

# Dinámica del sólido

## Dinámica del sólido

Definición y modelos

## Geometría de masas

Centro de masas. Definición

Cálculo de centros de masas

Simetrías

Sólidos compuestos

Teoremas de Pappus-Guldin

Momentos de inercia

Productos de inercia

Tensor de inercia

Direcciones principales de inercia

Traslación de ejes. Teorema de Steiner

# 5

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

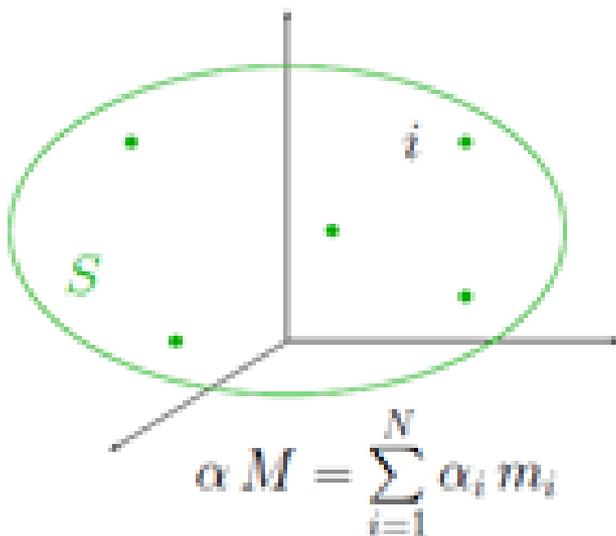
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

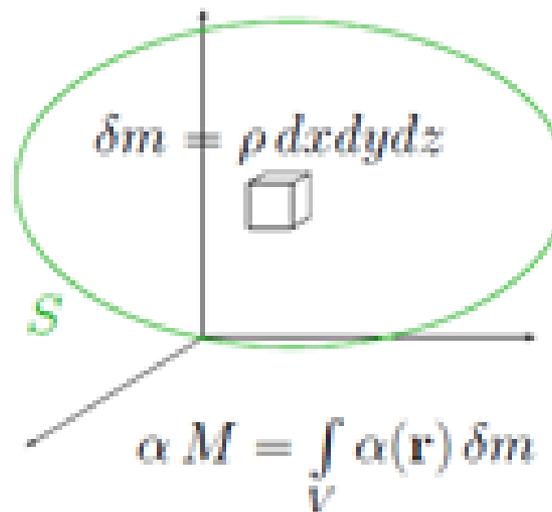
## Definición y modelos

- **Sólido rígido:** conjunto de partículas cuyas distancias mutuas se mantienen constantes.

Modelo discreto



Modelo continuo



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Geometría de masas

---

En la dinámica del sólido influyen la **masa** y su **distribución en el espacio**.

Se tiene en cuenta mediante las magnitudes siguientes:

- La **masa total**, como en la partícula y en sistemas de partículas.
- La posición promediada de las masas, o **centro de masas**, como en sistemas de partículas.
- Otras magnitudes propias de sólidos, como los **momentos y productos de inercia**, que recogen la inercia rotacional o resistencia al giro.

La **geometría de masas** es la parte de la mecánica que estudia las propiedades del sistema material relacionadas con la masa y su situación en el sistema material o en el sólido. En ella se resuelven problemas relacionados con el cálculo de:

- Centro de masas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Geometría de masas: Centro de masas

- **Momento de primer orden o estático** del sistema de partículas respecto a un punto O:

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i m_i \quad \vec{M}_O = \int_S \vec{r} dm$$

- **Centro de masas:** el centro de masas **G** de un sistema de partículas es el punto en el que habría que colocar toda la masa para obtener el mismo momento estático. Es la posición media ponderada de las masas del sólido.

- Modelo discreto:  $M\vec{r}^G = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}^i$  ; con  $M = \sum_{i=1}^N m_i$

- Modelo continuo:  $M\vec{r}^G = \int_S \vec{r} dm$  ; con  $M = \int dm$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

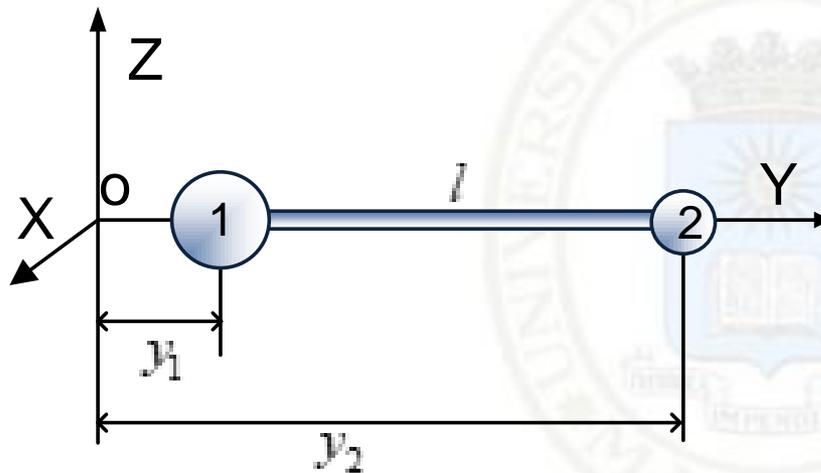
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo de centros de masa

### Modelo discreto



$$\vec{r}^G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}^i}{M}$$

con  $M = \sum_{i=1}^N m_i$

$$m_1 = 2m; \quad m_2 = m; \quad m_{\text{barra}} \approx 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

