

MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I

Series de potencias

1) Determinar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!} & \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} (x-4)^n & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n} (2x+1)^n \\
 \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n+1}} (x+6)^n & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n & \text{f) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3}{n^2+2} (x-2)^n \\
 \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+3} (x-1)^{n+1} & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} n!(2x+2)^n & \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{4^n} (x+1)^{2n} \\
 \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2} x^{2n+1} & \text{k) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n} (x+2)^{3n+2} & \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} (3x+1)^n
 \end{array}$$

Solución: a) \mathbb{R} b) $(3, 5)$ c) \mathbb{R} d) $(-10, -2)$ e) $(-3, 3)$ f) $(3/2, 5/2)$ g) $(1/2, 3/2)$ h) $(-1, -1)$ i) $(-3, 1)$ j) $(-1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e})$ k) $(-4, 0)$ l) $(-2/3, 0)$.

2) Calcular el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en los puntos $a = 1$ y $a = 2$, y determinar sus intervalos de convergencia.

Solución: En $a = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (x-1)^n$ con intervalo de convergencia $(0, 2)$. En $a = 2$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^{n+2}} (x-2)^n$ con intervalo de convergencia $(0, 4)$.

3) **(La función exponencial)** Suponemos que $E(x)$ es una función derivable en \mathbb{R} que cumple $E'(x) = E(x)$ y $E(0) = 1$.

a) Demostrar que $E(-x) = 1/E(x)$ para todo $x > 0$. (Ayuda: derivando demostrar que $f(x) = E(x)E(-x)$ es constante).

b) Demostrar que $E(x+y) = E(x)E(y)$ para todo x, y . (Ayuda: derivando demostrar que para todo y la función $g_y(x) = E(x+y)E(-x)$ es constante).

c) Concluir de b) que $E(n \cdot x) = E(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Concluir de a) y b) que $E(n/m) = E(1)^{n/m}$ y $E(-n/m) = E(1)^{-n/m}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ (**Ayuda:** aplicar c) a $E(n \cdot 1) = E(m \cdot (n/m))$). Concluir por continuidad que $E(x) = E(1)^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

e) Comprobar que la función $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y cumple las condiciones $E'(x) = E(x)$ y $E(0) = 1$, y concluir de d) que $E(x) = E(1)^x$ con $E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



g) Demostrar que $e := \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = E(1)$, y por tanto $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

4) a) Demostrar que $n! \leq n^n$ para $n > 1$.

b) Usando el desarrollo en serie de e^x demostrar que $e^n \geq \frac{n^n}{n!}$.

c) Usar a) y b) para probar que $\ln(n!) \sim n \ln(n)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

5) Contestar **razonadamente** a las siguientes cuestiones

a) Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-3)^n$ es convergente en $x=0$ y divergente en $x=6$, determinar su campo de convergencia.

b) Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x+1)^n$ es convergente en $x=1$ y divergente en $x=3$ ¿qué valores puede tomar su radio de convergencia? ¿Qué caracter tiene la serie en $x=-2$? ¿y en $x=-6$?

c) Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ tiene radio de convergencia r , determinar el radio de convergencia de las series

c₁) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n x^n$, c₂) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n}$, c₃) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n x^{3n+1}$.

d) Si de una sucesión b_n sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$, calcular el intervalo de convergencia de las siguientes series:

d₁) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^2 x^n$, d₂) $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-3)^n$, d₃) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} (x+1)^n$.

Soluciones:

a) $[0, 6)$, b) $2 \leq r \leq 4$, en $x=1$ es convergente, en $x=3$ es divergente. c₁) $r/2$, c₂) \sqrt{r} , c₃) $\sqrt[3]{r/2}$ d₁) $(-1/9, 1/9)$, d₂) $(0, 6)$, d₃) $(-8/3, 2/3)$.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a background of a light blue and white geometric shape that resembles a stylized 'C' or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70