Apellidos: ______________________________ **Nombre:** ____________________

IMPORTANTE

- Duración del examen: **90 minutos**
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (20 puntos) Considere un sistema de control multivariable en que la matriz del sistema en lazo abierto G_A y la matriz del sistema en lazo cerrado G_C obedecen, respectivamente, a

$$G_A = \begin{bmatrix} K_1 \dfrac{50,6\mathrm{e}^{-s}}{263,12+15,5s} & \dfrac{-18,9\mathrm{e}^{-3s}}{21s+1} \\ \dfrac{6,6\mathrm{e}^{-7s}}{10,9s+1} & K_4 \dfrac{19,4\mathrm{e}^{-3s}}{14,4s+302,64} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G_C = \begin{bmatrix} \dfrac{100}{10+350s} & 3,44 \\ -1,2 & \dfrac{50}{10+576s} \end{bmatrix}.$$

Determine el valor de las ganancias K_1 y K_4, a fin de que la matriz de ganancias relativas atienda a

$$\lambda = \begin{bmatrix} 6,5 & -5,5 \\ -5,5 & 6,5 \end{bmatrix}.$$

2. (25 puntos) Considere un sistema de control, con realimentación unitaria, cuya función de transferencia en lazo abierto obedece a

$$G(s) = \frac{K}{s^3+s^2+4s}.$$

Determine el valor de K, de forma que el margen de fase ascienda a 50°. Para el valor de K calculado, compute el margen de ganancia que presenta el sistema de control, y bosqueje su diagrama de Bode.

3. (25 puntos) Sea el sistema de control, con realimentación unitaria, mostrado en la figura 1. Diseñe un regulador $G_c(s)$ de manera que la constante estática de error de velocidad

K_v sea 20 s^{-1}, a la vez que se preserva, sin cambios significativos, la localización de los polos complejos conjugados en lazo cerrado.

Notas:

El módulo del regulador, evaluado en las proximidades de las raíces dominantes, no debe disociarse de su valor ideal más allá del 0,5 %.

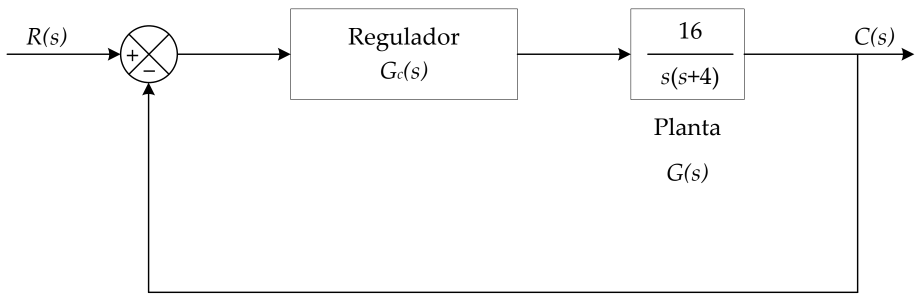


Figura 1: Sistema de control considerado.

4. (10 puntos) Determine la transformada z de las siguientes funciones.

   1. $f(k) = k^3$. No se limite a copiar lo que figura en la tabla; opere algebraicamente hasta obtener la solución.
   2. $f(k) = 9k(2^{k-1}) - 2^k + 3$, para $k \geqslant 0$.

5. (10 puntos) Sea la transformada z

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 1,3z^{-1} + 0,4z^{-2})}.$$

   1. Determine los valores inicial y final de $x(k)$ sin estimar la transformada z inversa.
   2. Obtenga la transformada z inversa en forma cerrada, $x(k)$, sirviéndose del método de expansión en fracciones simples.

6. (10 puntos) Resuelva la siguiente ecuación en diferencias,

$$x(k+2) - x(k+1) + 0,25x(k) = u(k+2),$$

suponiendo que $x(0) = 1, x(1) = 2$; además, emplee el método de la integral de inversión en el cálculo de la transformada z inversa.

$$\lambda_{ij} = \frac{\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{Y_i(s)}{U_j(s)}}{\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{Y_i(s)}{U_j(s)}} \quad \begin{matrix} \text{LAZOS ABIERTOS} \\ \text{LAZOS CERRADOS} \end{matrix}$$

$$\lambda_{11} = 6,5 = \frac{50,6 \cdot K_1}{263,12 \cdot 10} \; ; \; K_1 = 338$$

$$\lambda_{22} = 6,5 = \frac{19,4 \cdot K_4}{302,64 \cdot 5} \; ; \; K_4 = 507$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2+s+4)} = \frac{0,25\,K}{s(0,25s^2+0,25s+1)}$$