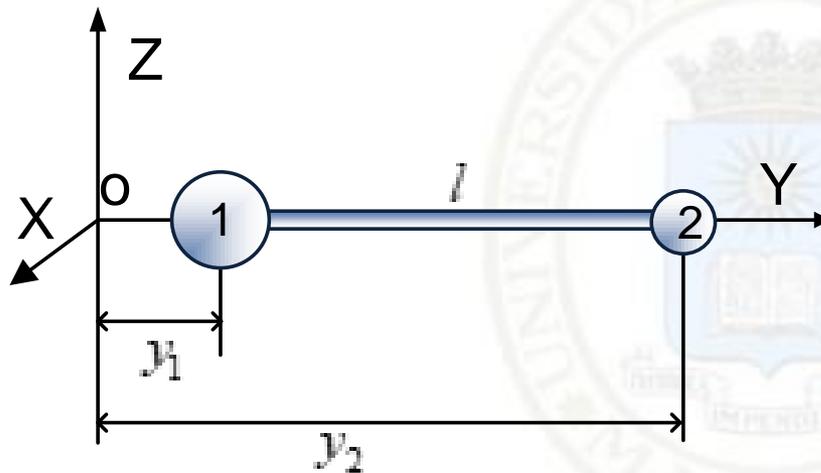
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo de centros de masa

### Modelo discreto



$$\vec{r}^G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}^i}{M}$$

con  $M = \sum_{i=1}^N m_i$

$$m_1 = 2m; \quad m_2 = m; \quad m_{\text{barra}} \approx 0$$

$$x^G = z^G = 0$$

➔  
**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

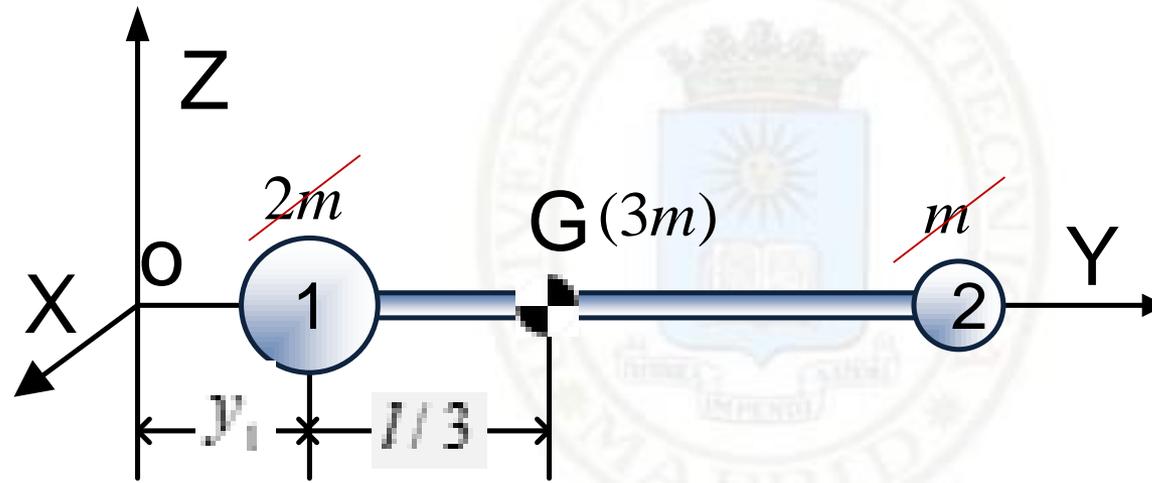
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo de centros de masa

### Modelo discreto



$$m_1 = 2m; \quad m_2 = m; \quad m_{\text{barra}} \approx 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Geometría de masas: Centro de masas

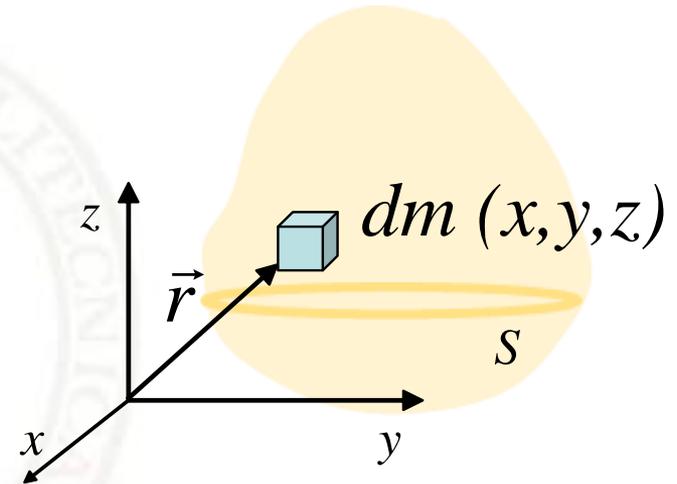
## Cálculo de centros de masa

### Modelo continuo

$$m_i \rightarrow dm; \quad \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}; \quad \sum \rightarrow \int$$

$$\vec{r}^G = \frac{\int_S \vec{r} dm}{M}$$

$$\text{con } M = \int_S dm$$



$$x^G = \frac{\int_S x dm}{M}; \quad y^G = \frac{\int_S y dm}{M}; \quad z^G = \frac{\int_S z dm}{M}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

