Electrónica de Comunicaciones

81.515

Grado de Tecnologías de Telecomunicación

COLECCIÓN DE PROBLEMAS

MÓDULO 3

Enunciados

Ejercicio 1

Sean los símbolos $s_m(t)$ de la señal siguiente:

$$s_m(t) = g(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\cos(\omega_c t) - g(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\sin(\omega_c t)$$

$$0 \le t \le T$$

Donde m=1, 2, ..., 8; g(t) es la expresión en el dominio temporal del pulso conformador.

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

A partir de la expresión de $s_m(t)$ calcula:

a. Su componente en fase $s_{mI}(t)$ y en cuadratura $s_{mQ}(t)$.

b. El equivalente paso bajo $s_{mL}(t)$ en términos del módulo $a_m(t)$ y de la fase $\theta_m(t)$.

c. Escribe $s_m(t)$ en función de:

   i. $s_{mI}(t)$ y $s_{mQ}(t)$

   ii. $s_{mL}(t)$

   iii. $a_k(t)$ y $\theta_k(t)$

d. ¿De qué tipo de modulación se trata? Justifica la respuesta.

Ejercicio 2

Queremos estudiar la relación señal / ruido de un cuantificador uniforme de b bits en función de cuál sea la densidad de probabilidad de la señal de entrada x(n). Las densidades de probabilidad de la señal de entrada las definimos en términos de las constantes C_n y de n según la expresión:

$$f_x(x) = \begin{cases} C_n\left(A - |x|\right)^n & para \quad |x| \leq A \\ 0 & para \quad |x| > A \end{cases}$$

Donde n=0,1,2,... . El símbolo | | representa el módulo y C_n es una constante diferente para cada n.

a. Determina cuánto vale la constante C_n en función de A y de n.

b. Determina el valor de la media y la varianza de las señales de entrada en función de A y de n.

c. Utilizando los valores hallados en los apartados anteriores determina la relación señal-ruido del cuantificador uniforme en función del número de bits del cuantificador b y del parámetro n (estadística de la señal de entrada) si el cuantificador uniforme trabaja en el margen de señal que va de $-A$ a A.

d. Da los valors en dBs de las relaciones señal-ruido de cuantificación cuando n y b tienen los siguientes valores.

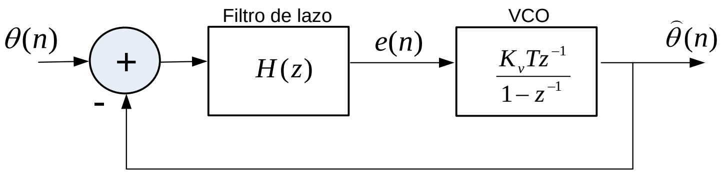
	b=8	b=16	b=24
n=0			
n=3			
n=5			
n=8			

Ayudas:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Ejercicio 3

Considera el modelo lineal del PLL digital que relaciona la fase de la señal de entrada con la estimación de la fase, según el esquema:



El filtro de lazo está formado solamente por una parte proporcional, con una constante de proporcionalidad α. Es decir H(z)= α.

a. Considera $K_v T$=1. ¿Cuál es la estimación de la fase en la salida del PLL cuando en la fase de entrada se produce un cambio repentino definido por $\theta(n)=(\pi/4)u(n)$, siendo u(n) una función escalón unitario?. Expresa el resultado en función de α.

b. Da la expresión de e(n). En vista de la expresión anterior, ¿qué condición tiene que cumplir α para que el PLL enganche, si mantenemos las condiciones anteriores (KvT=1 y $\theta(n)=\pi/4u(n)$)?

c. Dibuja el error de fase en la entrada anterior cuando α=0,5. Para n=0 hasta n=7.

Ayudas: $Z\left[a^n u(n)\right] = \dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$

Ejercicio 4

Sean los símbolos $s_m(t)$:

$$s_m(t) = g(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\cos(\omega_c t) - g(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\sin(\omega_c t)$$

$$0 \le t \le T$$

Donde *m* = 1, 2, ..., 8; g(t) es la expresión en el dominio temporal del pulso conformador.

