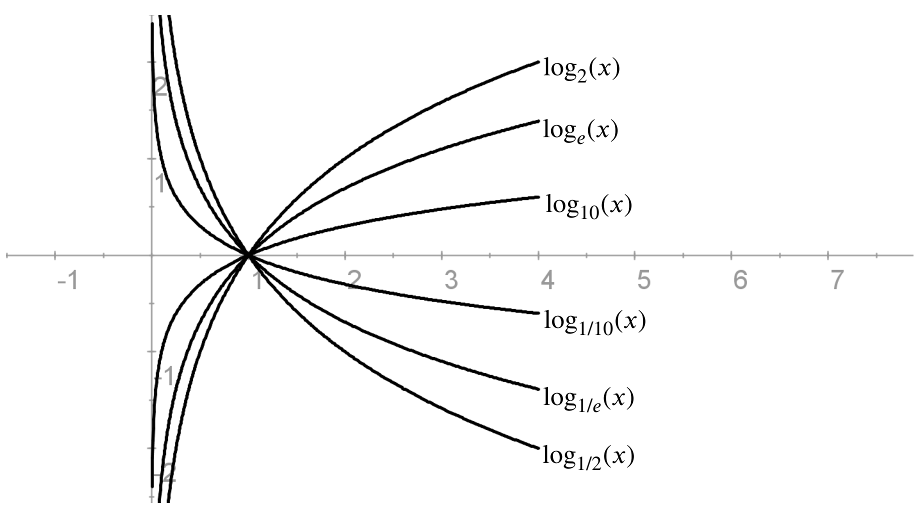
Por último, son comunes los logaritmos en base e (logaritmo neperiano), en base 10 (logaritmo común), base 2 (logaritmo binario). La elección de un determinado número como base de los logaritmos no es crucial, ya que todos son proporcionales entre sí. La siguiente fórmula es útil para realizar los cambios de base:

$$\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)} \quad \forall x, b, k > 0, \quad \text{con} \quad b, k \neq 1. \tag{18}$$

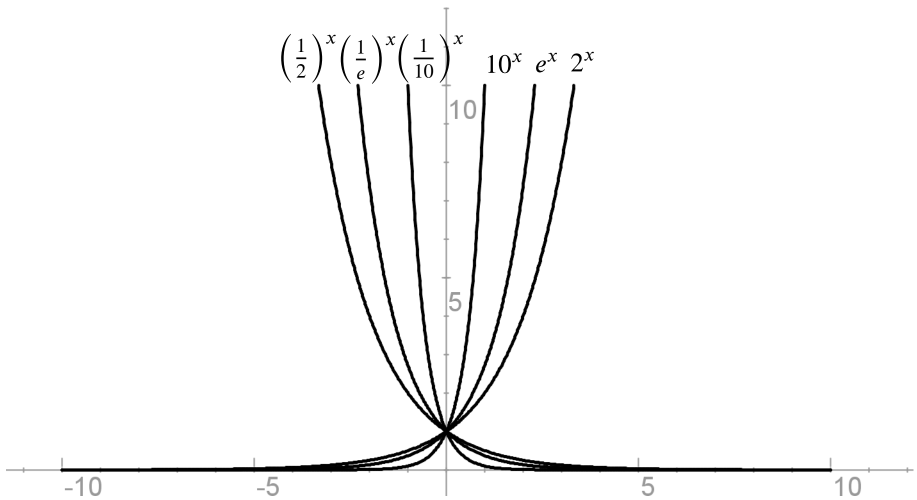
Como caso particular de la expresión anterior tenemos, si tomamos $k = x$ (siempre y cuando $k \neq 1$):

$$\log_b(x) = \frac{1}{\log_x(b)}. \tag{19}$$

Veamos a continuación el comportamiento gráfico de la función logaritmo $\log_a(x)$ en las bases $a = 1/10$, $1/e$, $1/2$, 2, e y 10.

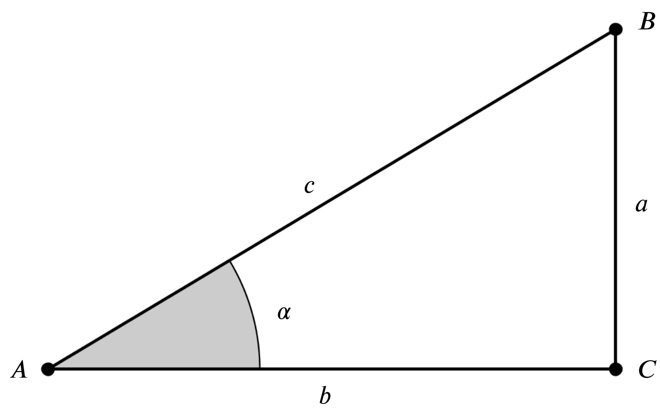


Por último, el comportamiento gráfico de la inversa de la función logaritmo, a^x, en las bases $a = 1/10$, $1/e$, $1/2$, 2, e y 10.



1.4. Trigonometría. La trigonometría como rama de las matemáticas realiza su estudio en la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Para el desarrollo de este fin se definieron una serie de funciones que han sobrepasado su fin original, convirtiéndose en elementos matemáticos estudiados en sí mismos y con aplicaciones en los campos más diversos.

Definición 1.1. ***Razones trigonométricas.*** *Consideremos el siguiente triángulo rectángulo:*



Se define:

- ***Seno.*** *El seno (abreviado como* sen*) es la razón entre el cateto opuesto sobre la hipotenusa,*

(20) $$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}.$$

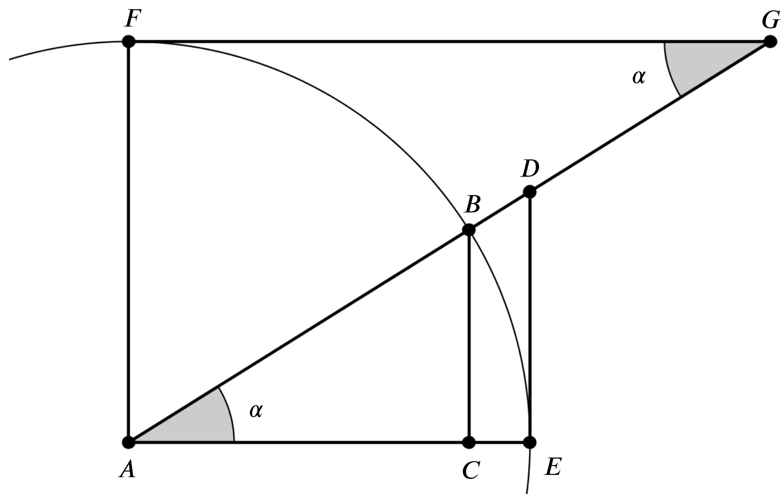
- ***Coseno.*** *El coseno (abreviado como* cos*) es la razón entre el cateto adyacente sobre la hipotenusa,*

(21) $$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}.$$

- ***Tangente.*** *La tangente (abreviado como* tan*) es la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente,*

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}. \tag{22}$$

Definición 1.2. ***Razones trigonométricas recíprocas.***



- ***Cosecante.*** *La Cosecante: (abreviado como* csc*) es la razón recíproca de seno, o también su inverso multiplicativo:*

$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{c}{a}. \tag{23}$$

En el esquema anterior su representación geométrica es:

$$\csc(\alpha) = \overline{AG}. \tag{24}$$

- ***Secante.*** *La Secante: (abreviado como* sec*) es la razón recíproca de coseno, o también su inverso multiplicativo:*

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{c}{b}. \tag{25}$$

En el esquema anterior su representación geométrica es:

$$\sec(\alpha) = \overline{AD}. \tag{26}$$

- ***Cotangente*** *La Cotangente: (abreviado como* cot*) es la razón recíproca de la tangente, o también su inverso multiplicativo:*

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{b}{a}. \tag{27}$$

En el esquema anterior su representación geométrica es:

$$\cot(\alpha) = \overline{GF}. \tag{28}$$

Definición 1.3. ***Funciones trigonométricas inversas.*** *En trigonometría, cuando el ángulo se expresa en radianes (dado que un radián es el arco de circunferencia de longitud igual al radio), suele denominarse arco a cualquier cantidad expresada en radianes; por eso las funciones inversas se denominan con el prefijo arco.*

- ***Arco seno.*** *Es la función inversa del seno:*

$$y = \operatorname{sen}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arc\,sen}(y). \tag{29}$$

- ***Arco coseno.*** *Es la función inversa del coseno:*

$$y = \cos(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arc\,cos}(y). \tag{30}$$

- ***Arco tangente.*** *Es la función inversa de la tangente:*

$$y = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(y). \tag{31}$$

Conviene tener en cuenta que las funciones arco seno, arco coseno y arco tangente son las funciones inversas de las funciones seno, coseno y tangente; pero no debemos confundir, por ejemplo, $\operatorname{arc\,sen}(x)$ con $1/\operatorname{sen}(x)$ como podemos ver en los siguientes ejemplos numé ricos:

- Por un lado, sabemos que $\operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ por lo que $\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{(2)}/2) = \pi/4$; además, $1/\operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}$.
- Puesto que la función $\operatorname{sen}(x)$ toma sus valores entre -1 y 1 entonces no existe $\operatorname{arc\,sen}(5\pi/2)$; además, $1/\operatorname{sen}(5\pi/2) = 1$.