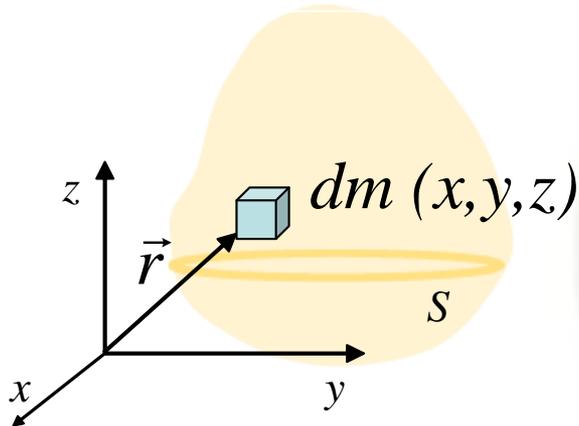
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo de centros de masa. Modelo continuo

- Si el cuerpo tiene **TRES dimensiones**, la masa ocupa un volumen



$$dm = \rho dV$$

Siendo  $\rho$  la **densidad volumétrica** (masa por unidad de volumen en cada punto), en  $\text{kg/m}^3$

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

$$x^G = \frac{\int_S x dm}{M} = \frac{\int_S x \rho dV}{\int_S \rho dV} = \frac{\int_S x dV}{\int_S dV}$$

Sólidos homogéneos  
densidad ( $\rho$ ) constante

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

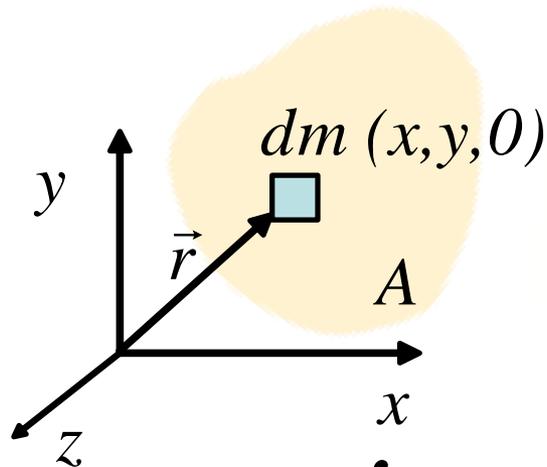
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo de centros de masa. Modelo continuo

- Si el cuerpo tiene **DOS dimensiones** (placa)



$$dm = \sigma dA$$

Siendo  $\sigma$  la **densidad superficial** ( $\text{kg}/\text{m}^2$ )

$$\sigma(x, y) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

$$x^G = \frac{\int_S x dm}{M} = \frac{\int_S x \sigma dA}{\int_S \sigma dA} = \frac{\int_S x dA}{\int_S dA}$$

Sólidos homogéneos  
densidad ( $\sigma$ ) constante

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

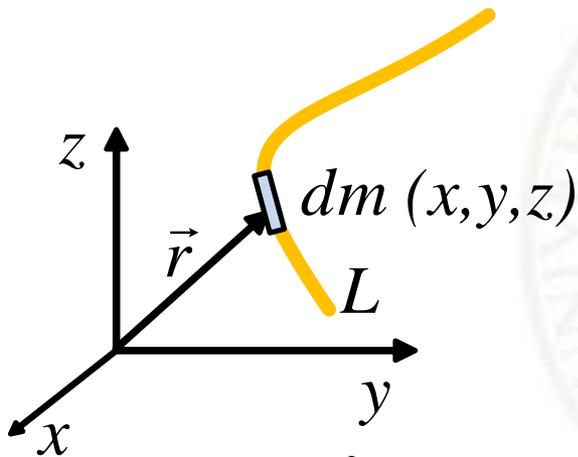
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo de centros de masa. Modelo continuo

- Si el cuerpo tiene **UNA dimensión** (“alambre”)



$$dm = \lambda dL$$

Siendo  $\lambda$  la **densidad lineal** (kg/m)

$$\lambda = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta L}$$

$$x^G = \frac{\int_S x dm}{M} = \frac{\int_S x \lambda dL}{\int_S \lambda dL} = \frac{\int_S x dL}{\int_S dL}$$

Sólidos homogéneos  
densidad ( $\lambda$ ) constante

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Geometría de masas: Centro de masas

## Centroide – Centro de Masas – Centro de Gravedad

- **Centroide o baricentro (C):** Es el centro **geométrico**
- **Centro de Masas (CM):** Es la posición media ponderada de las **masas** del sólido
- **Centro de Gravedad (G):** Es el punto imaginario de aplicación de la resultante de todas las **fuerzas de gravedad** que actúan sobre las distintas porciones materiales de un cuerpo, de tal forma que el momento respecto a cualquier punto de esta resultante aplicada en el centro de gravedad es el mismo que el producido por los pesos de todas las masas materiales que constituyen dicho cuerpo

Sólidos **homogéneos**  
*densidad constante*



$$CM \equiv C$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

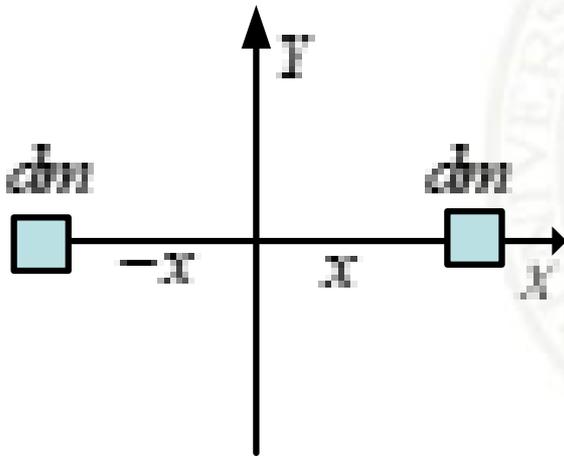
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo del centro de masas: SIMETRÍAS

Supongamos que el eje Y fuese de simetría del sólido: por cada  $dm$  a una distancia  $x$  a la derecha del eje, habría otro idéntico a la misma distancia ( $-x$ ) al otro lado.