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

a. Descompón la señal en una combinación lineal de dos señales ortogonales f_1 y f_2. A continuación dibuja la constelación de la señal sobre los ejes f_1 y f_2, considerando por simplicidad, que la energía del pulso E_g, vale 2.

b. Calcula el espectro de potencia del equivalente paso bajo de $s_m(t)$ considerando que los símbolos s_m son independientes entre sí y equiprobables. E_g, vale 2.

Ayuda. Trabaja con símbolos $s_m=s_{m1}+js_{m2}$ donde el par (s_{m1},s_{m2}) define los puntos de la constelación determinados en el apartado anterior. Deja la expresión final en función de T.

Ayudas:

$$G(f) = T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j\pi f T} \qquad S_l(f) = \frac{\sigma_s^2}{T}|G(f)|^2 + \frac{\mu_s^2}{T^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|G\left(\frac{m}{T}\right)\right|^2\delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

$$\mu_s = E[s_m] = \sum_{m=1}^{N} s_m p(s_m)$$

$$\sigma_s^2 = E\left[(s_m-\mu_s)(s_m-\mu_s)^*\right] = \sum_{m=1}^{N}(s_m-\mu_s)(s_m-\mu_s)^* p(s_m)$$

Ejercicio 5

Sean los símbolos $s_m(t)$ de la señal siguiente:

$$s_m(t) = \mathrm{Re}[(a_m + jb_m)g(t)e^{j\omega_c t}] \qquad \text{para} \qquad 0 \leq t \leq T$$

Donde *m*=1, 2, ..., M; g(t) es la expresión en el dominio temporal del pulso conformador.

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

A partir de la expresión de $s_m(t)$ calcula:

a. Su componente en fase $s_{mI}(t)$ y en cuadratura $s_{mQ}(t)$.

b. El equivalente paso bajo $s_{mL}(t)$ en términos del módulo $a_m(t)$ y de la fase $\theta_m(t)$.

c. Escribe $s_m(t)$ en función de:
   i. $s_{mI}(t)$ y $s_{mQ}(t)$.
   ii. $s_{mL}(t)$ del apartado anterior.

d. ¿De qué tipo de modulación se trata? Justifica la respuesta.

Datos:

$$\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B)$$
$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$$

Ejercicio 6

Sean los símbolos $s_m(t)$ de la señal siguiente:

$$s_m(t) = g(t)\cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{8}(m-1)\right) \qquad \text{para} \qquad 0 \le t \le T$$

Donde *m* =1, 2, ..., 16; g(t) es la expresión en el dominio temporal del pulso conformador.

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

A partir de la expresión de $s_m(t)$ calcula:

a. Su componente en fase $s_{mI}(t)$ y en cuadratura $s_{mQ}(t)$.

b. El equivalente paso bajo $s_{mL}(t)$ en términos del módulo $a_m(t)$ y de la fase $\theta_m(t)$.

c. Escribe $s_m(t)$ en función de:

   i. $s_{mI}(t)$ y $s_{mQ}(t)$

   ii. $s_{mL}(t)$

   iii. $a_k(t)$ y $\theta_k(t)$

d. ¿De qué tipo de modulación se trata? Justifica la respuesta.

Soluciones

Ejercicio 1

Sean los símbolos $s_m(t)$ de la señal siguiente:

$$s_m(t) = g(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\cos(\omega_c t) - g(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\sin(\omega_c t)$$

$$0 \le t \le T$$

Donde *m*=1, 2, ..., 8; g(t) es la expresión en el dominio temporal del pulso conformador.

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

A partir de la expresión de $s_m(t)$ calcula:

a. Su componente en fase $s_{mI}(t)$ y en cuadratura $s_{mQ}(t)$.