Proposición 1.1. ***Identidades trigonométricas.*** *Una identidad es una igualdad en que se cumple para todos los valores permisibles de la variable. Se tienen las siguientes identidades fundamentales*

- ***Recíprocas.***

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\csc(\alpha) &= 1. \\ \cos(\alpha)\cdot\sec(\alpha) &= 1. \\ \tan(\alpha)\cdot\cot(\alpha) &= 1. \end{aligned} \tag{32}$$

- ***De división.***

$$\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}. \tag{33}$$

- ***Por el teorema de Pitágoras.***

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.\\
&\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha).\\
&1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha).
\end{aligned} \tag{34}$$

- ***Suma y diferencia de dos ángulos.***

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).\\
&\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).\\
&\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).\\
&\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).\\
&\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}.\\
&\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}.
\end{aligned} \tag{35}$$

- ***Suma y diferencia del seno y coseno de dos ángulos.***

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\\
&\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\\
&\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\\
&\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).
\end{aligned} \tag{36}$$

- ***Producto del seno y coseno de dos ángulos.***

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}.\\
&\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.\\
&\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}.\\
&\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}.
\end{aligned} \tag{37}$$

- ***Ángulo doble.***

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha). \\ &\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha). \\ &\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}. \end{aligned} \tag{38}$$

- ***Ángulo mitad.***

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}. \\ &\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}. \\ &\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}. \end{aligned} \tag{39}$$

Observación 1.1. *Muchas de las identidades trigonométricas son muy simples de deducir empleando la fórmula de Euler:*

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha) \quad (i^2 = -1), \tag{40}$$

y las propiedades de las funciones exponenciales. Por ejemplo, puesto que:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha), \\ e^{i\beta} &= \cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta), \end{aligned} \tag{41}$$

al multiplicar las expresiones anteriores resulta, por un lado que

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \tag{42}$$

y por otro

$$\begin{aligned} &(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))(\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta)) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + i(\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)). \end{aligned} \tag{43}$$

Si igualamos las expresiones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta), \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta). \end{aligned} \tag{44}$$

2. Introducción a los números reales.

Comenzaremos esta sección repasando algunos conceptos relacionados con los diversos subconjuntos de los que está compuesto el conjunto de los números reales.

2.1. Los números naturales $\mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, N, \cdots\}. \tag{45}$$

En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se definen las siguientes operaciones algebraicas:

- **Suma:**

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\longrightarrow m + n, \end{aligned} \tag{46}$$

donde, $m + n$ se define por recurrencia de la siguiente forma:

$$m + n = (m + (n - 1)) + 1, \quad n > 1. \tag{47}$$

Se tiene que $(\mathbb{N}, +)$ cumple las siguientes propiedades:
1. Conmutativo: $m + n = n + m$, $\forall m,\ n \in \mathbb{N}$.
2. Asociativo: $(m + n) + l = m + (n + l)$, $\forall m,\ n,\ l \in \mathbb{N}$.

- **Producto:**

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\longrightarrow m \cdot n, \quad n > 1, \end{aligned} \tag{48}$$

donde, $m \cdot n$ se define por recurrencia de la siguiente forma:

$$m \cdot n = (m \cdot (n - 1)) + m, \quad n > 1, \tag{49}$$

Se tiene que $(\mathbb{N}, \cdot)$ cumple las siguientes propiedades:
1. Elemento neutro: $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$.
2. Conmutativo: $m \cdot n = n \cdot m$, $\forall m,\ n \in \mathbb{N}$.
3. Asociativo: $(m \cdot n) \cdot l = m \cdot (n \cdot l)$, $\forall m,\ n,\ l \in \mathbb{N}$.

Además, se tiene que la multiplicación distribuye sobre la suma, es decir:

$$m \cdot (n + l) = m \cdot n + m \cdot l, \quad \forall\, m,\ n,\ l \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

2.1.1. Principio de inducción matemática. Una de las propiedades más importante que destacamos de este conjunto de números es el llamado principio de *inducción matemática*. El principio de inducción matemática permite demostrar que se verifica una cierta propiedad P que varía siguiendo el conjunto de los números naturales. La idea es probar que la propiedad que queremos demostrar es válida para el primer valor y que si es cierta para un valor n cualquiera también será cierta para $n + 1$. Si estas dos afirmaciones son ciertas, entonces la propiedad es cierta para todo número natural. Formalmente, podemos formular el principio de inducción matemática de la siguiente forma: Supóngase que $P(n)$ significa que la propiedad P de cumple para el número natural n. Entonces el principio de inducción matemática afirma que $P(n)$ es verdad para todos los números naturales n siempre que:

- $P(1)$ sea verdad.
- Si $P(k)$ es verdad, también lo es $P(k + 1)$.

Ejemplo 1.1. *(Ejemplo de aplicación del principio de inducción matemática) La suma de los n primeros números naturales:*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \tag{51}$$

Para demostrar la igualdad anterior emplearemos el principio de inducción matemática:

- *Para $n = 1$ se cumple trivialmente.*
- *Supongamos que se cumple para $n = k$:*

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{52}$$

Se tiene entonces, sumando a ambos lados de la igualdad anterior $(k+1)$, que:

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned} \tag{53}$$

de donde deducimos que la fórmula también es válida para $n = k + 1$.

Observación 1.2. *En relación estrecha con las demostraciones por inducción están las definiciones recursivas. Por ejemplo, el número $n!$ (leído factorial de n) se define como el producto de todos los números naturales menores o iguales a n:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n. \tag{54}$$

Esto puede expresarse con más precisión como sigue:

1. $1! = 1$,
2. $n! = n \cdot (n-1)!$

Esta forma de definición hace ver la relación entre $n!$ y $(n-1)!$ de una forma explícita idealmente adecuada para las demostraciones por inducción.

Observación 1.3. *Debemos hacer notar que, en la definición que hemos dado del conjunto de los números naturales, el 0 no está presente. Algunos autores incluyen el 0 en el conjunto $\mathbb{N}$ y al conjunto $\mathbb{N} - \{0\}$ lo denotan por $\mathbb{N}^*$, siendo, por convenio, el factorial de 0 igual a la unidad 1 ($0! = 1$). En nuestro caso, tal y como remarcamos al comienzo de este párrafo, no incluiremos el 0 en el conjunto de los números naturales.*

Ejemplo 1.2. *Se cumple la siguiente desigualdad:*

$$2^n \leq (n+1)! \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{55}$$

Para demostrarlo, emplearemos el principio de inducción:

- *Para $n = 1$ se cumple trivialmente.*
- *Supongamos que se cumple para $n = k$:*

$$2^k \leq (k+1)! \tag{56}$$

Se tiene entonces, multiplicando a ambos lados de la igualdad anterior por 2 que:

$$
\begin{aligned}
2^k \cdot 2 &= (k+1)! \cdot 2 \\
&\leq (k+1)! \cdot (k+2) = (k+2)!
\end{aligned} \tag{57}
$$

de donde deducimos que la fórmula también es válida para $n = k + 1$.

2.2. Los números enteros $\mathbb{Z}$. Se define el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ como una extensión del conjunto de números naturales de forma que la ecuación $a + x = b$ tenga solución en $\mathbb{Z}$ para cualquier par de números $a, b \in \mathbb{N}$. O lo que es lo mismo, en $\mathbb{Z}$ todo elemento tiene opuesto para la suma:

$$
\mathbb{Z} = \{\cdots, -N, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, N, \cdots\}. \tag{58}
$$

Podemos extender de forma natural las operaciones $+$ y . definidas en el conjunto de los números naturales, (47) y (48), al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Se tienen las siguientes propiedades:

- **Suma:** Además de las enunciadas para $(\mathbb{N}, +)$, se tienen las siguientes:
  1. Elemento neutro: $\exists\, e \in \mathbb{Z}$ tal que $n + e = n, \forall\, n \in \mathbb{Z}$.
  2. Elemento opuesto: $\forall\, n \in \mathbb{Z}, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{Z}$, tal que $n + \overline{n} = 0$.
- **Producto:** Ninguna adicional con respecto a $(\mathbb{N}, \cdot)$.