TÉRMINO CUADRÁTICO

$$s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2$$

$$w_n = 2 \text{ rad/s}$$

$$\xi = 0,25$$

$$\angle G(jw_1) = -\angle jw_1 - \angle 1-0,25w_1^2+0,25w_1 j$$

$$= -90^\circ - \tan^{-1}\frac{0,25w_1}{1-0,25w_1^2} = -130^\circ$$

$w_1 = 1,491$ rad/s

$$|G(jw_1)| = \left|\frac{0,25K}{(j1,491)(-0,555+j0,3725+1)}\right| = 1$$

$$= 0,2890K = 1 \rightarrow K = 3,46$$

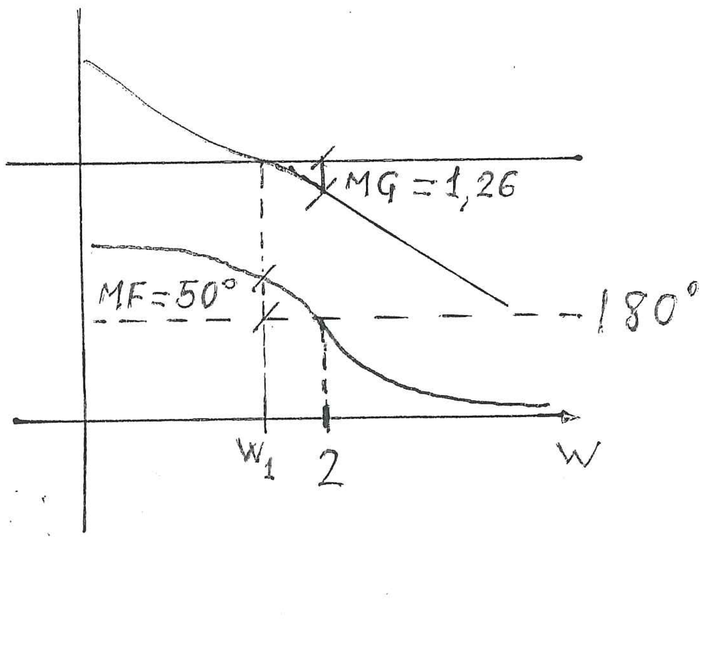
LA FRECUENCIA DE CRUCE DE FASE ES $W_c = 2$ rad/s

$$\angle G(j2) = -\angle j2 - \angle -0,25\cdot 2^2+1+0,25\cdot 2j = -90^\circ - 90^\circ = -180^\circ$$

CON $K = 3,46$

$$|G(j2)| = \left|\frac{0,865}{(j2)(-1+0,5j+1)}\right| = 0,865 = -1,26 \text{ dB}$$

$MG = 1,26$ dB



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{16}{s^2+4s+16} \qquad s = -2 \pm 2\sqrt{3}j$$

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \qquad \text{REGULADOR PI} \quad \beta > 1$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\, G_c(s)\, G(s) = \lim_{s \to 0} s K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \cdot \frac{16}{s(s+4)}$$

$$= 4 \beta K_c = 20$$

CON $K_c = 1 \rightarrow \beta = 5$

$$\left| \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{5T}} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = 0{,}9950 \longrightarrow T = 20$$

$$G_c(s) = \frac{s+0{,}05}{s+0{,}01}$$

$$-5° < \angle \left. \frac{s+0{,}05}{s+0{,}01} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} < 0° \longrightarrow -0{,}4999°$$

$$Z\{k^3\} = Z\{k \cdot k^2\} = -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$$

$$X(z) = Z\{k^2\} = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\frac{z^{-2}+4z^{-3}+z^{-4}}{(1-z^{-1})^4} \; ; \; -z \cdot \frac{dX(z)}{dz} = \frac{z^{-1}+4z^{-2}+z^{-3}}{(1-z^{-1})^4}$$

$$Z\{k^3\} = \frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$$

$$Z\{9k(2^{k-1}) - 2^k + 3\} = \frac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} - \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{3}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{2+z^{-2}}{(1-2z^{-1})^2(1-z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+0{,}8)(z+0{,}5)}$$

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})X(z)\right] = \frac{1}{2{,}7} \cong 0{,}370$$

$$X(z) = \frac{1}{2{,}7}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{4z}{z+0{,}8} + \frac{3z}{z+0{,}5}\right]$$

$$x(k) = \frac{1}{2{,}7}\left[1(k) - 4(-0{,}8)^k 1(k) + 3(-0{,}5)^k 1(k)\right]$$

$$x(k+2) - x(k+1) + 0,25\, x(k) = u(k+2) \;; \quad \begin{matrix} x(0) = 1 \\ x(1) = 2 \end{matrix}$$

$$z^2 X(z) - z^2 x(0) - z\, x(1) - z\, X(z) + z\, x(0) + 0,25\, X(z) =$$

$$= z^2 U(z) - z^2 u(0) - z\, u(1)$$

$$z^2 X(z) - z^2 - 2z - z X(z) + z + 0,25\, X(z) = \frac{z^3}{z-1} - z^2 - z$$

$$(z^2 - z + 0,25)\, X(z) = \frac{z^3}{z-1} \cancel{- z^2} \cancel{- z} \cancel{+ z^2} \cancel{+ 2z} \cancel{- z}$$

$$(z^2 - z + 0,25)\, X(z) = \frac{z^3}{z-1}$$

$$X(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z^2 - z + 0,25)} = \frac{z^3}{(z-1)(z-0,5)^2}$$

$$H(z) = X(z) \cdot z^{k-1} = \frac{z^{k+2}}{(z-1)(z-0.5)^2}$$

$$x(k) = K_1 + K_2 = 4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} (k+3) \;, \; k \geq 0$$

$$K_1 = \lim_{z \to 1} \cancel{(z-1)} \cdot \frac{z^{k+2}}{\cancel{(z-1)}(z-0,5)^2} = 4$$

$$K_2 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 0,5} \frac{d}{dz} \cancel{(z-0,5)^2} \cdot \frac{z^{k+2}}{(z-1)\cancel{(z-0,5)^2}}$$

$$= \lim_{z \to 0,5} \frac{d}{dz} \frac{z^{k+2}}{(z-1)} = \lim_{z \to 0,5} \frac{(k+2) z^{k+1} (z-1) - z^{k+2}}{(z-1)^2}$$

$$= -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} (k+3)$$