Cecilia Cara

th

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Profesor: Juan Ramón

1º Matemáticas y Estadística

UCM

2014 - 2015

EBRA LiNEAL

Juan Ramón

espacho 515

10 - 13 J : 12 - 13 V : 10 - 12 , 12 - 13

jdelgado (at) mat.ucm.es

Espacios vectoriales

: Aplicaciones lineales

I Clasificación endomorfismo

I Espacio Dual

I GEOMETRÍA AFÍN

I FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

I ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

I ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO.

les . Si se aprueban , no hay que ir al final

necesita > 4 para hacer media.

EORÍA Y PROBLEMA (Demostrar - Tma Libros Gamboa)

PARTE PRÁCTICA .

EBRA LINEAL Fernando - Gamboa - Ruiz (2 volúmenes) con problemas

ebra Lineal y Geometría Castellet - Llerena

ebra Lineal y Geometría Merino (no sigue tal cual nuestra estructura)

áctica s

rro.garmedia@icmat.es Despacho 310 H Días : J - V

TE I : ESPACIOS VECTORIALES

anillos y cuerpos

n

nto R es un anillo si existen las operaciones $+, \cdot$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que cumplan las siguientes

$(a, b) \longmapsto a+b$

$\longmapsto a \cdot b$

(Anillo)

va $(a+b)+c = a+(b+c)$

mento neutro $0_R \in R : a + 0_R = 0_R + a = a \quad \forall a \in R$

nto opuesto $\forall a \in R \ \exists \ -a \in R : a+(-a) = (-a)+a = 0_R$

tiva $\forall a, b \in R \quad a+b = b+a$

a $(ab)c = a(bc) \ \forall a, b, c \in R$

va $a(b+c) = ab + ac$, $(a+b)c = ac + bc$

ento neutro $1_R \in R : a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a \quad \forall a \in R$

$\in R$ (Conmutativa) $ab = ba$

$\in R \quad ab = 0_R$ (Elemento ndo) $a = 0_R$ o $b = 0_R$

$R \quad a \neq 0_R \ \exists \ a^{-1} \in R$ tq (Elemento opuesto) $a \cdot a^{-1} = a^{-1}a = 1_R$

conjunto según las propiedades que cumpla.

$\Rightarrow$ Anillo $\quad 1-6+9 \Rightarrow$ Sin divisores de cero

$\Rightarrow$ Anillo unitario $\quad 1-9 \Rightarrow$ Dominio de integridad (algo menos que un cuerpo)

8 $\Rightarrow$ Anillo conmunitario $\quad 1-7+10 \Rightarrow$ Cuerpo (no puede ser divisor de 0)

$\Rightarrow$ Anillo conmutativo unitario $\quad 1-8+10 \Rightarrow$ CUERPO CONMUTATIVO

CAMPO / FIELD

o) e = elem. neutro.

va

$= e * a = a$

$^{-1} = a^{-1} * a = e$

$= b * a$

$+, \cdot$ dominio de integridad (NO ES CUERPO)

$1, -1\}$ (únicos invertibles)

$$1+(-1)=0 \notin \mathbb{Z}^{\times}$$

$\mathbb{C}, +, \cdot \Rightarrow$ CUERPOS CONMUTATIVOS

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$xy = (x+0i)(y+0i)$$

subcuerpo de $\mathbb{Q}$ → Si es un subanillo de $\mathbb{Q}$

anillo unitario

$= \{r \in R : \exists\, s\, R \quad rs = sr = 1_R\}$

erpo $\Longleftrightarrow R^{\times} = R \setminus \{0_R\}$

$, r_2 \in R^{\times} \Rightarrow r_1 r_2 \in R^{\times}$

ores de

$, s_2 \qquad (r_1\ r_2)(s_2\ s_1) = r_1 1_R s_1 = r_1 s_1 = 1_R$

$\in \mathbb{R}^{\times} \qquad R^{\times}, \cdot$ grupo → Nunca con +

anillo $\Rightarrow R^{\times}, \cdot$ es un grupo.

21/Oct.

plicado

$(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ $(a_i \; b_i \in \mathbb{R})$

$(\mathbb{R}), +$

Prop 1) ✓

2) $O_{Mat_{2\times3}}(\mathbb{R})$] mátriz neutra ✓

3) Opuesto $\Rightarrow \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{pmatrix}$

4) Conmutativa

$\Rightarrow Mat_{2\times3}(\mathbb{R}), +$ Grupo conmutativo

$G), +$ siendo G conmutativo se define la suma y

po conmutativo.