2.2.1. Divisibilidad. Uno de los conceptos más importantes que destacamos dentro del anillo de los números enteros es el concepto de divisibilidad.

Definición 1.4. *Decimos que un número entero b es divisible entre un entero a (distinto de cero) si existe un entero c tal que:*

$$
b = a \cdot c. \tag{59}
$$

Se suele expresar de la forma a/b, que se lee a divide a b, o a es divisor de b, o también b es múltiplo de a.

Ejemplo 1.3. 6 *es divisible por* 3*, ya que* $6 = 3 \cdot 2$*; pero no es divisible por* 4*, pues no existe un entero c tal que* $6 = 4 \cdot c$.

Relacionados con el concepto de divisibilidad, son el Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo de dos números.

Definición 1.5. *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, se define el Máximo Común Divisor de a y b ($MCD(a, b)$) como el número $d \in \mathbb{Z}$ que verifique las siguientes condiciones:*

- *d/a y d/b.*
- *Si existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que si s/a y s/b, entonces, s/d.*

O lo que es lo mismo, d es el mayor de los divisores comunes de a y b.

Ejemplo 1.4. *Consideremos los siguientes números:*

$$
\begin{aligned}
a &= 192, \\
b &= 360.
\end{aligned} \tag{60}
$$

Veamos como podemos calcular el $MCD(a, b)$, para ello, descompongamos los números a y b en factores primos:

$$
\begin{aligned}
a &= 3 \cdot 2^6, \\
b &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.
\end{aligned} \tag{61}
$$

Se tiene que el $MCD(a,b)$ se puede hallar como el producto de los factores primos comunes presentes en las descomposiciones de a y b, tomando cada uno de ellos con el menor exponente con el que aparezca. En este caso, los factores primos comunes a los números a y b son los números 2 y 3, por lo tanto:

$$MCD(a,b) = 3 \cdot 2^3 = 24. \tag{62}$$

Definición 1.6. *Dados dos números enteros a y b, llamaremos Mínimo Común Múltiplo de a y b ($mcm(a,b)$) al número $m \in \mathbb{Z}$ que verifique las siguientes condiciones:*

- *a/m y b/m.*
- *Si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que a/n y b/n, entonces, m/n.*

O lo que es lo mismo, m es el menor de los múltiplos comunes.

Ejemplo 1.5. *Consideremos los mismos números que en el ejemplo anterior:*

$$\begin{array}{rcl} a & = & 192, \\ b & = & 360. \end{array} \tag{63}$$

Se tiene que el $mcm(a,b)$ se puede hallar como el producto de los factores primos comunes (tomados con el mayor exponente con el que aparezcan) y los factores primos no comunes presentes en la descomposición de a y b, también elevados al mayor exponente. En este caso los factores primos comunes son los números 2 y 3 y los no comunes es el número 5, por lo tanto:

$$mcm(a,b) = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2880 \tag{64}$$

2.3. Los números racionales $\mathbb{Q}$. Se define el conjunto $\mathbb{Q}$ como una extensión de $\mathbb{Z}$ de forma que la ecuación $p \cdot x = q$ tenga solución en $x \in \mathbb{Q}$ para cualquier par de elementos $p, q \in \mathbb{Z}$. O lo que es lo mismo, en $\mathbb{Q}$, todo elemento no nulo tiene inverso para el producto.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : \; p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0\}. \tag{65}$$

Podemos extender las operaciones suma (+) y producto ($\cdot$) definidas para los números enteros de la siguiente forma:

- **Suma:**

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) & \longrightarrow & \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s}. \end{array} \tag{66}$$

- **Producto:**

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) & \longrightarrow & \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s} \end{array} \tag{67}$$

Adicionalmente a las propiedades que cumplían las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathbb{Z}$, en $\mathbb{Q}$ además se tiene que existe elemento inverso para el producto:

$$\forall \; \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \; p \neq 0, \; \exists \; \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \; t.q. \; \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = 1. \tag{68}$$

Dos propiedades importantes que destacamos del conjunto de los números racionales son la propiedad arquimediana y la densidad de $\mathbb{Q}$:

- La propiedad arquimediana establece que dados dos números racionales p y q con $q \neq 0$, existen un número entero n tal que $p < q \cdot n$.
- Por último, densidad de $\mathbb{Q}$ significa que para cualquier par de números racionales p y q con $p < q$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $p < r < q$.

2.4. Los números irracionales $\mathbb{I}$. Los números irracionales $\mathbb{I}$ son los elementos de la recta real que no pueden expresarse mediante el cociente de dos enteros, y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales no periódicas. De este modo, puede definirse al número irracional como un decimal infinito no periódico.

En general, toda expresión en números decimales es solo una aproximación en números racionales del número irracional referido, por ejemplo, el número racional $1,4142135$ es solo una aproximación a 7 cifras decimales del número irracional raíz cuadrada de 2, el cual posee infinitas cifras decimales no periódicas.

Ejemplo 1.6. *Los números irracionales más conocidos son identificados mediante símbolos especiales; los tres principales son los siguientes:*

- π *(Número* π 3,1415*...). Razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.*
- e *(Número* e $2,7182$*...).* $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
- ϕ *(Número áureo* $1,61803$*...).* $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

En principio, no es evidente como podemos definir las operaciones internas suma $+$ y producto $\cdot$ que teníamos en $\mathbb{Q}$ sobre el conjunto de los números irracionales. Dicha definición está basada en una propiedad muy importante de los números racionales, que nos garantiza que todo número irracional se puede aproximar por una sucesión de números racionales.

2.5. Los números reales $\mathbb{R}$. Formalmente podemos defir el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como el conjunto formado por la unión del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el conjunto de los números que no se pueden expresar en forma de fracción $\mathbb{I}$ (por ejemplo, $\sqrt{2}$, π, e, e^{π},...):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}. \tag{69}$$

Existen diversas formas de establecer una definición rigurosa del conjunto de los números reales (definición axiomática, extensión por completitud de $\mathbb{Q}$,...). En función del tipo de definción que adoptemos, existirán ciertas afirmaciones que, o bien se considerarán como axiomas, o como propiedades. En cualquier caso, se tiene que $\mathbb{Q}$ es denso[1] en $\mathbb{R}$, además, se tiene que en $\mathbb{R}$ también se satisface la propiedad arquimediana.

2.5.1. Acotación de conjuntos. Uno de los conceptos más importantes que destacamos dentro del conjunto de los números reales es el concepto de supremo e ínfimo de un conjunto. Para establecer la definición de los mismos, es necesario empezar definiendo lo que se entiende por acotación de conjuntos:

Definición 1.7. ***Cota superior de un subconjunto de números reales.*** *Sea un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, diremos que $s \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A si:*

$$a \leq s, \quad \forall a \in A. \tag{70}$$

[1]Diremos que un subconjunto B de un conjunto A de números reales es denso en A, cuando cualquier elemento de A se pueda aproximar por una sucesión convergente de elementos de B.

Ejemplo 1.7. *Consideremos el siguiente conjunto de números reales:*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq 3\} = (-\infty, 3]. \tag{71}$$

Claramente, el 3 *es una cota superior del conjunto pues cualquiera que sea el elemento a que tomemos del conjunto A, se tienen que* $a \leq 3$.

Ejemplo 1.8. *Consideremos el siguiente conjunto de números reales:*

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}. \tag{72}$$

El conjunto anterior está formado por todas las fracciones de la forma $\frac{1}{n}$ *con n un número natural cualquiera. Está claro que, si* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\frac{1}{n} \leq 1$, *por lo tanto, el* 1 *es una cota superior del conjunto A.*

Observación 1.4. *Si podemos encontrar una cota superior para un conjunto, entonces, cualquier número mayor también será una cota superior (existen infinitas cotas superiores).*

Observación 1.5. *No todos los conjuntos tienen cotas superiores, por ejemplo, no podemos encontrar ninguna cota superior para el conjunto* $A = [1, \infty)$.

Definición 1.8. ***Cota inferior de un subconjunto de números reales.*** *Sea un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *con* $A \neq \emptyset$, *diremos que* $s \in \mathbb{R}$ *es una cota inferior de A si:*

$$a \geq s, \quad \forall a \in A. \tag{73}$$

Ejemplo 1.9. *Consideremos el siguiente conjunto de números reales:*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 4\} = (1, 4]. \tag{74}$$

Se tiene que el 1 *es una cota inferior del conjunto ya que, independientemente del elemento a que tomemos en el conjunto A, se tiene que* $1 < a$ *y, por lo tanto,* $1 \leq a$.