Su contribución al numerador de la  $x^G$  sería :

$$-x dm + x dm = 0$$

$$x^G = \frac{x dm + dm(-x)}{2 dm} = 0$$

→ G está en el eje Y de simetría

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

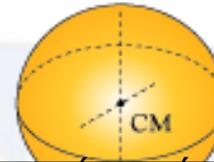
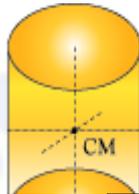
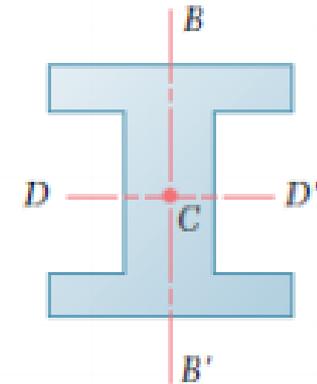
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo del centro de masas: SIMETRÍAS

Si existe un elemento de simetría en la pieza, el centro de masas está sobre él

- Si hay un eje de simetría, G está en el eje
- Si hay un plano de simetría, G está en el plano
- Si hay simetría de revolución o central, siempre estará en el eje o en el centro



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

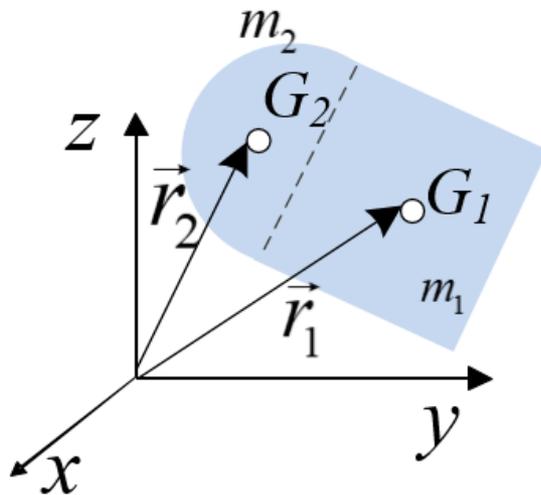
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo del centro de masas: Sólidos COMPUESTOS

- Podemos dividir el cuerpo en partes, y luego promediar



Si la descomposición es en N cuerpos:  $S_1, \dots, S_N$

$$\vec{r}^G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}^i}{M}$$

En esta figura:

$$\vec{r}^G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

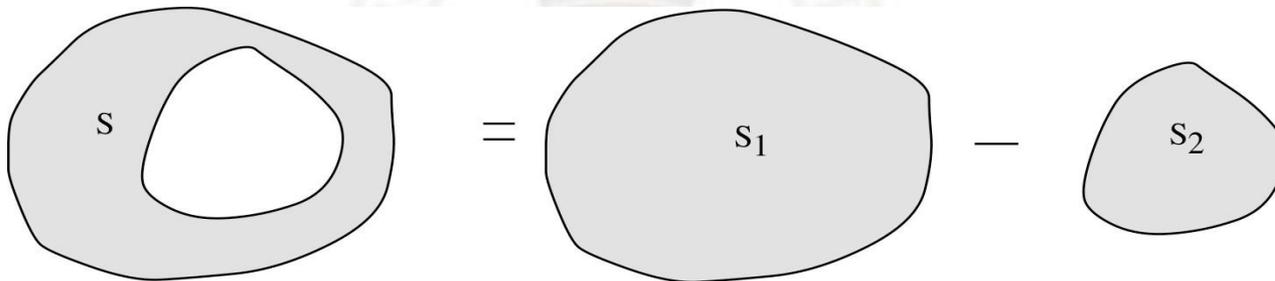
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo del centro de masas: Sólidos COMPUESTOS

- Se puede usar también para tratar **cuerpos con huecos**. Se puede calcular como el del cuerpo completo, mas el del hueco con masa negativa.



$$M = m_1 - m_2$$

$$\vec{r}^G = \frac{m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{m_1 - m_2}$$

Cartagena99

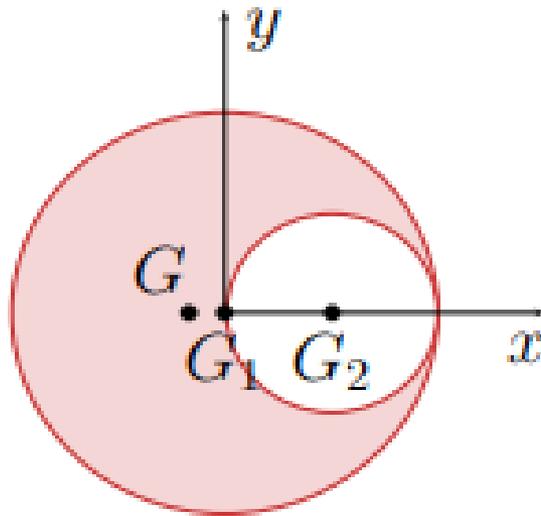
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Geometría de masas: Centro de masas

**Ejemplo:** Obtener la posición del centro de masas de un disco plano homogéneo de radio  $R$ , del que se ha recortado un trozo circular de radio  $R/2$  tangente al borde del disco. La masa del cuerpo con agujero es  $M$ .