Directamente de la expresión 3.17 del módulo observamos que:

$$s_{mI}(t) = g(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)$$
$$s_{mQ}(t) = g(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)$$
$$m = 1,2,\ldots 8.$$

b. El equivalente paso bajo $s_{mL}(t)$ en términos del módulo $a_m(t)$ y de la fase $\theta_m(t)$.

$$s_{mL}(t) = g(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right) + jg(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right) = g(t)e^{j\frac{\pi}{4}(m-1)}$$

$$a_m(t) = g(t)$$
$$\theta_m(t) = \frac{\pi}{4}(m-1) \qquad m = 1,2,\ldots 8.$$

c. Escribe $s_m(t)$ en función de:

   i. $s_{mI}(t)$ y $s_{mQ}(t)$

   ii. $s_{mL}(t)$

   iii. $a_k(t)$ y $\theta_k(t)$

$$
\begin{aligned}
s_m(t) &= g(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\cos(\omega_c t) - g(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\sin(\omega_c t) \\
&= \mathrm{Re}\left[g(t)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\right)e^{j\omega_c t}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[g(t)e^{j\frac{\pi}{4}(m-1)}e^{j\omega_c t}\right] \\
&= g(t)\cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{4}(m-1)\right)
\end{aligned}
$$

d. ¿De qué tipo de modulación se trata? Justifica la respuesta.

Se trata de una modulación de fase. Los símbolos que se envían son:

$$s_m = e^{j\theta_m} = e^{j\frac{\pi}{4}(m-1)} = e^{j2\pi\frac{m-1}{8}} \quad para \quad m = 1,2,\ldots,8$$

Correspondientes a las fases:

$$\theta_m = \frac{\pi}{4}(m-1) = 2\pi\frac{m-1}{8} \; para \quad m = 1,2,\ldots,8$$

Ejercicio 2

Queremos estudiar la relación señal / ruido de un cuantificador uniforme de b bits en función de cuál sea la densidad de probabilidad de la señal de entrada x(n). Las densidades de probabilidad de la señal de entrada las definimos en términos de las constantes C_n y de n según la expresión:

$$f_x(x) = \begin{cases} C_n\left(A - |x|\right)^n & para \quad |x| \le A \\ 0 & para \quad |x| > A \end{cases}$$

Donde n=0,1,2,... . El símbolo | | representa el módulo y C_n es una constante diferente para cada n.

a. Determina cuánto vale la constante C_n en función de A y de n.

Sabemos que si f(x) es una función de densidades de probabilidad cumplirá:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = \int_{-A}^{A} C_n\left(A-|x|\right)^n dx = C_n \int_{-A}^{A} \left(A-|x|\right)^n dx = \begin{bmatrix} función \\ par \end{bmatrix} = 2C_n \int_{0}^{A} \left(A-|x|\right)^n dx =$$

$$2C_n \int_{0}^{A} (A-x)^n dx = \begin{bmatrix} u = A - x \rightarrow & du = -dx \\ x = 0 \rightarrow & u = A \\ x = A \rightarrow & u = 0 \end{bmatrix} = 2C_n \left.\frac{u^{n+1}}{n+1}\right|_0^A = 2C_n \frac{A^{n+1}}{n+1}$$

De donde $\quad C_n = \dfrac{n+1}{2A^{n+1}}$

b. Determina el valor de la media y la varianza de las señales de entrada en función de A y de n.

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx = \begin{bmatrix} f_x(x):\ par \\ x f_x(x) \rightarrow impar \end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)dx = \begin{bmatrix} f_x(x): par \\ x^2 f_x(x) \rightarrow impar \end{bmatrix} = 2C_n \int_0^A x^2 (A-x)^n dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2x\cdot dx \\ dv = (A-x)^n dx & v = \dfrac{(A-x)^{n+1}}{n+1} \end{bmatrix} = 2C_n \left[x^2 \left.\frac{(A-x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^A - \frac{2}{n+1}\int_0^A x(A-x)^{n+1} dx \right]$$