Ejemplo 1.10. *Volvamos a considerar el conjunto (72), ya hemos visto que el* 1 *es cota superior, veamos si podemos encontrar alguna cota inferior. Por un lado, resulta evidente, puesto que los números naturales son siempre positivos, que:*

$$\frac{1}{n} \geq 0, \tag{75}$$

por lo tanto, el 0 *será una cota inferior del conjunto.*

Definición 1.9. ***Conjunto acotado superiormente.*** *Sea* $A \subset \mathbb{R}$, *si existe* $s \in \mathbb{R}$ *tal que s es cota superior de A, diremos entonces que A está acotado superiormente.*

Definición 1.10. ***Conjunto acotado inferiormente.*** *Sea* $A \subset \mathbb{R}$, *si existe* $s \in \mathbb{R}$ *tal que s es cota inferior de A, diremos entonces que A está acotado inferiormente.*

Definición 1.11. ***Conjunto acotado.*** *Si un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *está acotado superior e inferiormente, diremos entonces que A es acotado.*

Ejemplo 1.11. *Los siguientes conjuntos son acotados:*

- $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$. *Resulta evidente que el conjunto A es acotado ya que cualquier número menor o igual a 1 es una cota inferior de A* ($\forall a \in A$, $a \geq 1$, *de hecho* $a > 1$ $\forall a \in A$) *y cualquier número mayor o igual a 2 es una cota superior de A* ($\forall a \in A$, $a \leq 2$, *de hecho* $a < 2$ $\forall a \in A$).
- $A = \{\frac{n}{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ *es un conjunto acotado ya que* $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ *es un conjunto acotado por ser finito, esto es,* $\text{mín}\{a_1, \cdots, a_n\} \leq a \leq \text{máx}\{a_1, \cdots, a_n\}$ $\forall a \in A$. *Cualquier conjunto finito es acotado.*

Ejemplo 1.12. *Los siguientes conjuntos no son acotados:*

- $A = (1, \infty)$, *no es acotado ya que no es posible encontrar una cota superior del conjunto.*
- $(-\infty, 2)$, *no es acotado ya que no es posible encontrar una cota inferior del conjunto.*
- $A = \{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$, *no es acotado pues aunque es acotado inferiormente* (0 *es cota inferior), no es acotado superiormente. Para demostrar que no es acotado superiormente, se razona por reducción al absurdo, se supone que es acotado y se llega a una contradicción con las hipótesis de partida. Supongamos que* M *es una cota superior de* A*, entonces* $n^2 \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$*, lo cual es una contradicción con el hecho de que* M *es cota superior ya que siempre existe un número natural tal que* $n^2 > M$.

Observación 1.6. *Tal y como mencionábamos anteriormente, si somos capaces de encontrar una cota superior (inferior) para un conjunto, entonces cualquier número mayor (menor) también será un cota superior (inferior) del conjunto. Por lo tanto, si un conjunto es acotado superiormente (inferiormente), entonces existen infinitas cotas superiores (inferiores) del mismo. Surge entonces la necesidad de establecer una especie de cota superior (inferior) de referencia que nos permita caracterizar todas las demás. Dicha cota de referencia será lo que llamaremos supremo (ínfimo) del conjunto, intuitivamente, el supremo de un conjunto será la menor de las cotas superiores y, el ínfimo, la mayor de las cotas inferiores.*

Definición 1.12. ***Supremo de un conjunto acotado superiormente.*** *Dado un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *acotado superiormente, diremos que un número* $s \in \mathbb{R}$ *es supremo del conjunto* A *si:*

- s *es cota superior de* A.
- *Si* s' *es cota superior de* A*, entonces* $s \leq s'$.

Esto es, s *es la menor de las cotas superiores, o lo que es lo mismo, ningún número menor que* s *es cota superior de* A.

Definición 1.13. ***Máximo de un conjunto.*** *Dado un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *acotado superiormente, diremos que un número* $s \in \mathbb{R}$ *es máximo del conjunto* A *si:*

- s *es supremo de* A.
- s *pertenece a* A ($s \in A$).

Definición 1.14. ***ínfimo de un conjunto acotado inferiormente.*** *Dado un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *acotado inferiormente, diremos que un número* $s \in \mathbb{R}$ *es ínfimo del conjunto* A *si:*

- s *es cota inferior de* A.
- *Si* s' *es cota inferior de* A*, entonces* $s' \leq s$.

Esto es, s *es la mayor de las cotas inferiores, o lo que es lo mismo, ningún número mayor que* s *es cota inferior de* A.

Definición 1.15. ***Mínimo de un conjunto.*** *Dado un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *acotado inferiormente, diremos que un número* $s \in \mathbb{R}$ *es mínimo del conjunto* A *si:*

- s *es ínfimo de* A.
- s *pertenece al conjunto* A ($s \in A$).

Ejemplo 1.13. *Consideremos el siguiente conjunto:*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 1 < x < 2\}. \tag{76}$$

Se tiene, respectivamente, que el 1 *es ínfimo de* A *y que el* 2 *es supremo de* A*. La demostración para el ínfimo es similar que para el supremo por lo que sólo realizaremos la demostración de que el* 2 *es supremo del conjunto* A*:*

- *Es evidente que el* 2 *es cota superior de* A.
- *Sea* s' *una cota superior del conjunto* A*, veamos que* $2 \leq s'$*. Supongamos que* $s' < 2$*, entonces* $s' < s' + \frac{2-s'}{2} < 2$*, lo cual es una contradicción con el hecho de que* s' *es cota superior ya que* $s' + \frac{2-s'}{2} \in A$.

Ejemplo 1.14. *Consideremos el siguiente conjunto:*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 1 \leq x \leq 2\}. \tag{77}$$

Se tiene, respectivamente, que el 1 *es mínimo de* A *y que el* 2 *es máximo de* A*. La demostración de que* 1 *es ínfimo de* A *y de que* 2 *es supremo de* A *se realiza de forma análoga al ejemplo anterior; además es claro que tanto el* 1 *como el* 2 *pertenecen a* A*.*

Ejemplo 1.15. *Volvamos a considerar el conjunto definido en (72), se tiene que:*

- *El* 0 *es ínfimo del conjunto, sin embargo,* $0 \notin A$*, por lo tanto, el conjunto no tiene mínimo.*
- *El* 1 *es supremo del conjunto, además,* $1 \in A$*, por lo tanto, el* 1 *es máximo del conjunto.*

Tanto el supremo como el ínfimo de un conjunto, si existen, son únicos. Además, todo conjunto acotado superiormente (inferiormente) tiene supremo (ínfimo). Esta última afirmación, dependiendo de la definición que estemos adoptando para el conjunto de los números reales, puede ser considerada como un axioma o como una propiedad demostrable.

2.5.2. Valor absoluto y propiedades. A continuación pasamos a definir el valor absoluto de un número real y sus propiedades:

Definición 1.16. ***Valor absoluto de un número real.*** *Dado un número* $x \in \mathbb{R}$*, se define el valor absoluto de* x*, que denotaremos por* $|x|$*, de la siguiente forma:*

$$|x| = \text{máx}\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{78}$$

El valor absoluto verifica las siguientes propiedades:

Proposición 1.2. *(Propiedades del valor absoluto).*

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $|x| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $|x + y| \leq |x| + |y| \; \forall x, y \in \mathbb{R}$.
4. $||x| - |y|| \leq |x - y| \; \forall x, y \in \mathbb{R}$.
5. $|xy| = |x||y| \; \forall x, y \in \mathbb{R}$.

La recta real es la forma en la que se suelen representar los elementos del conjunto $\mathbb{R}$. Cada uno de estos elementos se identifica con un punto de la recta y viceversa y, el valor absoluto, nos permite medir la distancia entre puntos de dicha recta. Definiremos entonces:

Definición 1.17. ***Distancia entre dos puntos*** $x, y \in \mathbb{R}$. *Dados dos puntos* $x, y \in \mathbb{R}$*, definimos la distancia entre* x *e* y *y lo denotaremos por* $d(x, y)$ *como el valor absoluto de la diferencia:*

$$d(x, y) = |x - y|. \tag{79}$$

Proposición 1.3. *(Desigualdad triangular de la distancia). Para cualquier par de puntos* $x, y \in \mathbb{R}$*, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \quad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{80}$$

En la recta real vamos a considerar diferentes construcciones y subconjuntos, tales como los intervalos y los entornos:

Definición 1.18. ***Intervalo abierto de extremos*** $a, b \in \mathbb{R}$***.*** *Dados números reales* a *y* b *tales que* $a \leq b$*, se llama intervalo abierto de extremos* a *y* b *al conjunto de números reales* x *que cumplen que* $a < x < b$*. Generalmente se denota como* (a, b)*.*

