

## 4 Aplicaciones lineales

### 4.1 Aplicación lineal

Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{K}$  (en general,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Una aplicación  $f : V \rightarrow W$  se llama **aplicación lineal** u **homomorfismo** si

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$
- $f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

Estas dos condiciones son equivalentes a la única condición:

$$f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

### 4.2 Ejemplos

1. Las siguientes aplicaciones,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , son aplicaciones lineales:

- (a) Homotecia:  $f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (b) Proyección:  $f(x, y) = (x, 0)$ .
- (c) Simetría:  $f(x, y) = (x, -y)$

2. Si  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , la aplicación  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$  es una aplicación lineal (asociada a la matriz  $A$ ). Obviamente, para que tenga sentido el producto  $A\mathbf{u}$ , se entiende que el vector  $\mathbf{u}$  se escribe en columna, como se hará siempre que esté implicado en operaciones matriciales.

3. La aplicación lineal asociada a la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  es  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x \\ -x + 2y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x \\ z' = -x + 2y \end{cases}$$

### 4.3 Propiedades

Si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación lineal, se cumple:

- 1.  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

y **núcleo** al subespacio vectorial  $\text{Ker } f = f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ .



## 4.5 Definiciones

Una aplicación lineal (homomorfismo) se llama **monomorfismo** si es inyectiva, **epimorfismo** si es sobreyectiva, e **isomorfismo** si es biyectiva. Cuando los espacios inicial y final coinciden, la aplicación lineal y el isomorfismo se suelen llamar **endomorfismo** y **automorfismo**, respectivamente.

## 4.6 Condición necesaria y suficiente de monomorfismo

Sea  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación lineal. Entonces

$$f \text{ es monomorfismo} \iff \text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$$

### Demostración:

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  es inyectiva, entonces:

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \implies f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{0}) \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

luego  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Inversamente, si  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ , entonces

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \implies f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

luego  $f$  es inyectiva.

## 4.7 Dimensión del subespacio imagen

Sea  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación lineal. Si  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $V$ , entonces

$$\text{Im } f = L(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}) \text{ y, en consecuencia } \dim \text{Im } f \leq \dim V$$

**Demostración:** Si  $\mathbf{w} \in \text{Im } f$ , existe  $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B \in V$  tal que

$$\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{v}_i)$$

luego  $\mathbf{w} \in L(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\})$ . Inversamente, si  $\mathbf{w} \in L(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\})$ , entonces

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i\right) \text{ y } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \in V$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

**Demostración:** Para cada  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i \in V$  se define

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i$$

Es fácil ver que  $f$  es aplicación lineal y que  $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Además es única, pues si  $g : V \rightarrow W$  verifica la misma condición, entonces

$$g(\mathbf{v}) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i = f(\mathbf{v})$$

#### 4.9 Observaciones

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  viene definida por  $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , entonces

- Ker  $f$  son las soluciones del sistema homogéneo  $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- Si  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\text{Im } f = L(\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}) = L(\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\})$$

donde  $\mathbf{c}_i$  es la columna  $i$ -ésima de la matriz  $A$ .

#### 4.10 Ejemplo

Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la aplicación lineal asociada a la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}) = L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}) \\ \text{Ker } f &= \{\mathbf{u} : A\mathbf{u} = \mathbf{0}\} = L(\{(1, 0, -1)\}) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

#### 4.11 Matriz de una aplicación lineal

Como se ha visto, una aplicación lineal  $f : V \rightarrow W$  queda unívocamente determinada por las

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

entonces la imagen de cualquier  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{B_V} \in V$ , expresada en la base  $B_W$  de  $W$ , es

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) \mathbf{w}_i \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\mathbf{u} \end{aligned}$$

donde las columnas de la matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , llamada **matriz de la aplicación** respecto de las bases  $B_V$  y  $B_W$ , son las coordenadas en la base  $B_W$  de las imágenes de los vectores de la base  $B_V$ . Se suele indicar  $A = M(f, B_V, B_W)$ .

Fijadas las bases  $B_V$  y  $B_W$ , a cada aplicación lineal le corresponde una matriz y viceversa.

En el caso particular de que  $V = W$  y que la base  $B$  en ambos es la misma, se indica simplemente  $A = M(f, B)$ .

#### 4.12 Ejemplo

La expresión matricial de la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida, respecto de las bases canónicas, por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

es

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Para hallar el núcleo, se resuelve el sistema:

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \mathbf{0} \implies \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha - \beta \\ x_4 = -\alpha \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

de donde  $\text{Ker } f = \{(1, 0, -1, -1), (0, 1, -1, 0)\}$ . La imagen es

$$\text{Im } f = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

#### 4.13 Dimensiones de la imagen y el núcleo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Entonces  $B_2 = \{f(\mathbf{v}_{r+1}), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$  es una base de  $\text{Im } f$ , ya que



- $B_2$  es un sistema de generadores:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in \text{Im } f &\implies \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) \text{ con } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i \in V \\ &\implies \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=r+1}^n x_i f(\mathbf{v}_i) \end{aligned}$$

- $B_2$  es linealmente independiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=r+1}^n \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f\left(\sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0} &\implies \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \in \text{Ker } f \implies \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^r (-\alpha_i) \mathbf{v}_i \\ &\implies \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \implies \alpha_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n \implies \alpha_i = 0, \quad r+1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim V$ .