$$-\frac{4C_n}{n+1}\int_0^A x(A-x)^{n+1} dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = (A-x)^{n+1} dx & v = \dfrac{(A-x)^{n+2}}{n+2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{4C_n}{n+1}\left[x \left.\frac{(A-x)^{n+2}}{n+2}\right|_0^A - \frac{1}{n+2}\int_0^A (A-x)^{n+2} dx \right] = \frac{4C_n A^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{4A^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} C_n = \frac{4A^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} \frac{(n+1)}{2A^{n+1}} = \frac{2A^2}{(n+2)(n+3)}$$

c. Utilizando los valores hallados en los apartados anteriores determina la relación señal-ruido del cuantificador uniforme en función del número de bits del cuantificador *b* y del parámetro *n* (estadística de la señal de entrada) si el cuantificador uniforme trabaja en el margen de señal que va de –*A* a *A*.

Utilizando el resultado de la ecuación 3.31 para la varianza del error de cuantificación tenemos:

$\sigma_e{}^2 = \dfrac{\Delta^2}{12}$ *donde* Δ, *de (3.24) es* $\Delta = \dfrac{2X_{\max}}{2^b}$.

En nuestro caso, $X_{\max} = A$

Por lo tanto, $\sigma_e{}^2 = \dfrac{\Delta^2}{12} = \dfrac{A^2}{3\cdot 2^{2b}}$

y $SNR_Q = \dfrac{\sigma_x{}^2}{\sigma_e{}^2} = \dfrac{2A^2}{(n+2)(n+3)} \dfrac{3\cdot 2^{2b}}{A^2} = \dfrac{6\cdot 2^{2b}}{(n+2)(n+3)}$

d. Da los valors en dBs de las relaciones señal-ruido de cuantificación cuando *n* y *b* tienen los siguientes valores.

$$SNR_Q[dB] = 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_x{}^2}{\sigma_e{}^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{6\cdot 2^{2b}}{(n+2)(n+3)}\right)$$

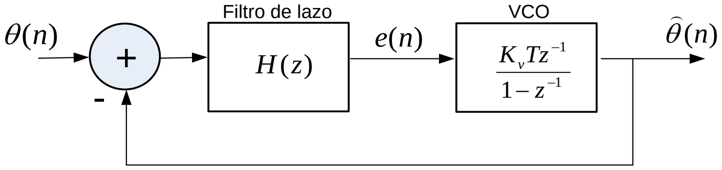
	b=8	b=16	b=24
n=0	48.16	96.32	144.49
n=3	41.18	89.34	137.50
n=5	38.46	86.63	134.79
n=8	35.53	83.70	131.86

Ayudas:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Ejercicio 3

Considera el modelo lineal del PLL digital que relaciona la fase de la señal de entrada con la estimación de la fase, según el esquema:



El filtro de lazo está formado solamente por una parte proporcional, con una constante de proporcionalidad α. Es decir H(z)= α.

a. Considera $K_v T$=1. ¿Cuál es la estimación de la fase en la salida del PLL cuando en la fase de entrada se produce un cambio repentino definido por $\theta(n)=(\pi/4)u(n)$, siendo u(n) una función escalón unitario?. Expresa el resultado en función de α.

La función de transferencia de los bloques es (ver eq. 3.141):

$$T(z)=\frac{\hat{\theta}(z)}{\theta(z)}=\frac{H(z)\dfrac{K_v T z^{-1}}{1-z^{-1}}}{1+H(z)\dfrac{K_v T z^{-1}}{1-z^{-1}}}=\frac{H(z)K_v T z^{-1}}{1-z^{-1}+H(z)K_v T z^{-1}}$$

Particularizada para H(z)=α tenemos:

$$T(z)=\frac{\hat{\theta}(z)}{\theta(z)}=\frac{\alpha K_v T z^{-1}}{1-z^{-1}+\alpha K_v T z^{-1}}=\frac{\alpha K_v T z^{-1}}{1+(\alpha K_v T-1)z^{-1}}$$