$R), +$ | R es un anillo, se define la suma $\Rightarrow Mat_n(R)$ es un anillo

tivo y unitario $\Rightarrow Mat_n(R) \longrightarrow$ si unitario

↳ no conmutativo

$\downarrow$

$I_n = \begin{pmatrix} 1_R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1_R & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & | \\ 0 & \cdots & \cdots & 1_R \end{pmatrix}$

Si $Mat_n(R) = Mat_1(R)$

si lo sería (conmutativo)

ya que solo es un nº

$\Rightarrow R$

$\longrightarrow a$ biyectiva perserva la suma y el producto

le llamaría Isomorfismo y se escribe $R \cong S \Leftrightarrow$

S biyectiva y perserva la suma y el producto.

$\phi(r_1 + r_2) = \phi(r_1) + \phi(r_2)$

$R)^{\times} \longrightarrow$ son matrices inversibles

forman anillo unitario y son inversibles si su determinante $\neq 0$

: aplicaciones

> 0 $a, b \in \mathbb{Z}$ $a \equiv b$ (modulo m) Relación equivalencia
(reflex, simet., transit)

$a - b = \lambda m$, para algún $\lambda \in \mathbb{Z}$

: 2 $a \equiv b \pmod 2$ si $a-b$ es par

conduente

(mod 3)

$a \,\underline{|3}$
$\quad q$
r

$r=0 \to q \cdot 3 = a$

$\left.\begin{matrix} r=1 \\ r=2 \end{matrix}\right\}$ congruación

ociente = conjunto clase equivalencias

$= \{ [0]_m , [1]_m , \dots , [m-1]_m \}$

$_m + [j]_m = [i+j]_m$

$]_2 + [1]_2 = [1]_2$

$1] + [1]_2 = [2]_2 = [0]$

$[i]_m = [i']_m \quad i - i' = \lambda m$

$[j]_m = [j']_m \quad j - j' = \mu m$

$(i+1)m \overset{?}{=} (i+j')m$

$(i+j) - (i'+j') =$

$= i - i' + j - j' = \lambda m + \mu m =$

$= (\lambda + \mu) m .$

$\cdot)$

$_m - [1]_m = [-1]_m$ $\Rightarrow$ Anillo conmutativo y unitario

Obtenemos infinitos anillos finitos

$1]_m$ neutro

$, \cdot)$

$2]_4 [2]_4 = [4]_4 = [0]_4$ Para que $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

$]_4 \quad \overset{\ast}{[0]_4}$

Dom integridad $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ m es primo $\Rightarrow$ cuerpo

$\Rightarrow$ No es cuerpo (Ejc hallar unidades = elem. inversibles)

primo

23/Oct.

$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in R$ polinomio del coeficiente n, se denomina

$+ \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$ (Suma.)

$)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$, $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ (Producto)

$\Rightarrow R[x]$ anillo

o $\Rightarrow R[x]$ unitario $1_R = 1_{R[x]}$

tativo $\Rightarrow R[x]$ conmutativo

io $\Rightarrow R[x]$ dominio

o $\not\Rightarrow R[x]$ cuerpo

(IV)

$a_i x^i)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \dots + \underbrace{c_{n+m-1} X^{n+m-1}}_{\neq 0} + \underbrace{c_{n+m} X^{n+m}}_{\neq 0}$

$a_n \neq 0$ $\quad b_j \neq 0$

$\Downarrow$

grado n

R es un anillo conmutativo y unitario y suponemos que $R \subset S$

illo conmutativo y unitario, R es subanillo de S $\quad \alpha \in S$

finic:

$$\varphi_\alpha^* : R[x] \longrightarrow S$$

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i & \xrightarrow[\text{"asigna"}]{} & \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ f & & f(\alpha) \end{array}$$

con las condiciones de la def

$) = \varphi_\alpha(f) + \varphi_\alpha(g)$
$g) = \varphi_\alpha(f) \cdot \varphi_\alpha(g)$ $\Big\}$ $\forall f, g \in R[x]$

$) = a \quad \forall a \in R$

nes. propiedades *

omomorfismo de anillos al respetar esas operaciones. (respeta las

de una a otra)

$x^2 + x \in \mathbb{Z}_6[x]$ $\mathbb{Z}_6^{\text{no dominio}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$\quad\quad * \quad * \quad *$

son raíces del polinomio

S dominio $f \in \mathbb{R}[x]$

elementos / cardinal del conjunto $= \{\alpha \in S : f(\alpha) = 0\} \leq$ grado(f)

ón (inducción sobre $n=$grado f)