Definición 1.19. ***Intervalo cerrado de extremos*** $a, b \in \mathbb{R}$***.*** *Dados números reales* a *y* b *tales que* $a \leq b$*, se llama intervalo cerrado de extremos* a *y* b *al conjunto de números reales* x *que cumplen que* $a \leq x \leq b$*. Generalmente se denota como* $[a, b]$*.*

Definición 1.20. ***Intervalos mixtos de extremos*** $a, b \in \mathbb{R}$***.*** *Dados números reales* a *y* b *tales que* $a \leq b$*, se llama intervalo semiabierto (o semicerrado) de extremos* a *y* b *al conjunto de números reales* x *que cumplen que* $a < x \leq b$ *(denotado como* $(a, b]$*), y al conjunto de números reales* x *que cumplen que* $a \leq x < b$ *(denotado como* $[a, b)$*).*

El conjunto de los números reales se denota en ocasiones como $(-\infty, \infty)$, considerándose como un intervalo abierto y cerrado simultáneamente. Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ se utilizan aquí solo por conveniencias de la notación y no deben ser considerados como números reales. Un sólo punto es considerado como un intervalo cerrado degenerado. Otros conjuntos de $\mathbb{R}$ que serán también de gran utilidad, serán los llamados entornos:

Definición 1.21. ***Entorno abierto de un número real r.*** *Se llama entorno abierto de r a cualquier intervalo abierto que contenga a r. Y se llama entorno abierto centrado en r a cualquier intervalo abierto de la forma* $(r-b, r+b)$*, siendo b un número real positivo que se llama radio del entorno. Un entorno abierto centrado en r de radio b se denotará por* $E(r,b)$ *(generalmente emplearemos entornos centrados en un punto cuando hablemos de entornos).*

Observación 1.7. *La definición de entorno abierto centrado en r de radio b se puede establecer empleando el valor absoluto de la siguiente forma:*

$$E(r,b) = \{x \in \mathbb{R} : |x-r| < b\}, \tag{81}$$

o también, en función de la distancia al centro del entorno:

$$E(r,b) = \{x \in \mathbb{R} : d(x,r) < b\}, \tag{82}$$

esto es, el entorno abierto centrado en r y de radio b estará compuesto por todos los puntos de la recta real que disten menos de b del centro del entorno r. Una definición análoga será la que emplearemos en $\mathbb{R}^n$ *para definir una n-bola.*

3. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Un punto del espacio bidimensional es un par ordenado de números reales (x_1, x_2). Análogamente, un punto en un espacio tridimensional es una terna ordenada de números reales: (x_1, x_2, x_3). En general, un punto del espacio $\mathbb{R}^n$ es un $n-pla$ ordenada $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$:

Definición 1.22. *Sea* $n > 0$ *un entero. Un conjunto ordenado de n números reales* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *se llama punto n dimensional o vector con n componentes. Los puntos o vectores se designarán por medio de una sola letra en negrita; por ejemplo,*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, \cdots, x_n), \\ \mathbf{y} &= (y_1, \cdots, y_n). \end{aligned} \tag{83}$$

El número x_k *se llama k-ésima coordenada del punto* **x** *o k-ésima componente del vector* **x**. *El conjunto de todos los puntos n-dimensionales se llama espacio euclídeo n-dimensional o simplemente n-espacio, y se designa por* $\mathbb{R}^n$.

Observación 1.8. *Resulta evidente que, según la definición anterior,* $\mathbb{R}^n$ *se puede expresar como el producto cartesiano de n veces* $\mathbb{R}$*:*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \underbrace{\cdots}_{n} \times \mathbb{R}. \tag{84}$$

Ejemplo 1.16. *Casos particulares de espacios n-dimensionales que se emplearán durante el curso son el espacio bidimensional* $\mathbb{R}^2$ *y el espacio tridimensional* $\mathbb{R}^3$. *En el caso de* $\mathbb{R}^2$*, los vectores están compuestos por dos componentes:*

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}, \tag{85}$$

y, en el caso de $\mathbb{R}^3$*, los vectores están compuestos por tres componentes:*

$$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}. \tag{86}$$

3.1. Operaciones algebraicas. Definiremos ahora las operaciones algebraicas con puntos o vectores n-dimensionales.

Definición 1.23. ***Operaciones algebraicas en*** $\mathbb{R}^n$***.*** *Sean* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ *elementos de* $\mathbf{R}^n$*. Definimos:*

- *Igualdad:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_1 = y_1, \cdots, x_n = y_n. \tag{87}$$

- *Suma:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n). \tag{88}$$

- *Multiplicación por números reales (escalares):*

$$a\mathbf{x} = (ax_1, \cdots, ax_n) \quad (a \in \mathbb{R}). \tag{89}$$

- *Diferencia:*

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}. \tag{90}$$

- *Vector nulo u origen:*

$$\mathbf{0} = (0, \cdots, 0). \tag{91}$$

- *Producto interior o producto escalar:*

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{92}$$

Particularizadas al caso de $\mathbb{R}^3$*, las operaciones anteriores se pueden escribir de la siguiente forma:*

- *Igualdad:*

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ \ y_1 = y_2\ z_1 = z_2. \tag{93}$$

- *Suma:*

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \tag{94}$$

- *Multiplicación por números reales (escalares):*

$$a(x, y, z) = (ax, ay, az) \quad (a \in \mathbb{R}). \tag{95}$$

- *Diferencia:*

$$(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2). \tag{96}$$

- *Vector nulo u origen:*

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0). \tag{97}$$

- *Producto interior o producto escalar:*

$$< (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) >= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{98}$$

Adicionalmente a las operaciones algebraicas anteriores, en $\mathbb{R}^3$, se define el producto vectorial como una operación binaria entre dos vectores de un espacio euclídeo tridimensional que da como resultado un vector ortogonal a los dos vectores originales. Con frecuencia se lo denomina también producto cruz (pues se lo denota mediante el símbolo $\times$).

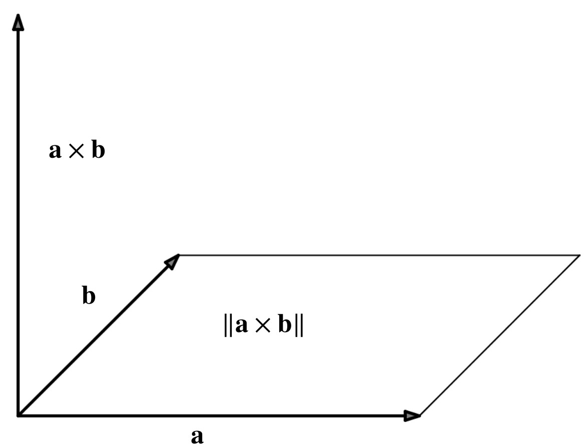
Definición 1.24. ***Producto vectorial de dos vectores***. *Sean* $\mathbf{x}_1$ *e* $\mathbf{x}_2$ *dos vectores de* $\mathbb{R}^3$*, se define el producto vectorial* $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ *como el siguiente vector de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3, \tag{99}$$

donde los vectores $\mathbf{e}_1$*,* $\mathbf{e}_2$ *y* $\mathbf{e}_3$ *son los vectores de la base canónica de* $\mathbf{R}^3$*:*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,0,0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,0), \\ \mathbf{e}_3 &= (0,0,1). \end{aligned} \tag{100}$$

Observación 1.9. *Desde el punto de vista geométrico, el producto vectorial tiene dos interpretaciones geométricas, por un lado, tal y como mencionábamos anteriormente, dados dos vectores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *de* $\mathbb{R}^3$*, el producto vectorial* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *nos da como resultado un vector perpendicular al plano que forman los vectores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *y, por otro lado, se tiene que el módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo que forman los vectores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$*:*



3.2. La norma euclídea en $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades. A continuación pasamos a definir la norma euclídea de un vector de $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades.