Particularizando para $K_v T$=1:

$$T(z)=\frac{\hat{\theta}(z)}{\theta(z)}=\frac{\alpha z^{-1}}{1+(\alpha-1)z^{-1}}=\frac{\alpha}{z+(\alpha-1)}$$

Entonces:

$$\theta(z)=\frac{\pi}{4}Z[u(n)]=\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{(\pi/4)z}{z-1}$$

$$\hat{\theta}(z)=T(z)\theta(z)=\frac{\alpha(\pi/4)z}{(z+(\alpha-1))(z-1)}$$

Invertimos la transformada:

$$\frac{\hat{\theta}(z)}{z} = \frac{\alpha(\pi/4)}{(z+(\alpha-1))(z-1)} = \frac{A}{z+(\alpha-1)} + \frac{B}{z-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = \left.\dfrac{\alpha(\pi/4)}{z-1}\right|_{z=1-\alpha} = -\pi/4 \\ B = \left.\dfrac{\alpha(\pi/4)}{z+(\alpha-1)}\right|_{z=1} = \pi/4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(z) = \frac{-(\pi/4)z}{z-(1-\alpha)} + \frac{(\pi/4)z}{z-1} \rightarrow \hat{\theta}(n) = -\frac{\pi}{4}(1-\alpha)^n u(n) + \frac{\pi}{4}u(n)$$

b. Da la expresión de e(n). En vista de la expresión anterior, ¿qué condición tiene que cumplir α para que el PLL enganche, si mantenemos las condiciones anteriores (KvT=1 y $\theta(n)=\pi/4u(n)$)?

$$e(n) = \theta(n) - \hat{\theta}(n) = \frac{\pi}{4}(1-\alpha)^n u(n)$$

Para que el PLL se enganche en la entrada, el término de error, e(n), tiene que tender a cero. La condición por lo tanto tiene que ser:

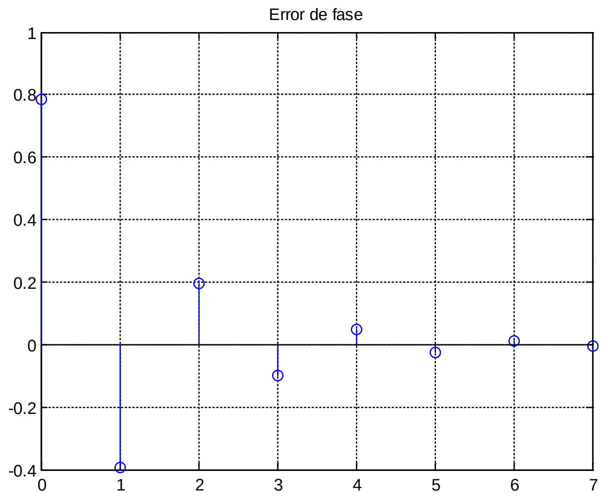
$$|1-\alpha| \leq 1$$

Es decir: $-1 < 1-\alpha < 1$

De donde se obtiene: $2 > \alpha > 0$

c. Dibuja el error de fase en la entrada anterior cuando α=0,5. Para n=0 hasta n=7.

$$e(n) = \frac{\pi}{4}(0.5)^n u(n)$$



Con los valores:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
e(n)	0.7854	-0.3927	0.1963	-0.0982	0.0491	-0.0245	0.0123	-0.0061

Ayudes: $Z\left[a^n u(n)\right] = \dfrac{1}{1 - az^{-1}} = \dfrac{z}{z - a}$

Ejercicio 4

Sean los símbolos $s_m(t)$:

$$s_m(t) = g(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\cos(\omega_c t) - g(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}(m-1)\right)\sin(\omega_c t)$$

$$0 \le t \le T$$

Donde *m* = 1, 2, ..., 8; g(t) es la expresión en el dominio temporal del pulso conformador.