#### 4.14 Rango de una aplicación lineal

Si  $A$  es la matriz asociada a una aplicación lineal  $f : V \rightarrow W$ , respecto de las bases  $B_V$  y  $B_W$ , entonces, puesto que el núcleo es el espacio de soluciones del sistema  $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , se ha de cumplir que

$$\dim(\text{Ker } f) = \dim V - \text{rg } A \implies \dim(\text{Im } f) = \text{rg } A$$

Luego el rango de cualquier matriz asociada a  $f$  (respecto de bases cualesquiera), que se llama **rango de la aplicación lineal**, ha de ser constante e igual a la dimensión de la imagen.

#### 4.15 Proposición

Si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación lineal con  $\dim V = \dim W = n < \infty$ , entonces

$$f \text{ es isomorfismo} \iff f \text{ es monomorfismo} \iff f \text{ es epimorfismo}$$

**Demostración:**

$$f \text{ es epimorfismo} \iff \dim(\text{Im } f) = \dim W = n \iff \dim(\text{Ker } f) = 0 \iff f \text{ es monomorfismo}$$

#### 4.16 Composición de aplicaciones lineales

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

### 4.17 Ejemplo

Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vienen definidas por

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

respecto de las bases canónicas, entonces  $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $f \circ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vienen definidas por

$$g \circ f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix}$$

$$f \circ g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ -y \\ -x + y - z \end{pmatrix}$$

respecto de las bases canónicas.

### 4.18 Matriz de un cambio de base

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y sean

$$B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n\}$$

dos bases de  $V$ . La aplicación que hace corresponder a cada vector  $\mathbf{u} \in V$  en la base  $B$  el mismo vector expresado en la base  $B'$  es la aplicación identidad:

$$Id : V^B \rightarrow V^{B'} \\ \mathbf{u}_B \rightarrow \mathbf{u}_{B'} = A\mathbf{u}_B$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es la matriz cuya columna  $i$ -ésima es la imagen de  $\mathbf{v}_i$ , es decir las coordenadas de  $\mathbf{v}_i$  en la base  $B'$ .

Puesto que esta aplicación es un isomorfismo,  $\text{rg } A = n$  y la matriz  $A$  es regular. Su inversa  $A^{-1}$  es la que pasa de las coordenadas respecto de  $B'$  a las coordenadas respecto de  $B$ . Resumiendo:

$$A = M(Id, B, B') = ((\mathbf{v}_1)_{B'}, \dots, (\mathbf{v}_n)_{B'}) \quad \text{y} \quad A\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_{B'} \\ A^{-1} = M(Id, B', B) = ((\mathbf{v}'_1)_B, \dots, (\mathbf{v}'_n)_B) \quad \text{y} \quad A^{-1}\mathbf{u}_{B'} = \mathbf{u}_B$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

De esta manera, si  $\mathbf{u} = (3, 2, -1)_B$ , entonces

$$\mathbf{u}_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es decir  $\mathbf{u} = (2, 1, 1)_{B_c} = (2, 1, 1)$ . Además:

$$A^{-1} = M(\text{Id}, B_c, B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_B = A^{-1}\mathbf{u}_{B_c}$$

de donde  $\mathbf{e}_1 = (2, 1, -1)_B$ ,  $\mathbf{e}_2 = (1, -1, 1)_B$  y  $\mathbf{e}_3 = (-1, 2, -1)_B$ .

#### 4.20 Cambios de base en una aplicación lineal

Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación lineal cuya matriz, respecto de las bases  $B_V$  en  $V$  y  $B_W$  en  $W$ , es  $A$ . ¿Cuál es la matriz de  $f$  respecto de nuevas bases  $B'_V$  en  $V$  y  $B'_W$  en  $W$ ?

Sean  $P = M(\text{Id}_V, B'_V, B_V)$  y  $Q = M(\text{Id}_W, B'_W, B_W)$  las matrices del cambio de base en  $V$  y  $W$ , respectivamente. Observando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V^{B_V} & \xrightarrow{A} & W^{B_W} \\ \uparrow P & & \downarrow Q^{-1} \\ V^{B'_V} & \xrightarrow{C} & W^{B'_W} \end{array}$$

se deduce que

$$C = M(f, B'_V, B'_W) = Q^{-1}AP$$

#### 4.21 Ejemplo

Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal que respecto de la base canónica  $B_c$  tiene asociada la matriz

$$A = M(f, B_c, B_c) = M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{es decir} \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. ¿Cuál es la matriz de  $f$  respecto de la base

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)\} ?$$

Se construye el diagrama

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$



es decir, que si  $\mathbf{u} = (x, y, z)_B$  entonces su imagen, también expresada en la base  $B$ , es

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. ¿Cuál es la matriz de  $f$  respecto de la base  $B$  en el espacio inicial y la base canónica en el espacio final? Siendo  $I$  la matriz identidad, el nuevo diagrama, y la matriz buscada, son

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3)^{B_c} & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \\ \uparrow P & & \downarrow I \\ (\mathbb{R}^3)^B & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \end{array} \quad \text{de donde} \quad D = M(f, B, B_c) = IAP = AP = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70