Definición 1.25. ***Norma euclídea o longitud de un vector.*** *Dado un vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*, definimos su norma, que denotaremos por* $\|x\|$*, de la siguiente forma:*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)}. \tag{101}$$

Se tienen las siguientes propiedades para la norma que hemos definido en $\mathbb{R}^n$ (análogas a las del valor absoluto en $\mathbb{R}$):

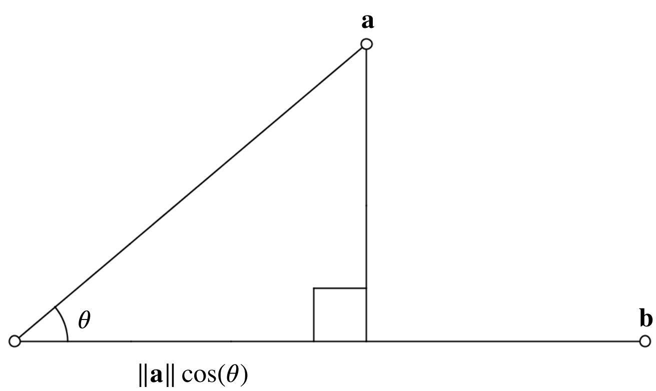
Proposición 1.4. ***Propiedades de la norma en*** $\mathbb{R}^n$. *Sean* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *dos puntos de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces se tiene que:*

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ *y* $\|\mathbf{x}\| = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{x} = 0$*.*
- $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$ *para todo número real a.*
- $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$*.*
- $| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > | \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ *(desigualdad de Cauchy-Schwartz).*

- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(desigualdad triangular de la norma).*

Observación 1.10. *El producto escalar permite explotar los conceptos básicos de la geometría eucídea tradicional: longitudes, ángulos, ortogonalidad en dos y tres dimensiones, etc. Desde el punto de vista geométrico, el producto escalar de dos vectores se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:*

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cdot cos(\theta). \tag{102}$$



A la vista de la definición (102), se tienen las siguientes propiedades:

- *Dos vectores son ortogonales si y solamente si su producto escalar es cero:*

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow < \mathbf{a}, \mathbf{b} >= 0. \tag{103}$$

- *Dos vectores son paralelos si y solamente si el valor absoluto de su producto escalar es igual que el producto de sus módulos:*

$$\mathbf{a} || \mathbf{b} \Leftrightarrow \ | < \mathbf{a}, \mathbf{b} > | = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|. \tag{104}$$

- *La proyección ortogonal de un vector* $\mathbf{a}$ *sobre un vector* $\mathbf{b}$ *se puede obtener dividiendo el producto escalar* $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >$ *por el módulo del vector* $\mathbf{b}$*:*

$$Proy(\mathbf{a})_{\mathbf{b}} = \frac{< \mathbf{a}, \mathbf{b} >}{||\mathbf{b}||}. \tag{105}$$

- *Podemos obtener el ángulo que forman dos vectores sin más que dividir su producto escalar por el producto de los módulos:*

$$cos(\theta) = \frac{< \mathbf{a}, \mathbf{b} >}{||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}||}. \tag{106}$$

Definición 1.26. ***Distancia entre dos puntos de*** $\mathbb{R}^n$**.** *Dados* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*, definimos la distancia entre* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$*, y lo denotaremos por* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$*, de la siguiente forma:*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{< \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} >} = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{107}$$

Al igual que ocurría en $\mathbb{R}$, en $\mathbb{R}^n$, también se cumple la desigualdad triangular para la distancia.

Proposición 1.5. *(Desigualdad triangular para la distancia.) Para cualquier par de puntos* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z), \quad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{108}$$

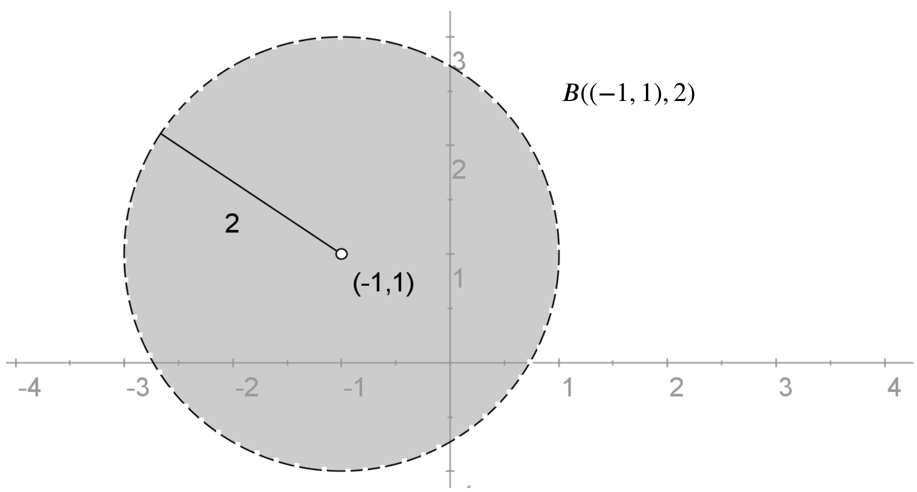
Definición 1.27. ***n-bola abierta***. *Sea* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *y* $r \in \mathbb{R}$ *un número positivo dado. Se define la bola abierta de centro* $\mathbf{a}$ *y radio* r*, y lo denotaremos por* $B(\mathbf{a}, r)$ *como el conjunto de los puntos de* $\mathbb{R}^n$ *que distan del centro menos que el radio:*

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\}. \tag{109}$$

Ejemplo 1.17. *En el caso particular de* $\mathbb{R}^2$*, dado un vector* $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ *y un radio* r*, la n-bola abierta de centro* $\mathbf{a}$ *y radio* r *será:*

$$B(\mathbf{a}, r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - a_x)^2 + (x - a_y)^2 < r^2\}. \tag{110}$$

Esto es, los puntos interiores a la circunferencia de centro (a_x, a_y) *y radio* r*. Por ejemplo, la bola abierta de centro* $\mathbf{a} = (-1, 1)$ *y radio* $r = 2$ *se corresponde con:*



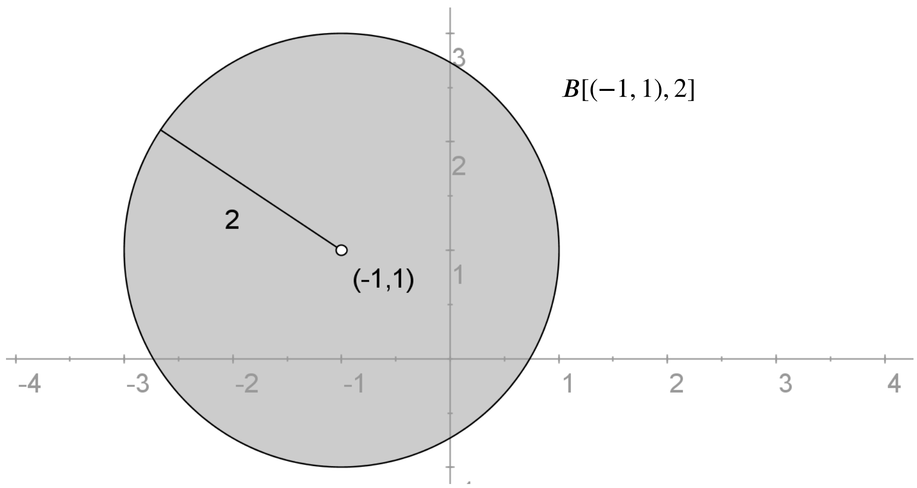
Definición 1.28. ***n-bola cerrada***. *Sea* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *y* $r \in \mathbb{R}$ *un número positivo dado. Se define la bola cerrada de centro* $\mathbf{a}$ *y radio* r*, y lo denotaremos por* $B[\mathbf{a}, r]$ *como el conjunto de los puntos de* $\mathbb{R}^n$ *que distan del centro menos o igual que el radio:*

$$B[\mathbf{a}, r] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r\}. \tag{111}$$

Ejemplo 1.18. *En el caso particular de* $\mathbb{R}^2$*, dado un vector* $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ *y un radio* r*, la n-bola cerrada de centro* $\mathbf{a}$ *y radio* r *será:*

$$B[\mathbf{a}, r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - a_x)^2 + (x - a_y)^2 \leq r^2\}. \tag{112}$$

Esto es, los puntos interiores a la circunferencia de centro (a_x, a_y) *y radio* r*, incluyendo la propia circunferencia. Por ejemplo, la bola cerrada de centro* $\mathbf{a} = (-1, 1)$ *y radio* $r = 2$ *se corresponde con:*



Observación 1.11. *Observamos que las definiciones de n-bola abierta y n-bola cerrada en* $\mathbb{R}^n$ *no son más que una generalización del concepto de entorno centrado abierto y cerrado en* $\mathbb{R}$*.*

3.3. Topología de $\mathbb{R}^n$. En esta sección veremos algunos de los aspectos básicos de la topología de $\mathbb{R}^n$ como puede ser los conceptos de punto interior, adherente, frontera, acumulación, aislado de un conjunto y las definiciones de conjunto cerrado y abierto.

