Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________

IMPORTANTE

- Duración del examen: **120 minutos**
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (25 puntos) Determine la solución, en forma cerrada, de la transformada z de la función $f(k)$ representada en la figura 1.

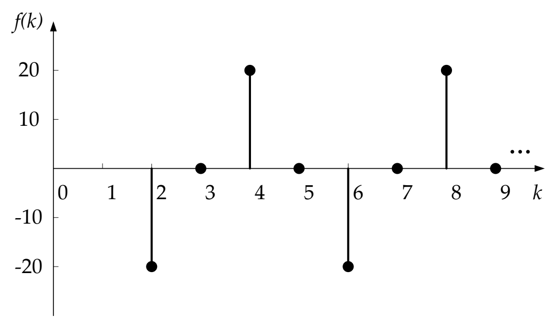

Figura 1: Señal en tiempo discreto $f(k)$.

2. (25 puntos) Sea el sistema de control digital mostrado en la figura 2. Diseñe un controlador $G_D(z)$, de forma que la respuesta en lazo cerrado presente un tiempo de establecimiento mínimo, con un error en régimen permanente nulo y sin oscilaciones en régimen permanente ante una entrada escalón unidad.

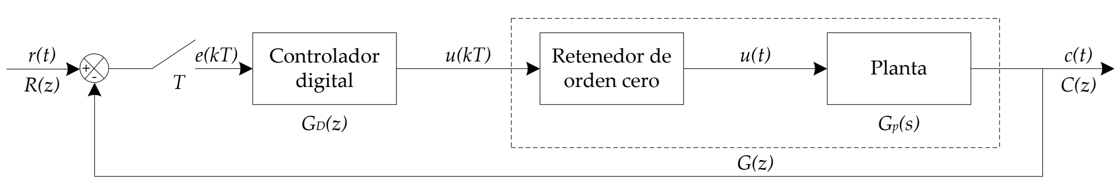

Figura 2: Sistema de control digital considerado.

Se asume un período de muestreo T de 5 s, y la función de transferencia de la planta obedece a

$$G_p(s) = \frac{e^{-5s}}{10s+1}.$$

3. (25 puntos) Sea un sistema de control con realimentación unitaria, en el que la función de transferencia de la planta obedece a

$$G_p(s) = \frac{(s+1)}{s(s-1)}.$$

Si los polos dominantes en lazo cerrado del sistema, una vez controlada la planta, corresponden a los mostrados en la figura 3, diseñe un regulador PID, $G_R(z)$, para un período de muestreo T de 1 s, de forma que el proceso de «discretización» sea el método de diferencias de adelanto (*forward difference method*).

Notas:

$K_1 = K_p + \frac{K_i T}{2} + \frac{K_d}{T}$; $K_2 = \frac{K_i T}{2} - K_p - \frac{2K_d}{T}$; $K_3 = \frac{K_d}{T}$.

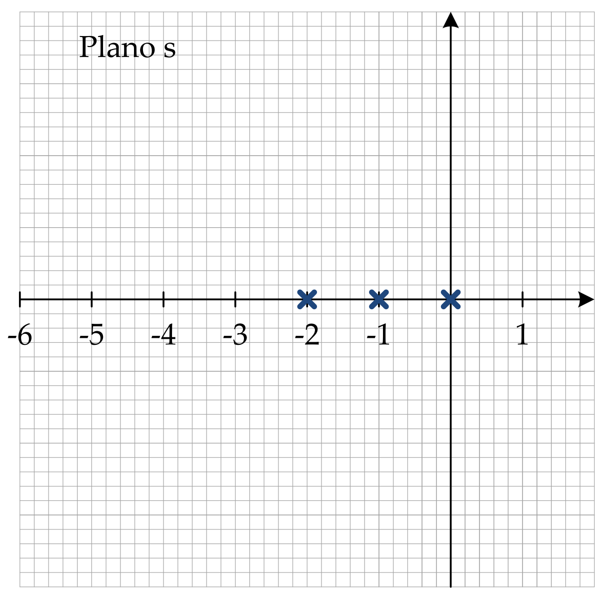

Figura 3: Mapa de polos dominantes en lazo cerrado en el plano s.