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

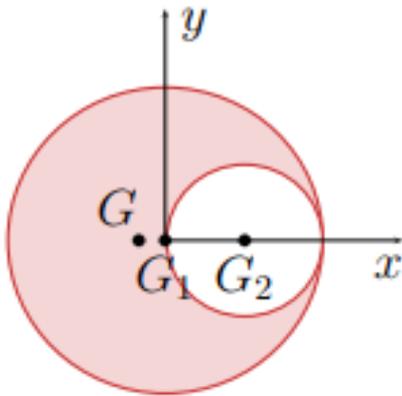
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Geometría de masas: Centro de masas

**Ejemplo:** Obtener la posición del centro de masas de un disco plano homogéneo de radio  $R$ , del que se ha recortado un trozo circular de radio  $R/2$  tangente al borde del disco. La masa del cuerpo con agujero es  $M$ .

- Podemos calcular el centro de masas como el de un disco completo sin agujero (sólido 1), más el disco recortado con masa negativa (sólido 2)
- Por la geometría conocemos los centros de masas, están sobre el **eje x de simetría**:  $x^{G_1} = 0$ ;  $x^{G_2} = R/2$ ;  $y^{G_1} = y^{G_2} = y^G = 0$
- Como el disco es homogéneo, la posición de  $G$  va a ser independiente de la masa. Podemos trabajar con la densidad superficial  $\sigma$  sin necesidad de calcularla. Así, las masas de los sólidos son:



$$m_1 = \sigma A_1 = \sigma \pi R^2 \quad m_2 = \sigma A_2 = \sigma \pi \frac{R^2}{4}$$

Y la del sólido completo:

$$M = m_1 - m_2 = \sigma \left( \pi R^2 - \pi \frac{R^2}{4} \right) = \frac{3\sigma \pi R^2}{4}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Geometría de masas: Centro de masas

**Ejemplo:** Obtener la posición del centro de masas de un disco plano homogéneo de radio  $R$ , del que se ha recortado un trozo circular de radio  $R/2$  tangente al borde del disco. La masa del cuerpo con agujero es  $M$ .

- Podemos calcular el centro de masas como el de un disco completo sin agujero (sólido 1), más el disco recortado con masa negativa (sólido 2)
- Por la geometría conocemos los centros de masas, están sobre el **eje  $x$  de simetría**:  $x^{G_1} = y^{G_1} = y^{G_2} = y^G = 0$ ;  $x^{G_2} = R/2$
- Como el disco es homogéneo, la posición de  $G$  va a ser independiente de la masa. Podemos trabajar con la densidad superficial  $\sigma$  sin necesidad de calcularla. Así, las masas de los sólidos son:

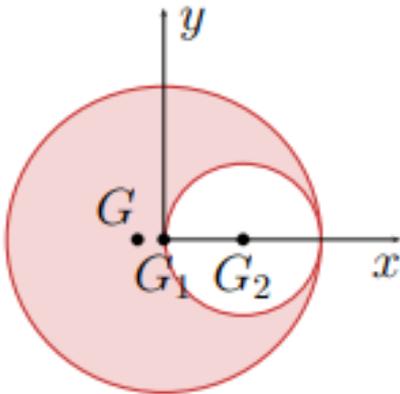
$$m_1 = \sigma A_1 = \sigma \pi R^2 \quad m_2 = \sigma A_2 = \sigma \pi \frac{R^2}{4}$$

Y la del sólido completo:

$$M = m_1 - m_2 = \sigma \left( \pi R^2 - \pi \frac{R^2}{4} \right) = \frac{3\sigma \pi R^2}{4}$$

$$M x^G = m_1 x^{G_1} - m_2 x^{G_2}$$

$$\frac{3\sigma \pi R^2}{4} x^G = \sigma \pi R^2 \cdot 0 - \sigma \pi \frac{R^2}{4} R$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

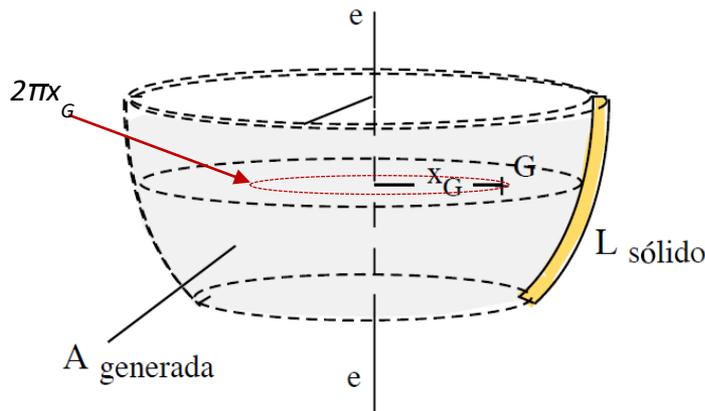
# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo del centro de masas: Teoremas PAPPUS-GULDING

Permiten situar el c.m. de **sólidos homogéneos** ( $CM \equiv C$ ). Hay uno para sólidos unidimensionales planos (“alambres”) y otro para placas planas.