Definición 1.29 (Punto interior.). *Dado un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$*, diremos que un punto* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *es un punto interior de* A *si existe un radio* $r > 0$ *tal que la bola de centro* $\mathbf{x}$ *y radio* r *está contenida en* A*:*

$$\exists\, r > 0 \ t.q. \ B(\mathbf{x}_0, r) \subset A. \tag{113}$$

Ejemplo 1.19. *Consideremos el siguiente subconjunto de* $\mathbb{R}$*:*

$$A = (0, 2], \tag{114}$$

se tendrá que el 1 *es un punto interior de* A*. En efecto, para el punto* 1*, si tomamos el radio* $r = 1/2$*, se tendrá que:*

$$B\left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \subset (0, 2]. \tag{115}$$

Sin embargo, el punto 2 *no es un punto interior del conjunto ya que para cualquier radio* $r > 0$*, la bola de centro* 2 *y radio* r *nunca estará contenida en* A *ya que el punto* $2 + r/2$*, que está en la bola de centro* 2 *y radio* r*, no pertenece a* A*.*

Definición 1.30 (Conjunto de puntos interiores.). *Dado un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$*, denotaremos por* $\mathrm{Int}(A)$ *al conjunto formado por todos los puntos interiores de* A*:*

$$\mathrm{Int}(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, r > 0 \ t.q. \ B(\mathbf{x}_0, r) \subset A \right\}. \tag{116}$$

Observación 1.12. *Resulta evidente, a la vista de las definición anterior, que el conjunto de puntos interiores de* A *es un subconjunto de* A*:*

$$\mathrm{Int}(A) \subset A. \tag{117}$$

Ejemplo 1.20. *Consideremos el conjunto* $A = (0, 2] \subset \mathbb{R}$*, se tendrá que* $\mathrm{Int}(A) = (0, 2)$*. Para demostrar la igualdad entre conjuntos anterior veamos que se dan los dos contenidos*[2]*:*

[2]Para demostrar que dos conjuntos A y B son iguales es suficiente con comprobar que $A \subset B$ y $B \subset A$.

- $\text{Int}(A) \subset (0,2)$. *Para demostrar esta inclusión es suficiente con recordar que* $\text{Int}(A) \subset A = (0,2]$ *y que el punto* 2 *no es un punto interior, por lo tanto,* $\text{Int}(A) \subset (0,2)$.
- $(0,2) \subset \text{Int}(A)$. *La demostración de esta inclusión es un poco más técnica y requiere el empleo de la definición de punto interior. Consideremos un punto cualquiera x del intervalo* $(0,2)$ *y veamos que es un punto interior, esto es, tenemos que encontrar un radio $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$. Ahora bien, si tomamos r de la siguiente forma:*

$$r = \frac{1}{2}\,\text{mín}\{x, 2-x\}, \tag{118}$$

se tendrá que $B(x,r) \subset A$.

Definición 1.31 (Conjunto abierto.). *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, diremos que es un conjunto abierto si todos sus puntos son interiores:*

$$A = Int(A). \tag{119}$$

Ejemplo 1.21. *El intervalo abierto* $(0,2)$ *es un conjunto abierto ya que todos sus puntos son interiores.*

Definición 1.32 (Punto adherente.). *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, diremos que un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto adherente de A si para cualquier rado $r > 0$ la bola de centro $\mathbf{x}$ y radio r tiene intersección no vacía con el conjunto A:*

$$\forall\, r > 0,\;\; B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset. \tag{120}$$

Ejemplo 1.22. *Consideremos el conjunto $A = (0,2] \subset \mathbb{R}$. Se tendrá que el punto* 0 *es un punto aherente de A ya que, dado cualquier radio $r > 0$, el punto*

$$\frac{1}{2}\,\text{mín}\{r, 2\} \in B(0,r) \cap (0,2]. \tag{121}$$

Definición 1.33 (Adherencia o clausura de un conjunto.). *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por* $\text{ad}(A)$ *al conjunto formado por todos los puntos adherentes de A:*

$$\text{ad}(A) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; t.q.\; \forall\, r > 0,\;\; B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset\right\}. \tag{122}$$

Observación 1.13. *A la vista de la definición de conjunto adherente, se tiene que todos los puntos de un conjunto son también puntos adherentes del mismo:*

$$A \subset Ad(A). \tag{123}$$

Ejemplo 1.23. *Consideremos el conjunto $A = (0,2] \subset \mathbb{R}$, se tendrá que $Ad(A) = [0,2]$. Para demostrarlo, emplearemos la misma técnica que hemos empleado en el **Ejemplo** 1.20 (demostrar el doble contenido):*

- *$Ad(A) \subset [0,2]$. Demostrar que cualquier punto de $Ad(A)$ está en el conjunto $[0,2]$ es equivalente a demostrar que cualquier punto del complementatio de $[0,2]$ no está en $Ad(A)$.*

  Sea entonces un punto $x \in [0,2]^c = (-\infty,0) \cup (2,\infty)$, supondremos, sin pérdida de generalidad que el punto está en el intervalo $(-\infty,0)$ (para el intervalo $(2,\infty)$ el razonamiento es análogo y no lo haremos). Para demostrar que un punto $x \in (-\infty,2)$ no está en $Ad(A)$, lo único que tendremos que hacer es encontrar un radio $r > 0$ para el cual $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Tomemos

$$r = \frac{1}{2}|x|, \tag{124}$$

  se tendrá que $B(x, |x|/2) \cap A = \emptyset$, ya que el exremo superior del intervalo $x + |x|/2 < 0$.
- *$[0,2] \subset Ad(A)$. Por un lado, sabemos, gracias a la observación anterior que $A = (0,2] \subset Ad(A)$. Además, hemos visto que el* 0 *es un punto adherente de A. Por lo tanto, $[0,2] \subset Ad(A)$.*

Definición 1.34 (Conjunto cerrado.). *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, diremos que es un conjunto cerrado si todos sus puntos son adherentes:*

$$Ad(A) = A. \tag{125}$$

Ejemplo 1.24. *El intervalo cerrado $[0, 2]$ es un conjunto cerrado ya que todos sus puntos son adherentes.*

Definición 1.35 (Punto de acumulación.). *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, diremos que un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A si para cualquier radio $r > 0$ la bola perforada[3] de centro $\mathbf{x}$ y radio r tiene intersección distinta del vacío con el conjunto:*

$$\forall\, r > 0,\ \big(B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}\big) \cap A \neq \varnothing. \tag{126}$$

Ejemplo 1.25. *Consideremos el conjunto de números reales $A = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset$ R, se tendrá que el 0 es un punto de acumulación de A. Consideremos un radio $r > 0$ arbitrario y veamos que*

$$\big(B(0, r) \setminus \{0\}\big) \cap A \neq \varnothing. \tag{127}$$

Esto es, tenemos que demostrar que, dado cualquier radio $r > 0$, siempre podemos encontrar elementos del conjunto A en $(-r, 0) \cup (0, r)$. En efecto, si tomamos $N = E[1/r] + 1$[4], se tendrá que $N > 1/r$ y, entonces, $1/N < r$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{N} \in B(0, r) \setminus \{0\}. \tag{128}$$

Observación 1.14. *Si $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces, para cualquier radio $r > 0$, el conjunto $B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}$ contiene infinitos puntos del conjunto A.*

Ejemplo 1.26. *Consideremos el conjunto y la notación establecida en el **Ejemplo** 1.25, se tendrá que para cualquier número natural $n \geq N$, el elemento $1/n \in B(0, r) \setminus \{0\}$. Por lo tanto, para cualquier radio $r > 0$ podemos encontrar infinitos elementos del conjunto en la bola perforada $B(0, r) \setminus \{0\}$.*

Definición 1.36 (Conjunto de puntos de acumulación.). *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por A' al conjunto de puntos de acumulación de A:*

$$A' = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ :\ \forall\, r > 0,\ \big(B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}\big) \cap A \neq \varnothing\right\}. \tag{129}$$

Observación 1.15. *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto de puntos de acumulación de A está contenido en la adherencia de A:*

$$A' \subset Ad(A). \tag{130}$$

Ejemplo 1.27. *Consideremos el conjunto $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$, se tendrá que*

$$A' = [0, 1]. \tag{131}$$

Para demostrarlo, veamos que se cumple la doble inclusión:

- $A' \subset [0, 1]$. *Esta inclusión es inmediata ya que $A' \subset Ad(A) = [0, 1]$.*
- $[0, 1] \subset A'$. *Consideremos un punto $x \in [0, 1]$ y veamos que es un punto de acumulación del conjunto A. Distinguimos los siguientes casos:*

[3] Dado un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y un radio $r > 0$, llamaremos bola perforada de centro $\mathbf{x}$ y radio r al conjunto $B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}$.

[4] Se define la parte entera de un número real x como el mayor entero menor o igual a x: $E[x] = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \ :\ k \leq x\}$.