4. (25 puntos) Sea un sistema de control con realimentación unitaria, en el que la función de transferencia de la planta obedece a

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$$

Si la magnitud del diagrama de Bode de la planta ajustada en ganancia, $G_1(s)$, y la magnitud del diagrama de Bode de la planta compensada, $G_c(s)G_1(s)$, se ilustran en la figura 4, determine la función de transferencia del regulador $G_c(s)$ que induce el cambio de magnitud en el diagrama de Bode, de forma que el error en régimen permanente, ante una entrada rampa unidad, sea igual o inferior al 10 %.

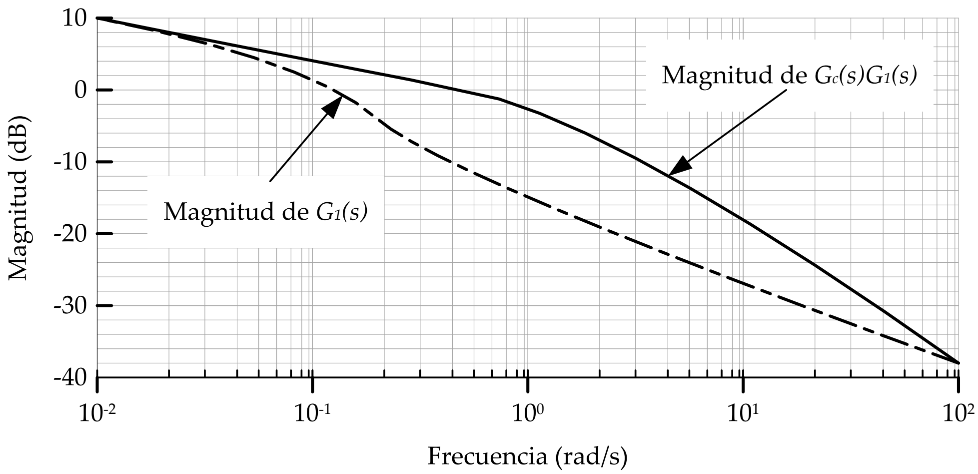

Figura 4: Magnitudes de $G_1(s)$ y de $G_c(s)G_1(s)$.

$$f(k) = -20\cos\left[(k-2)\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$F(z) = -20\cdot z^{-2}\cdot Z\left\{\cos k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= -20\cdot z^{-2}\cdot\frac{1}{1+z^{-2}} = -20\cdot\frac{1}{z^2+1} = \frac{-20}{z^2+1}$$

$$G(z) = Z\left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{e^{-5s}}{10s+1} \right\} = Z\left\{ \frac{1-e^{-5s}}{s} \cdot \frac{e^{-5s}}{10s+1} \right\}$$

$$= (1-z^{-1}) \cdot z^{-1} \cdot Z\left\{ \frac{1}{s(10s+1)} \right\} = \frac{0{,}3935\, z^{-2}}{1-0{,}6065\, z^{-1}} = 0{,}3935\, z^{-2} + \cdots$$

$F(z) = a_2 z^{-2} + \cdots + a_N \cdot z^{-N}$, CON $N \geq 2$

EN PRINCIPIO, $F(z) = a_2 z^{-2}$, DADO QUE LA PLANTA NO PRESENTA INTEGRADOR Y, ANTE UNA ENTRADA ESCALÓN UNIDAD,

$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b(z^{-2} + z^{-3} + \cdots)$, CON b CONSTANTE Y DISTINTA DE CERO.