### 1<sup>er</sup> teorema

El área  $A$  de una superficie de revolución generada mediante la rotación de una curva  $C$  alrededor de un eje externo (que no la corte) sobre el mismo plano es igual a su longitud  $L_{\text{sólido}}$ , multiplicada por la distancia recorrida por su centroide en su rotación completa alrededor de dicho eje:



$$A_{\text{generada}} = 2\pi x_G L_{\text{sólido}}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

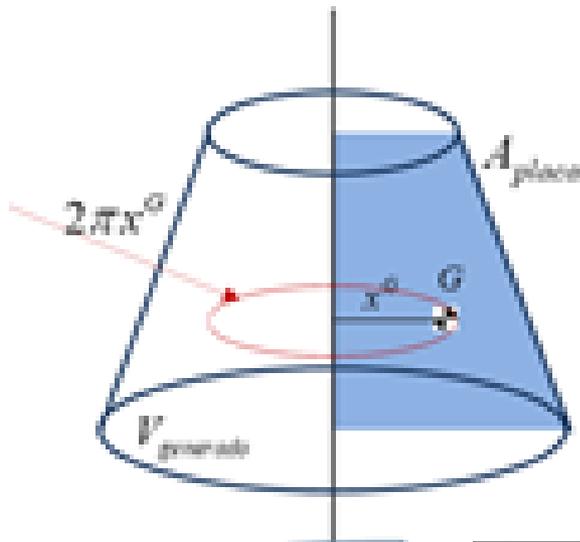
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Geometría de masas: Centro de masas

## Cálculo del centro de masas: Teoremas PAPPUS-GULDING<sup>1</sup>

### 2<sup>er</sup> teorema

El volumen  $V$  de un sólido de revolución generado mediante la rotación de un área plana  $A$  alrededor de un eje externo es igual al producto del Área por la distancia recorrida por su centroide en una rotación completa alrededor de dicho eje:



$$V_{\text{generado}} = 2\pi x^G A_{\text{placa}}$$

Siendo  $x^G$  la distancia del c.m. al eje de rotación

Cartagena99

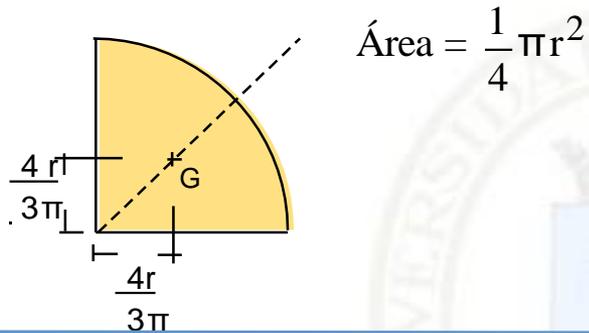
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

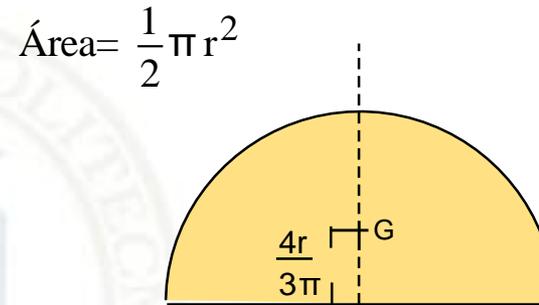
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Geometría de masas: Centro de masas

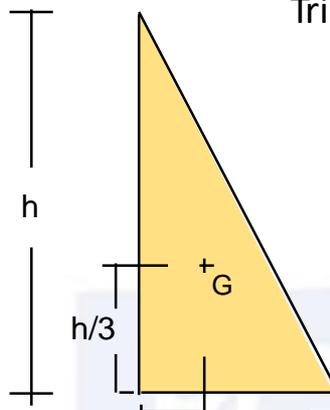
Cuadrante de disco de radio  $r$ :



Semidisco de radio  $r$ :

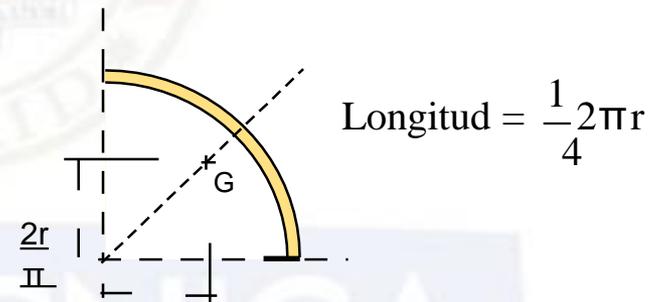


Triángulo:



$$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot h$$

Cuarto de circunferencia de radio  $r$



## Cartagena99

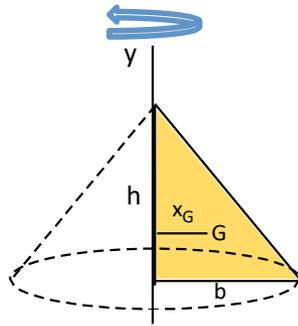
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Geometría de masas: Centro de masas

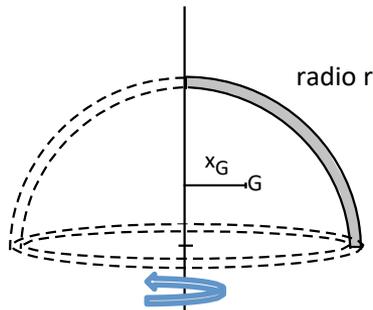
Ejemplos: Algunos c.m. usando Pappus-Guldin



• **Placa triangular** genera cono

$$V_{\text{generado}} = 2\pi x_G A_{\text{placa}}$$

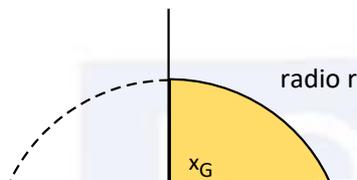
$$\frac{1}{3} \pi b^2 h = 2\pi x_G \frac{1}{2} bh \rightarrow x_G = \frac{1}{3} b$$



• **Cuarto de circunferencia** genera media cáscara esférica

$$A_{\text{generada}} = 2\pi x_G L_{\text{sólido}}$$

$$\frac{1}{2} 4\pi r^2 = 2\pi x_G \frac{1}{4} 2\pi r \rightarrow x_G = \frac{2r}{\pi}$$