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

a. Descompón la señal en una combinación lineal de dos señales ortogonales f_1 y f_2. A continuación dibuja la constelación de la señal sobre los ejes f_1 y f_2, considerando por simplicidad, que la energía del pulso E_g, vale 2

De acuerdo con la teoría las señales PSK se pueden representar como una combinación lineal de dos señales ortonormales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tal como:

$$s_m(t) = s_{m1} f_1(t) + s_{m2} f_2(t), \quad donde \quad \begin{aligned} f_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{E_g}}\, g(t)\cos\omega_c t \\ f_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{E_g}}\, g(t)\sin\omega_c t \end{aligned}$$

Donde,

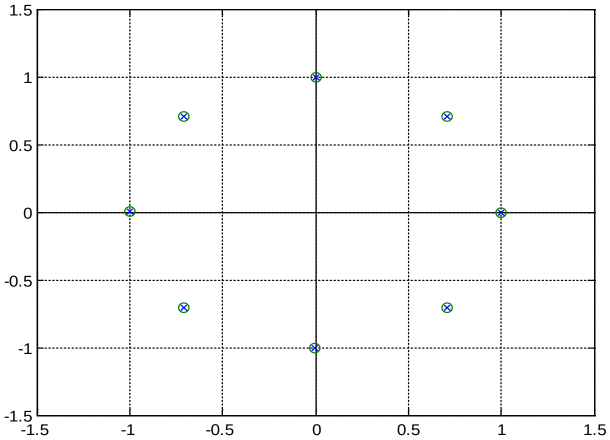
$$s_{m1} = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{M}(m-1)\right) \quad \text{y} \quad s_{m2} = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\sin\left(\frac{2\pi}{M}(m-1)\right)$$

Con, $E_g = \int_0^T g^2(t)\,dt$

Dado que E_g =2, calculamos s_{m1} y s_{m2} para m=1 hasta 8.

m	s_{m1}	s_{m2}
1.0000	1.0000	0.0000
2.0000	0.7071	0.7071
3.0000	0.0000	1.0000
4.0000	-0.7071	0.7071
5.0000	-1.0000	0.0000
6.0000	-0.7071	-0.7071
7.0000	0.0000	-1.0000
8.0000	0.7071	-0.7071

Los símbolos se distribuyen en un círculo de radio 1. El eje horizontal es f1 y el vertical f2.



b. Calcula el espectro de potencia del equivalente paso bajo de $s_m(t)$ considerando que los símbolos s_m son independientes entre sí y equiprobables. E_g, vale 2.

Ayuda. Trabaja con símbolos $s_m=s_{m1}+js_{m2}$ donde el par (s_{m1},s_{m2}) define los puntos de la constelación determinados en el apartado anterior. Deja la expresión final en función de T.

Con Eg=2 tenemos:

$$s_m = s_{m1} + js_{m2} = \cos\left(\frac{2\pi}{8}(m-1)\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{8}(m-1)\right) = e^{j\frac{2\pi}{8}(m-1)}$$

Calculemos la media:

$$\mu_s = E[s_m] = \tfrac{1}{8}\sum_{m=1}^{8} e^{j\frac{2\pi}{8}(m-1)} = \tfrac{1}{8}\left(1+e^{j\frac{2\pi}{8}}+e^{j\frac{4\pi}{8}}+e^{j\frac{6\pi}{8}}+e^{j\frac{8\pi}{8}}+e^{j\frac{10\pi}{8}}+e^{j\frac{12\pi}{8}}+e^{j\frac{14\pi}{8}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{8}\left(1+e^{j\frac{2\pi}{8}}+e^{j\frac{4\pi}{8}}+e^{j\frac{6\pi}{8}}+e^{j\frac{8\pi}{8}}+e^{j\frac{8\pi}{8}}e^{j\frac{2\pi}{8}}+e^{j\frac{8\pi}{8}}e^{j\frac{4\pi}{8}}+e^{j\frac{8\pi}{8}}e^{j\frac{6\pi}{8}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{8}\left(1+e^{j\frac{2\pi}{8}}+e^{j\frac{4\pi}{8}}+e^{j\frac{6\pi}{8}}-1-e^{j\frac{2\pi}{8}}-e^{j\frac{4\pi}{8}}-e^{j\frac{6\pi}{8}}\right) = 0$$

