Ejemplo Sea la sucesión recurrente $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$.

- Utilizando el principio de inducción, se demuestra que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente:
  - Si n=1, se verifica que $a_1 \leq a_2$ porque $1 \leq \frac{4}{3}$.
  - Supuesta cierta la desigualdad para n, $a_n \leq a_{n+1}$, probamos que es cierta para n+1, $a_{n+1} \leq a_{n+2}$:

  $$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{3}a_n \leq \frac{1}{3}a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{3}a_n + 1 \leq \frac{1}{3}a_{n+1} + 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}.$$

  Luego se cumple que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Ahora se prueba, también por inducción, que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente por $M = \frac{3}{2}$:
  - Si n=1, se verifica que $a_1 \leq \frac{3}{2}$ porque $1 \leq \frac{3}{2}$.
  - Supuesta cierta la desigualdad para n, $a_n \leq \frac{3}{2}$, probamos que es cierta para n+1, $a_{n+1} \leq \frac{3}{2}$:

  $$a_n \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}a_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}a_n + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq \frac{3}{2}.$$

  Luego se cumple que $a_n \leq \frac{3}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Así pues, la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente y acotada superiormente. Por tanto, es convergente, es decir, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$.
- Para calcular su valor, se toma límite en la expresión que define la sucesión y se utiliza la siguiente propiedad: "Si $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = L$".