• **Cuadrante de disco** genera media esfera

$$V_{\text{generado}} = 2\pi x_G A_{\text{placa}}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Geometría de masas: Momentos de inercia

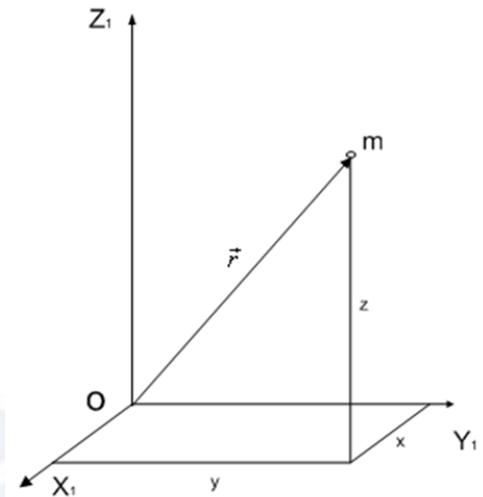
## Definiciones

- **Momento de inercia** del sistema de partículas/sólido respecto a un punto O, un eje o un plano, es la suma de los productos de cada una de las masas de las partículas del sistema por el cuadrado de la distancia que la separa del punto, del eje o del plano:

$$I = \sum_i r_i^2 m_i \quad I = \int_S r^2 dm$$

Siendo  $r^i$  o  $r$  la distancia que lo separa del punto, del eje o del plano

Si  $O=G$ , los momentos se llaman **CENTRALES**



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Geometría de masas: Momentos de inercia

## Definiciones

- **Momento de inercia respecto del origen:**

$$I_O = \int_S r^2 dm = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

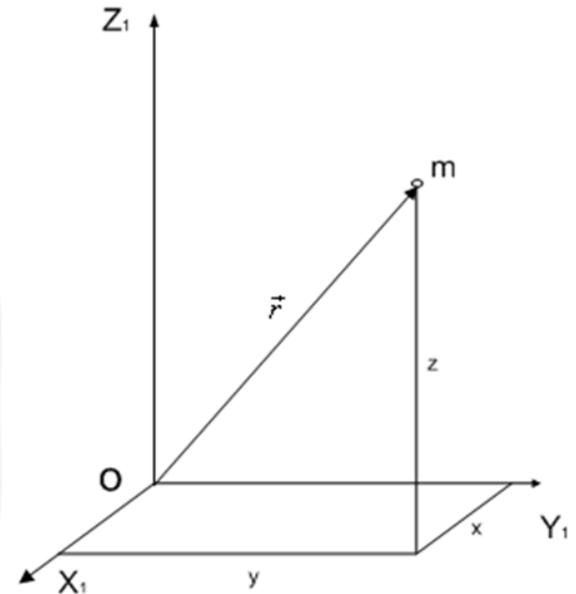
- **Momento de inercia respecto de los ejes:**

$$I_x = \int_S r^2 dm = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int_S r^2 dm = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \int_S r^2 dm = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

$$2 I_O = I_x + I_y + I_z$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Geometría de masas: Momentos de inercia

## Definiciones

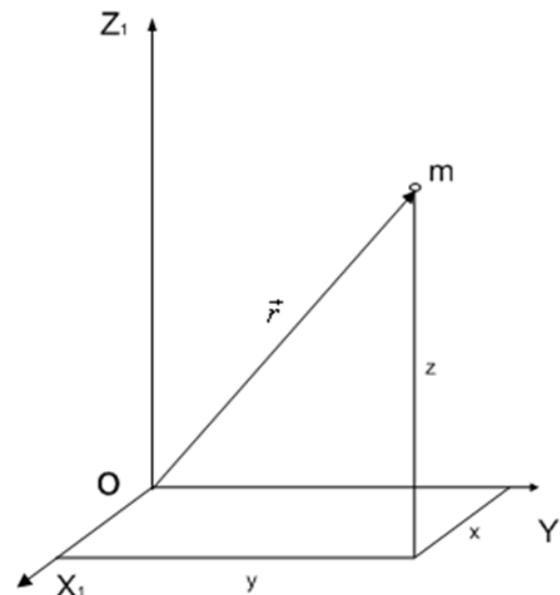
- **Momento de inercia respecto a los planos:**

$$I_O = \int_S r^2 dm = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

Plano OXY  $I_{xy} = \int_S r^2 dm = \int_S z^2 dm$

Plano OXZ  $I_{xz} = \int_S r^2 dm = \int_S y^2 dm$

Plano OYZ  $I_{yz} = \int_S r^2 dm = \int_S x^2 dm$



$$I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Geometría de masas: Momentos de inercia

- **Momentos de inercia:**

Además:

$$I_x = \int_S (y^2 + z^2) dm = I_{xy} + I_{xz} = \int_S z^2 dm + \int_S y^2 dm$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz}$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

- **Radio de giro (K):** es un parámetro tal que:

$$I = K^2 m$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Geometría de masas: Productos de inercia