Calculemos la varianza:

$$\sigma_s^2 = E\left[(s_m-\mu_s)(s_m-\mu_s)^*\right] = p(s_m)\sum_{m=1}^{N} s_m s_m^* = p(s_m)\sum_{m=1}^{N}\left|s_m\right|^2 = \tfrac{1}{8}\sum_{m=1}^{8}1 = 1$$

Utilicemos la expresión general 3.45 del espectro de la señal banda base. De la fórmula de la ayuda es directo:

$$S_l(f) = \frac{\sigma_s{}^2}{T}\left|G(f)\right|^2 = T\left(\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right)^2 = T\cdot SINC^2(\pi fT)$$

Ayudas:

$$G(f) = T\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}e^{-j\pi fT} \qquad S_l(f) = \frac{\sigma_s{}^2}{T}\left|G(f)\right|^2 + \frac{\mu_s{}^2}{T^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|G\left(\frac{m}{T}\right)\right|^2\delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$$

$$\mu_s = E[s_m] = \sum_{m=1}^{N} s_m\, p(s_m)$$

$$\sigma_s^2 = E\left[(s_m-\mu_s)(s_m-\mu_s)^*\right] = \sum_{m=1}^{N}(s_m-\mu_s)(s_m-\mu_s)^*\, p(s_m)$$

Ejercicio 5

Sean los símbolos $s_m(t)$ de la señal siguiente:

$$s_m(t) = \mathrm{Re}[(a_m + jb_m)g(t)e^{j\omega_c t}] \qquad \text{para} \qquad 0 \le t \le T$$

Donde *m*=1, 2, ..., M; g(t) es la expresión en el dominio temporal del pulso conformador.

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

A partir de la expresión de $s_m(t)$ calcula:

a. Su componente en fase $s_{mI}(t)$ y en cuadratura $s_{mQ}(t)$.

Partiendo de:

$$s_m(t) = \mathrm{Re}[(a_m + jb_m)g(t)e^{j\omega_c t}] = \mathrm{Re}[(a_m + jb_m)g(t)(\cos(\omega_c t) + j\sin(\omega_c t))]$$
$$= \mathrm{Re}[(a_m + jb_m)g(t)(\cos(\omega_c t) + j\sin(\omega_c t))] = a_m g(t)\cos(\omega_c t) - b_m g(t)\sin(\omega_c t)$$

Y teniendo en cuenta que $s_m(t) = s_{mI}(t)\cos(\omega_c t) - s_{mQ}(t)\sin(\omega_c t)$

Es directo: $s_{mI}(t) = a_m g(t)$ *i* $s_Q(t) = b_m g(t)$

b. El equivalente paso bajo $s_{mL}(t)$ en términos del módulo $a_m(t)$ y de la fase $\theta_m(t)$.

Tenemos que: $\mathrm{s_{mL}}(\mathrm{t}) = \mathrm{a_m}(\mathrm{t})e^{j\theta_m(t)}$ *donde*

$$a_m(t) = g(t)\left(\sqrt{(a_m)^2 + (b_m)^2}\right) \quad y \quad \theta_m(t) = TAN^{-1}\left(\frac{b_m}{a_m}\right)$$

c. Escribe $s_m(t)$ en función de:

i. $s_{mI}(t)$ y $s_{mQ}(t)$

$$s_m(t) = s_{mI}(t)\cos(\omega_c t) - s_{mQ}(t)\sin(\omega_c t)$$

donde: $s_{mI}(t) = a_m g(t)$ *y* $s_Q(t) = b_m g(t)$

ii. *$s_{mL}(t)$* del apartado anterior

$$s_m(t) = \mathrm{Re}[\mathrm{s}_{\mathrm{mL}}(\mathrm{t})e^{j\omega_c t}] = \mathrm{Re}[\mathrm{a}_{\mathrm{m}}(\mathrm{t})e^{j\theta_m(t)}e^{j\omega_c t}] = \mathrm{a}_{\mathrm{m}}(\mathrm{t})\cos(\omega_c t + \theta_m(t))$$

Donde $a_m(t) = g(t)\left(\sqrt{(a_m)^2 + (b_m)^2}\right)$ *y* $\theta_m(t) = TAN^{-1}\left(\frac{b_m}{a_m}\right)$

d. ¿De qué tipo de modulación se trata? Justifica la respuesta.

