EJERCICIOS TEMA 2

2.14. Halla la representación en las bases 2, 7 y 11 de los siguientes números expresados en base decimal: 137, 6243, 762, 1995

2.15. Halla la representación usual (en base 10) de 11011101_2, 4165_7, 1995_{11}, 1213_7, 1213_5

2.16. Halla la representación en binario y octal de $(DE481)_{16}$ y de $(581F)_{16}$

2.17. Halla la representación en octal y hexadecimal de 111000101_2 y de 1010101_2

2.18. Halla x en las expresiones $331_x = 106_{11}$ y $274_8 = x_2$

2.19. Usa el Algoritmo de Euclides para calcular d = mcd (a, b), y encuentra x e y tales que $d = ax + by$.
1) $a = 1312$, $b = 800$ 2) $a = 322$, $b = 406$.
3) $a = 1326$, $b = 900$ 4) $a = 312$, $b = 62$

2.20. Se dispone de un suministro ilimitado de agua, un gran cubo con un desagüe y dos garrafas que contienen 7 y 9 litros respectivamente, ¿cómo podría ponerse un litro de agua en el cubo?

2.21. Demuestra que el cuadrado de todo número entero es de la forma 4k ó 4k + 1

2.22. Demuestra que el cubo de todo número entero es de la forma 9k ó 9k + 1 ó 9k +8

2.23. Si a es n entero que no es múltiplo de 2 ni de 3 demuestra que $24 \mid a^2 - 1$

2.24. Demuestra que si 5 no divide a n entonces 5 divide a $n^8 - 1$

2.25. Prueba que si a|c, b|c y mcd (a, b) = 1 entonces ab | c

2.26. Si a, b $\in$ N se define el mínimo común múltiplo de a y b como m = mcm(a, b) = $ab \big/ m.c.d.(a,b)$
Prueba que: 1) a|m, b|m.
2) Si q es tal que a|q y b|q entonces m|q

2.27. Si a y b son enteros tales que mcd (a, b) = 1, demuestra que mcd($a + b$, $a^2 + b^2$) = 1 ó 2

2.28. Calcula las soluciones enteras de las siguientes ecuaciones diofánticas:
a) $28x + 36y = 44$. b) $66x + 550y = 88$ c) $966x + 686y = 70$

2.29. Determina los valores de $c \in Z^+$, $10 < c < 20$, para los que la ecuación diofántica $84x + 990y = c$ tiene solución y determínala, en su caso.

2.30. Un turista tiene 1000 coronas checas y quiere cambiar ese dinero en una cantidad exacta de libras chipriotas y zlotys polacos. El cambio que le ofrece una cierta Oficina de Cambio es el siguiente: un zloty polaco = 13 coronas checas y una libra chipriota = 18 coronas checas. La oficina no proporciona fracciones de ninguna moneda, ¿de cuántas formas diferentes puede hacerlo? Describe una de dichas formas.

2.31. Halla todos los múltiplos de 28 cuyas dos últimas cifras sean 16

2.32. Un agente de Cambio y Bolsa tiene invertido dinero en acciones de Azucarera y Repsol. Las acciones de Azucarera se cotizan a 89 euros y las de Repsol a 614 euros cada una. Necesita hacer una transacción para disponer exactamente de 1000 euros en efectivo. ¿Puede hacerlo comprando acciones de Repsol y vendiendo acciones de Azucarera, solamente? En caso afirmativo, ¿cuántas acciones de cada tipo, como mínimo, comprará y venderá?

2.33. Demuestra que si p es primo distinto de 2 y de 5 entonces, o bien $p^2 - 1$, o bien $p^2 + 1$ es divisible por 10

2.34. Estudia si son o no primos, los números 811, 493 y 911.

2.35. Utiliza la identidad $2^{rs} - 1 = (2^r - 1)\,(2^{(s-1)r} + 2^{(s-2)r} + \dots + 2^r + 1)$ para demostrar que si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo. ¿Es cierto el recíproco?

2.36. Halla el valor de un entero positivo n con las siguientes propiedades:
i) n no contiene cuadrados (es decir, no hay factores repetidos en la factorización de n en números primos)
ii) Para cada primo p se tiene que $p|n \iff p - 1 \mid n$

2.37. Estudia si son ciertas las siguientes afirmaciones:
a) $\forall m \in Z$, 2m y 4m+3 son primos entre sí.
b) $\forall m \in Z$, 2m+1 y 3m+2 son primos entre sí.

2.38. Aplica el criterio de Eisenstein para probar que los polinomios $P(x) = x^3 - 8x + 2$, y $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 12x - 3$ son irreducibles.

2.39. Prueba que el polinomio $P(x) = x^2 + x + 1$ es irreducible

2.40. Una empresa envía por mensajería paquetes a una de sus delegaciones. Los paquetes son de dos tamaños. El envío de un paquete grande cuesta 15 euros más que el envío de uno pequeño. Sabiendo que se han enviado 12 paquetes, que el coste total ha sido de 1320 euros y que se han enviado más paquetes pequeños que grandes, ¿cuántos paquetes de cada tamaño se han enviado y cuánto han cobrado por cada uno?

2.41. Halla todos los puntos de coordenadas enteras del primer octante ($x, y, z \geq 0$) de la recta determinada por los planos

$$2x + 3y + 5z = 17$$
$$3x + 4y + 4z = 18$$

2.42. Se considera la ecuación diofántica $3x + 7y = c$ donde $c \in \mathbf{Z}^+$. Se pide:
(a) Resolver la ecuación.
(b) ¿Cuál es el mínimo valor de c para el que la ecuación tiene soluciones positivas?
(c) ¿A partir de qué valor de c podemos garantizar que la ecuación siempre va a tener soluciones positivas?
(d) ¿Entre qué dos valores debe estar c para poder garantizar la existencia de dos soluciones positivas, sin garantizar la existencia de una tercera? Para alguno de los valores encontrados, ¿puede haber tres soluciones positivas?
(e) ¿Cuál es el mínimo valor de c para que la ecuación admita soluciones “pares”. Hallar para dicho valor todas las soluciones pares de la ecuación.