$\Rightarrow f = a_0 + a_1 x \quad\quad a_1 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha \in S, & 0 = f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha \\ \beta \in S & 0 = f(\beta) = a_0 + a_1\beta \end{array}\right\} \quad 0 = \overset{0}{\cancel{a_1}}(\alpha - \beta)$$

$$(\alpha - \beta) = 0$$

$$\alpha = \beta$$

rado 1, si hay una raíz y es única.

n

$\in S : f(\alpha) = 0\} = \emptyset$

$f(x) = \overset{\text{cociente}}{q(x)}(x-\alpha) + \underbrace{r(x)}_{\text{resto} = b_0}$

$\downarrow$

$\in S : f(\alpha) = 0\} \neq \emptyset \rightarrow f(\alpha) = 0 \Longrightarrow$

$(\alpha)(\alpha - \alpha) + r(\alpha) = 0 \Longrightarrow r(\alpha) = 0 \Longrightarrow f(x) = \underbrace{(x - \alpha)}_{\text{como mucho una raíz}} \overbrace{q(x)}^{\text{raíz } n-1}$

$\{ \leq \cancel{1} + n - \cancel{1} = n$

23/Oct

cuerpo conmutativo $f, g \in k[x]$, $g \neq 0$, $\Rightarrow \exists$ polinomios

, r $\in k[x]$ tal que

Euclideo polinomio

$= q g + r$
$= 0$ o grado (r) < grado (g)
} Demost. facil ec euclideo.

euclideo común divisor $\Rightarrow$ mcd.

f $\Longleftrightarrow \exists\, q$ t.q. $f = q g$

$\forall f, g \in k[x]$ $\exists$ mcd (f, g)

$\overset{f}{2x+1}$ | $\overset{g}{x^2+1}$

$x^2 - 1$

x^2

$2x + 1$

$+1$

$\underbrace{2x + 2}_{1} \neq 0$ $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}_2$ ($\mathbb{F}_2$) se anularía.

* $\cancel{x^2} + 1$ | $2x + 2$

$-\cancel{x^2} - x$ $\quad \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$-x + 1$

$x + 1$

$2 \neq 0$

$2 = \text{mcd}(f, g)$

$\underline{\text{II}}$ $\forall f, g \in k[x]$ $\exists$ p, q $\in k[x]$ tal que

$$fp + gq = \text{mcd}(f, q)$$

NTIDAD BEZOUT)

$2 = fp + gq$ $\qquad 1 = f(\frac{1}{2}p) + g(\frac{1}{2}q)$

$\in k[x]$ Se dice que f es irreducible si:

s conmutativo
no ser que se diga
o contrario)

1) $f \neq 0$

2) f no es constante

3) $f = gh$, $g, h \in k[x] \Rightarrow$ g constante : h constant

4

$\in k[x]$ $f \neq 0$ f no constante $\Rightarrow \exists f_1, \dots, f_t \in k[x]$

tal que $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_t$. Además si $f = g_1 \cdot \dots \cdot g_s$

$_s \in k[x]$ irreducible $\Rightarrow t = s$ y $f_i = a_i g_i$ para alguna $a_i \in k$

24/Oct.

RAA. ($f \neq 0$, f no cte $\Rightarrow f = f_1 \cdots f_t$, f_i irreducibles)

al absurdo $\Rightarrow$ en caso contrario existiría.

do mínimo : $f \neq f_1 \dots f_t$ irreducible $\Rightarrow f$ no es irreducible

$, g, h \in k[x]$; grado (g), grado $(h) <$ grado (f)

$\cdots g_r$, $h = h_1, \dots, h_s$ g_i, h_j irreducible $\underline{\underline{r+s}}$

#

$\cdots g_s$ f_i, g_j irreducibles $\Rightarrow \begin{cases} t = s \\ f_i = a_i g_i, \ a_i \in k \end{cases}$

$, h \in k[x]$, f irreducible $f | gh \Rightarrow f | g$ o $f | h$

tración Supongamos $f \nmid g \Rightarrow 1 = \text{mcd}(f, g) = p \cdot f + qg$

$= phf + q\underbrace{gh}_{= f} = phf + qf\underbrace{k}_{\text{polinomio extra cte}} = (ph + qk)f \Rightarrow f | h$ #

n Unicidad

$f_t \xrightarrow{\text{lema}} f_1 | g_1 \Longrightarrow \underbrace{g_1}_{\substack{\text{irreducible} \\ K[x] \text{ dominio}}} = \overbrace{p f_1}^{\text{irreducible}} \xrightarrow[\substack{g_1, f_i \\ \text{irreducibles}}]{} p_1 = a_1 \in k$ (constante)