Modulación QAM de 8 niveles.

Datos:

$$\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B)$$
$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$$

Ejercicio 6

Sean los símbolos $s_m(t)$ de la señal siguiente:

$$s_m(t) = g(t)\cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{8}(m-1)\right) \qquad \text{para} \qquad 0 \le t \le T$$

On m =1, 2, ..., 16; g(t) és l'expressió en el domini temporal del pols conformador.

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

A partir de la expresión de $s_m(t)$ calcula:

a. Su componente en fase $s_{mI}(t)$ y en cuadratura $s_{mQ}(t)$.

Partiendo de:

$$s_m(t) = g(t)\cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{8}(m-1)\right) = \mathrm{Re}[g(t)e^{j\frac{\pi}{8}(m-1)}e^{j\omega_c t}] =$$

$$= g(t)\cos\left(\frac{\pi}{8}(m-1)\right)\cos(\omega_c t) - g(t)\sin\left(\frac{\pi}{8}(m-1)\right)\sin(\omega_c t)$$

Y teniendo en cuenta que $s_m(t) = s_{mI}(t)\cos(\omega_c t) - s_{mQ}(t)\sin(\omega_c t)$

Es directo: $s_{mI}(t) = g(t)\cos\left(\frac{\pi}{8}(m-1)\right)$ *i* $s_Q(t) = g(t)\sin\left(\frac{\pi}{8}(m-1)\right)$

b. El equivalente paso bajo $s_{mL}(t)$ en términos del módulo $a_m(t)$ y de la fase $\theta_m(t)$.

Tenemos que: $\mathrm{s}_{\mathrm{mL}}(\mathrm{t}) = \mathrm{a}_{\mathrm{m}}(\mathrm{t})e^{j\theta_m(t)}$ *donde*

$$a_m(t) = g(t) \;\; y \quad \theta_m(t) = \frac{\pi}{8}(m-1)$$

c. Escribe $s_m(t)$ en función de:

i. $s_{mI}(t)$ y $s_{mQ}(t)$

$$s_m(t) = s_{mI}(t)\cos(\omega_c t) - s_{mQ}(t)\sin(\omega_c t)$$

on: $s_{mI}(t) = g(t)\cos\left(\frac{\pi}{8}(m-1)\right)$ *i* $s_Q(t) = g(t)\sin\left(\frac{\pi}{8}(m-1)\right)$

ii. $s_{mL}(t)$

$$s_m(t) = \mathrm{Re}[\mathrm{s}_{\mathrm{mL}}(\mathrm{t})e^{j\omega_c t}] = \mathrm{Re}[\mathrm{a}_{\mathrm{m}}(\mathrm{t})e^{j\theta_m(t)}e^{j\omega_c t}] = \mathrm{a}_{\mathrm{m}}(\mathrm{t})\cos(\omega_c t + \theta_m(t))$$

On $a_m(t) = g(t)$ *y* $\theta_m(t) = \frac{\pi}{8}(m-1)$

iii. $a_k(t)$ y $\theta_k(t)$

$$s_m(t) = \mathrm{Re}\left[g(t)e^{j\frac{\pi}{8}(m-1)}e^{j\omega_c t}\right] = g(t)\cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{8}(m-1)\right)$$

d. ¿De qué tipo de modulación se trata? Justifica la respuesta.

Modulación 16-PSK según la ecuación 3.95. No se transmite información en el cambio de amplitud, sino solamente en la fase.