AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Grupos.

1.- Muestra que los siguientes conjuntos tienen estructura de grupo:

(a) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ con el producto.

(b) $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ con el producto.

(c) $G = \{x \in \mathbb{C} \mid x^n = 1\}$ con el producto, para $n \in \mathbb{N}$ fijo.

(d) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ con el producto.

(e) $GL(2, \mathbb{Z}_3) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3, ad - bc \neq_3 0 \right\}$.

(f) $O(2, \mathbb{Z}_3) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3, ad - bc \neq_3 0, A^t = A^{-1} \right\}$.

(g) $\mathbb{Z}_m^* = \{[n] \in \mathbb{Z}_m : \exists [n]^{-1}\}$ con el producto.

2.- Indica por qué no son grupos los siguientes conjuntos:

(a) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ con el producto.

(b) $G = \{a \in \mathbb{Z} \mid a$ es un cuadrado perfecto$\}$ con la suma.

(c) $G = \{a \in \mathbb{Z} \mid a$ es un cuadrado perfecto$\}$ con el producto.

(d) $G = \{[0], [2], [3], [6]\} \subset \mathbb{Z}_8$.

3.- Sea $G = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Se define el producto $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ para todo $x, y \in G$. Prueba que $(G, *)$ es un grupo.

4.- Halla una operación sobre $G = \mathbb{R}$, de modo que el inverso de $x \in G$ sea $1 - x$.

5.- Un subconjunto no vacío H de un grupo $(G, *)$ es un subgrupo si se verifica que

$$a, b \in H \Rightarrow a * b \in H \text{ y además } a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

Prueba que H es un subgrupo si y sólo si $a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$.

6.- Prueba que si H es un subconjunto **finito** de un grupo $(G, *)$ tal que $a, b \in H \Rightarrow a*b \in H$ entonces H es un subgrupo.

7.-Indica los elementos del grupo lineal

$$GL(2, \mathbb{Z}_2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2, ad - bc \neq_2 0 \right\}$$

y calcula la tabla del grupo. Indica los órdenes de sus elementos y si el grupo es cíclico o abeliano.

8.- Indica los ocho elementos del grupo ortogonal $O(2, \mathbb{Z}_3)$ y calcula la tabla de este grupo. Indica también los órdenes de sus elementos y si el grupo es cíclico o abeliano.

9.- Calcula el orden de los elementos de $\mathbb{Z}_n^*$ para $n =$ 6, 7, 8, 9, 10, 12. Indica generadores para cada uno de estos grupos.

10.- Encuentra explícitamente un isomorfismo de grupos $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{11} \to \mathbb{Z}_{132}$.

11.- Sean G un grupo y $a, b \in G$. Prueba que:

(a) Si $\text{ord}(a) = n \in \mathbb{N}$ y $n = pq$, entonces $\text{ord}(a^p) = q$.

(b) $\text{ord}(a^{-1}) = \text{ord}(a)$ y $\text{ord}(ab) = \text{ord}(ba)$.

(c) Si a y b conmutan y tienen órdenes finitos y primos entre sí, entonces $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$.

12.- Considera las siguientes matrices complejas

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Prueba que el conjunto $G = \{\mathbf{1}, \mathbf{-1}, \mathbf{i}, \mathbf{-i}, \mathbf{j}, \mathbf{-j}, \mathbf{k}, \mathbf{-k}\}$ es un grupo con la multiplicación de matrices (se le llama *grupo de cuaterniones*). Da la tabla de multiplicación de G e indica el orden de G y el orden de cada uno de sus elementos. Estudia si G es isomorfo al grupo diédrico D_4 o al grupo S_4 de permutaciones de cuatro elementos.

(*)13.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ la aplicación definida por $f(t) = \cos(2\pi t) + i\text{sen}(2\pi t)$. Consideramos $\mathbb{R}$ como grupo con la suma y $\mathbb{C}^*$ como grupo con la multiplicación.

(a) Prueba que f es un homomorfismo de grupos.

(b) Halla el núcleo y la imagen de f.

(c) Deduce que el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isomofo al grupo S^1 del ejercicio 1(d).

14.- Demuestra que el orden de un grupo finito G es un número primo si y sólo si G no tiene subgrupos propios (es decir, sus únicos subgrupos son $\{e\}$ y G).

15.- Sea G un grupo con orden $|G|$ primo. Prueba que G es cíclico.

(*)16.- Utiliza el teorema de Lagrange para demostrar el Pequeño teorema de Fermat y el Teorema de Euler.

17.- Prueba las siguientes afirmaciones:
a) Si p y $n > 0$ son primos entre si, existe un $m \geq 1$ de modo que n divide a $p^m - 1$.
b) Si n y p son primos distintos, entonces n divide a $p^{n-1} - 1$.

(*)18.- Se dice que un subgrupo H de un grupo G es **normal** si $gH = Hg \ \forall g \in G$.

(a) Prueba que si $[G : H] = 2$, entonces H es un subgrupo normal de G

(b) Prueba que $SL(2, \mathbb{Z}_p) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p) \mid \det A = 1\}$ es un subgrupo normal de $GL(2, \mathbb{Z}_p) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p) \mid \det A \neq_p 0\}$ cuando p es un número primo. Prueba que el cociente $GL(2, \mathbb{Z}_p)/SL(2, \mathbb{Z}_p)$ tiene estructura de grupo y es isomorfo a $\mathbb{Z}_p^*$.

19.- Sean $G_1 = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{60}$ y $G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20}$.

(a) Demuestra que G_1 y G_2 no son isomorfos.

(b) Estudia si existen homomorfismos (de grupos aditivos) suprayectivos de G_1 o G_2 sobre $\mathbb{Z}_{120}$

(c) Obten cuatro grupos abelianos de orden 1440 no isomorfos entre sí y que tampoco sean isomorfos ni a G_1 ni a G_2