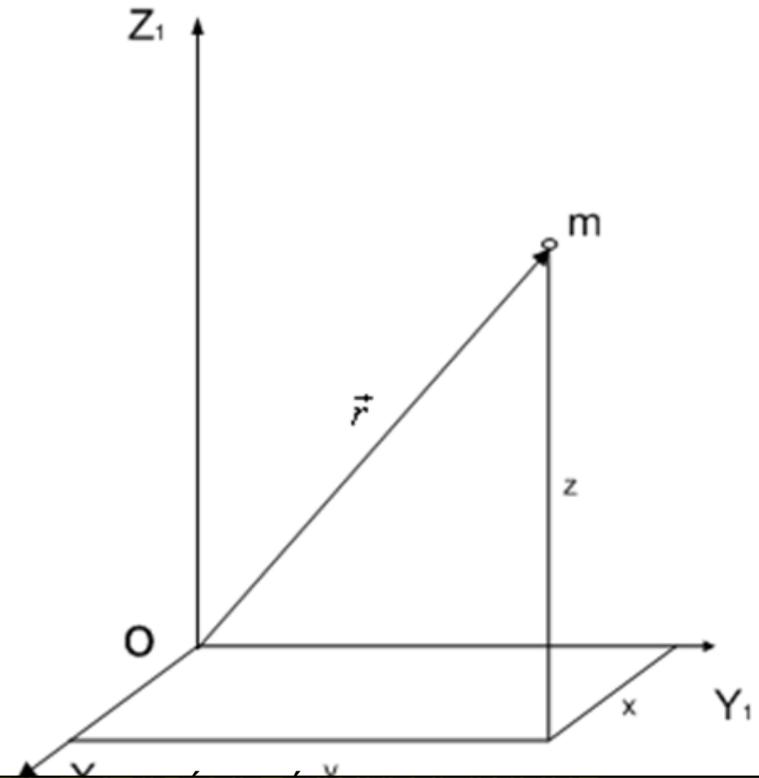
## Definiciones

- **Producto de inercia** de un sistema material respecto a dos planos ortogonales:

Plano OXY y OXZ  $P_{yz} = \int_S y z \, dm$

Plano OXY y OYZ  $P_{xz} = \int_S x z \, dm$

Plano OXZ y OYZ  $P_{xy} = \int_S x y \, dm$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Geometría de masas: Tensor de inercia

## Definiciones

Los momentos y productos de inercia que aparecen en la cinética del sólido se pueden disponer de forma más compacta en forma de matriz, que se denomina **tensor de inercia** del sólido en un punto **O**.

$$\overline{\overline{I}}_O = \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

- Cuando el punto **O** es el centro de masas del sólido, se llama **tensor central**:  $\overline{\overline{I}}_G$
- Los momentos y productos de inercia calculados en **G** también se llaman

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## Geometría de masas: Direcciones principales de inercia

Los  **ejes principales de inercia**  de un sólido relativos a un punto  **O**  son aquellos ejes con respecto a los cuales los  **productos de inercia**  son  **nulos** .

$$P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = 0$$

A los  **momentos**  de inercia con respecto a dichos ejes se les denomina  **principales de inercia**

$$\overline{\overline{I}}_O = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

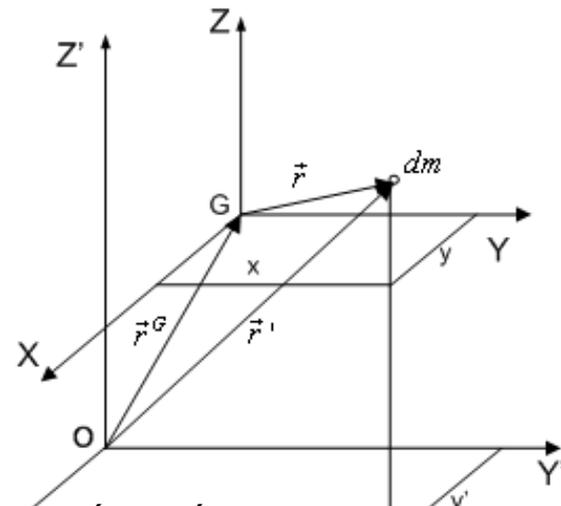
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Geometría de masas: Traslación de ejes

### *Teorema del eje paralelo o Teorema de Steiner:*

“El **momento de inercia** de un sistema material respecto a un eje es igual al momento de inercia del sistema respecto a un eje paralelo al primero, que pase por su **centro de masas**, más la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia entre dichos ejes”

$$I_{z'}^O = I_z^G + M d_{z,z'}^2$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

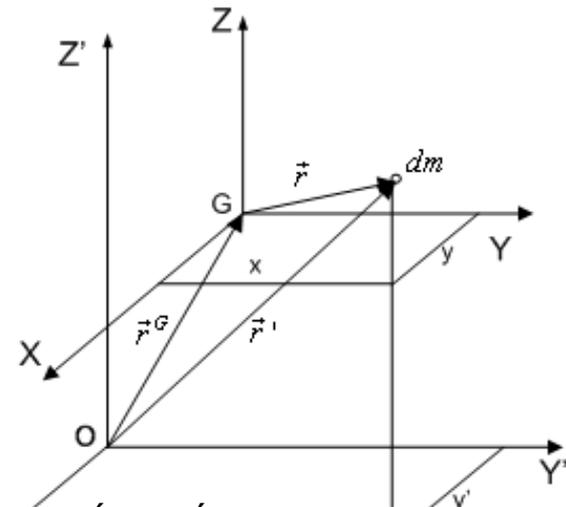
Cartagena99

## Geometría de masas: Traslación de ejes

### Teorema del eje paralelo o Teorema de Steiner:

“El **producto de inercia** de un sistema material respecto a dos planos perpendiculares es igual al producto de inercia del sistema respecto a dos planos paralelos a los anteriores, que pasen por su **centro de masas**, más la masa total del sistema por el las coordenadas del centro de masas”

$$P_{x'y'}^O = P_{xy}^G + x_G y_G M$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70