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})\, N(z)$$

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{C(z)}{R(z)} \cdot \frac{R(z)}{G(z)} = F(z) \cdot \frac{2{,}5413\,(1-0{,}6065\, z^{-1})}{(1-z^{-1}) \cdot z^{-2}}$$

PARA QUE $U(z)$ CONFORME UNA SERIE INFINITA, $F(z)$ NO HA DE SER DIVISIBLE POR $(1-z^{-1})$, POR LO QUE $F(z) = a_2 z^{-2}$ ES, EN AUSENCIA DE ADICIONALES RESTRICCIONES, VÁLIDO.

$$1 - a_2 z^{-2} = (1-z^{-1}) \cdot N(z) \rightarrow a_2 = 1$$

$N(z) = 1 + z^{-1}$

$F(z) = z^{-2}$

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)(1-z^{-1})N(z)} = \frac{2{,}5413\,(1-0{,}6065\, z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}$$

$$G_R(z) = \frac{K_1 + K_2 z^{-1} + K_3 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{K_1 z^2 + K_2 z + K_3}{z^2 - z}$$

DIFERENCIAS DE ADELANTO: $S = \frac{1 - z^{-1}}{T z^{-1}} = \frac{z-1}{T} = z - 1 \Big|_{T = 1s}$

$S = z - 1$; $z = S + 1$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA $1 + G_R(s) \cdot G_p(s) = 0$

$$1 + \frac{K_1(s+1)^2 + K_2(s+1) + K_3}{s\cancel{(s+1)}} \cdot \frac{\cancel{(s+1)}}{s(s-1)} = 0$$

$$\frac{s^3 - s^2 + K_1 s^2 + K_1 + 2K_1 s + K_2 s + K_2 + K_3}{s^2(s-1)} = 0$$

$$\frac{s^3 + (K_1 - 1)s^2 + (2K_1 + K_2)s + (K_1 + K_2 + K_3)}{s^2(s-1)} = 0$$

$$s^3 + (K_1 - 1)s^2 + (2K_1 + K_2)s + (K_1 + K_2 + K_3) = s(s+1)(s+2)$$

$$s^3 + (K_1 - 1)s^2 + (2K_1 + K_2)s + (K_1 + K_2 + K_3) = s^3 + 3s^2 + 2s$$

$$\left.\begin{array}{l} K_1 - 1 = 3 \\ 2K_1 + K_2 = 2 \\ K_1 + K_2 + K_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K_1 = 4 \\ K_2 = -6 \\ K_3 = 2 \end{array}$$

$$G_R(z) = \frac{4 - 6z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

RED DE ADELANTO DE FASE: $G_c(s) = \underbrace{K_c \alpha}_{K} \cdot \dfrac{Ts+1}{\alpha Ts+1} =$

$$= K_c \cdot \frac{s + 1/T}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

$$G_c(s) \cdot G(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \cdot K \cdot G(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \cdot G_1(s)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \leq 0{,}1 ; \quad K_v \geq 10$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \cdot G_c(s) \cdot G(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{K \cdot 4}{\cancel{s}(s+2)} \geq 10 ; \quad K \geq 5$$

EN $w_m = \dfrac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ OCURRE ϕ_m. SEGÚN GRÁFICA EN $w_m = 0{,}4$ rad/s SE DISPONE DE LA NUEVA w_T.

$$|G_1(jw_T)| = -10 = -20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \rightarrow \alpha = 0{,}1$$

$$w_m = 0{,}4 = \frac{1}{T\sqrt{0{,}1}} \rightarrow T = 7{,}91$$

FRECUENCIAS DE ESQUINA

CERO: $w = \dfrac{1}{T} = 0{,}1265$ rad/s

POLO: $w = \dfrac{1}{\alpha T} = 1{,}265$ rad/s

$$G_c(s) = 5 \cdot \frac{7{,}91s+1}{0{,}791s+1} = 50 \cdot \frac{s+0{,}1265}{s+1{,}265}$$