- *x es uno de los extremos del intervalo ($x \in \{0,1\}$), supongamos que $x = 0$ (el razonamiento para $x = 1$ es análogo) y tomemos un radio arbitrario $r > 0$. Se tendrá que el elemento*

$$\frac{1}{2}\min\{r,1\} \tag{132}$$

pertenece al conjunto A y a la bola perforada $B(0,r)\setminus\{0\}$, por lo tanto,

$$\big(B(0,r)\setminus\{0\}\big)\cap[0,1]\neq\emptyset,\quad \forall r>0. \tag{133}$$

- *x es uno de los puntos interiores del intervalo ($x \in (0,1)$). En este caso, para cualquier radio $r > 0$, es suficiente con considerar el punto*

$$x+\frac{1}{2}\min\{r,1-x\}. \tag{134}$$

Este punto pertenece al conjunto $[0,1]$ y al entorno perforado $B(x,r)\setminus\{0\}$, por lo tanto,

$$\big(B(x,r)\setminus\{0\}\big)\cap[0,1]\neq\emptyset,\quad \forall r>0. \tag{135}$$

Definición 1.37 (Punto frontera.). *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, diremos que un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto frontera de A, si para cualquier radio $r > 0$ la bola de centro $\mathbf{x}$ y radio r contiene puntos de A y del complementario A^c:*

$$\forall\, r>0,\ B(\mathbf{x},r)\cap A\neq\emptyset \text{ y } B(\mathbf{x},r)\cap A^c\neq\emptyset. \tag{136}$$

Ejemplo 1.28. *Consideremos el conjunto $A = (0,1] \subset \mathbb{R}$, se tendrá que los extremos del intervalo 0 y 1 son puntos frontera. Veamoslo para el punto $x = 0$ (el punto $x = 1$ es análogo). Consideremos un radio $r > 0$ arbitrario y veamos que la bola de centro 0 y radio r contiene puntos de A y del complementario A^c. En efecto, el punto*

$$-\frac{r}{2}\in B(0,r)\cap A^c,\quad \forall r>0 \tag{137}$$

y el punto

$$\frac{1}{2}\min\{r,1\}\in B(0,r)\cap A,\quad \forall r>0. \tag{138}$$

Definición 1.38 (Frontera de un conjunto.). *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $Fr(A)$ al conjunto de puntos frontera de A:*

$$Fr(A)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\ :\ \forall r>0,\ B(\mathbf{x},r)\cap A\neq\emptyset \text{ y } B(\mathbf{x},r)\cap A^c\neq\emptyset\right\}. \tag{139}$$

Ejemplo 1.29. *Consideremos el conjunto $A = (0,1]$, se tendrá que:*

$$Fr(A)=\{0,1\}. \tag{140}$$

Veámoslo demostrando la doble inclusión:

- *$Fr(A) \subset \{0,1\}$. Veamos que si $x \notin \{0,1\}$ entonces $x \notin Fr(A)$. Distinguimos los siguientes casos:*
  - *$x \in (-\infty,0)$. Si consideramos el radio $r = |x|/2$, la bola $B(x,r) \subset (-\infty,0)$, por lo que no interseca con A.*
  - *$x \in (0,1)$. Si consideramos el radio $r = \min\{x,1-x\}/2$, la bola $B(x,r) \subset (0,1)$, por lo que no interseca con el complementario de A.*
  - *$x \in (1,\infty)$. Si consideramos el rario $r = (x-1)/2$, la bola $B(x,r) \subset (1,\infty)$, por lo que no interseca con A.*

  En los casos anteriores hemos encontrado un radio que incumple la condición de punto frontera, por lo tanto, $Fr(A) \subset \{0,1\}$.

- $\{0,1\} \subset Fr(A)$. *Esta inclusión ya la hemos desmotrado en el* ***Ejemplo*** *1.28*

Observación 1.16. *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se cumple:*

- $Fr(A) = Ad(A) \cap Ad(A^c)$.
- $Ad(A) = Int(A) \cup Fr(A)$.
- $Int(A) \cap Fr(A) = \emptyset$.

Definición 1.39 (Conjunto compacto.). *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, diremos que es compacto si es cerrado y acotado.*

Ejemplo 1.30. *El conjunto $A = [0,1]$ es compacto ya que es cerrado ($Ad(A) = A$) y acotado ($|x| \leq 1$, $\forall x \in A$).*

Por último enunciamos un resultado muy importante sobre la existencia de puntos de acumulación.

Teorema 1.1 (Bolzano-Weierstrass). *Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado con infinitos puntos tiene al menos un punto de acumulación.*

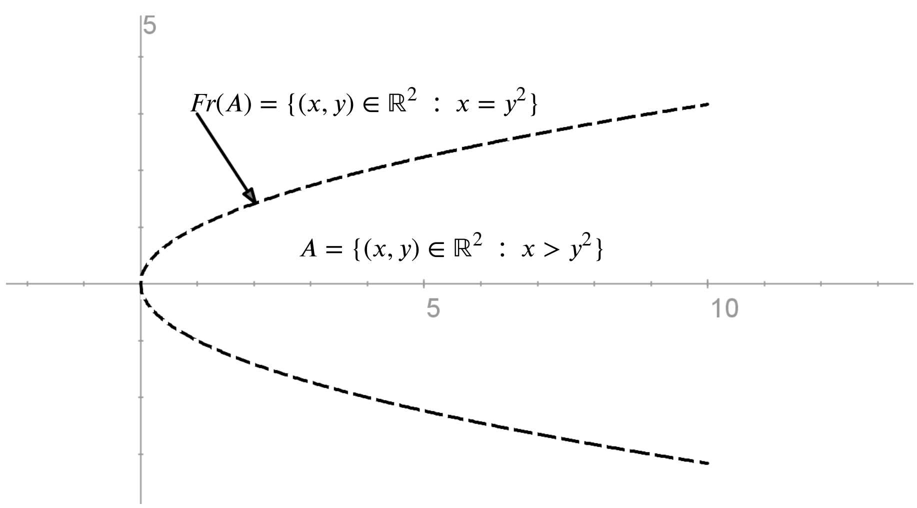
Ejemplo 1.31. *Consideremos el siguiente conjunto de $\mathbb{R}^2$:*

(141)
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > y^2\}.$$

Para el conjunto anterior se tiene:

- *A es un conjunto abierto ($Int(A) = A$).*
- $Ad(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq y^2\}$.
- $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y^2\}$.
- $A' = Ad(A)$.

Gráficamente:



4. Ejercicios del tema.

Ejercicio 1.1. *Utilizando el principio de inducción, demuestra las siguientes afirmaciones:*

1. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $2^n \leq (n+1)!$.
3. $a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + (a+(n-1)d) = n\dfrac{2a+(n-1)d}{2}$.
4. $3 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \cdots + 3^{2n-1} = \dfrac{3(9^n-1)}{8}$.

5. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
6. $2^n > 2n + 1 \quad \forall n \geq 4$.
7. *Para todo* $n \in \mathbb{N}, n > 1$, *los números de la forma* $2^{2^n} + 1$ *acaban en* 7.
8. $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, *donde* $r \in \mathbb{R}$ *con* $r \neq 1$.
9. *La expresión* $a^{2n} - 1$ *es divisible por* $a + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
10. $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, *donde* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *y* $f^{(n)}$ *es a la derivada de orden* n *de la función* f.

Ejercicio 1.2. *Para los siguientes conjuntos de números reales argumenta si están acotados o no y, en el caso de que estén acotados superior y/o inferiormente, obtén, respectivamente, el supremo y/o el ínfimo del conjunto:*

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - 1| < 2\}$.
2. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 2x + 2 > 0\right\}$.
3. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{x-2}{x+3} \leq 0\right\}$.
4. $A = \{x \in \mathbb{R} : \ (x+1)(x-2) \leq 0\}$.
5. $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x + 2| + |x - 2| < 5\}$.
6. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \left|\dfrac{x+1}{2x}\right| < 1\right\}$.
7. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x+1} < 0\right\}$.
8. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x - \sqrt{x} = 2\right\}$.
9. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \left|x^2 - 1\right| \leq 3\right\}$.
10. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \left|x^3 + 1\right| \leq 4\right\}$

Ejercicio 1.3. *Hallar los puntos interiores, adherentes, frontera y de acumulación de los siguientes conjuntos de* $\mathbb{R}$*:*

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 3 < x \leq 7\}$.
2. $A = \{\dfrac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.
3. $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x \leq 1\} \cap \mathbb{Q}$.
4. $A = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x^2 < 9\} \cup \{\dfrac{n + (-1)^n n}{2n+3} : n \in \mathbb{N}\}$.
5. $A = \{(-1)^n + \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 1.4. *Determinar, para los siguientes conjuntos de* $\mathbb{R}^2$*, los puntos interiores, adherentes, frontera y acumulación.*

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1, \ x > 0\}$.
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| < 1, \ y \geq 0\}$.
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 9x^2 + 4y^2 = 36\}$.
4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1\}$.
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1, \ x > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 + y^2 \leq 4, \ x \geq 0\}$.