$\cdots f_2, \dots, f_t = a_1 f_1 g_2 \cdots g_s \Longrightarrow f_2 \cdots f_t = \underbrace{(a_1 g_2)}_{= g_2'} g_3 \cdots g_s$

$t = s$, $f_i = a_i g_i$ (todos asociados)

#

factorización

n tma + demostración) 24/Octubre

k un cuerpo conmutativo, $f \in k[x]$ irreducible, no constante

uerpo conmutativo k_f tal que

es un subcuerpo de k_f

$\alpha \in k_f : f(\alpha) = 0$

)

podemos suponer que será mónico

$f > 0$, $a_n \neq 0$, $a_n^{-1} \cdot f = x^n + \dots$ (polinomio mónico)

mismas raíces

término mayor grado $= 1$

$a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ grado $n > 1$

$\Longrightarrow f = x + a_0$, $\alpha = -a_0 \in k$ $k_f = k$

$k_n[x] = \{ g : g \in k[x],\ \text{grado}(g) < n \}$ $\underbrace{+}_{\text{suma usual de } P[x]}$, $\underbrace{\cdot}_{}$ * dif.

$h \in k_f \Longrightarrow g \cdot h = r$, donde

$gh = qf + r$, $r = 0$ y grado $< n$

iene que cumplir para que sea cuerpo conmutativo

, $\times$ cuerpo conmutativo (c.c)

, $+$ $\Longrightarrow$ grupo abeliano

$\otimes g_2) \otimes g_3 = g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3)$ $g_1, g_2, g_3 \in k_f$

$\underbrace{(g_1 \otimes g_2)}_{g_1 g_2 = q_{12} f + r_{12}} \otimes g_3 = \underbrace{r_{12} \times g_3}_{r_{12} g_3 = qf + r}$ $\Longrightarrow = r$

$g_1 \otimes \underbrace{(g_2 \otimes g_3)}_{q_{23} f + r_{23}} = \underbrace{g_1 \otimes r_{23}}_{pf + s} = s$

$0 \neq r - s = r_{12} g_3 - qf) - (g_1 r_{23} - pf) =$

$- q_{12} f) g_3 - qf - g_1 (g_2 g_3 - q_{23} f) + pf = hf$

grado $(r-s) < n$ $\xleftrightarrow[\text{contradicción}]{}$ grado h + grado$f$ $= n$

$$\underbrace{1 \otimes g}_{\overset{\shortparallel}{g}} \Rightarrow 1 \cdot g = 0 \cdot f + g$$

wo si $g_1 \otimes g_2 = g_2 \otimes g_1$

va $(g_1 + g_2) \otimes g_3 = g_1 \otimes g_3 + g_2 \otimes g_3$

sbarla.*

$g \in K_f \Rightarrow \exists\, h \in K_f$ talque $g \otimes h = 1$

$$\underbrace{\text{grado}(g)}_{\text{menor grado}} < \underbrace{\text{grado}(f)}_{\text{irreducible de grado } n} \Rightarrow \text{mcd}(g, f) = qf + pg =$$

$= (k_f + r)g + qf = rg + (k+q)f$

$r \in K_f$

$\Rightarrow rg = -(k+g)f + 1 \Rightarrow r \otimes g$

$a \in K \Rightarrow a \in K[x]$, grado $(a) = 0 < n \Rightarrow a \in K_f$

$\in K \Rightarrow a + b$

$a \cdot b$

$a \otimes b = ab$ por que es la división euclidea

$ab = 0f + ab$

mos que es un cuerpo conmutativo de K_f y ahora demostrar que cumple la II propiedad del Tma.

24/Oct

f

$:[x])\quad \varphi_\alpha : k[x] \longrightarrow k_f^{\ni \alpha}$

$$g \longmapsto g(\alpha)$$

ducto

$$\sum a_i x^i \longmapsto \sum a_i \alpha_i$$

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)(\alpha)$ y vamos a ver que es 0

$+ a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)(x) = x^{\otimes n} + \underset{a_{n-1}x^n}{\underset{\shortparallel}{a_{n-1}}} \otimes x^{\otimes n-1} + \ldots + \underset{a_1 x}{\underset{\shortparallel}{a \otimes x}} + \underset{a_2}{\underset{\shortparallel}{a_0}}$

$^n = 1 - f - a_{n-1}x^{n-1} \ldots - a_1 x - a_0$

$^{\otimes n} = -a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0$

$_{-1}x^{n-1} \ldots x = a_{n-1}x^{n-1} = 0 \cdot f + a_{n-1}x^{n-1}$

$(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)(\alpha) = 0$

$+1 \in \mathbb{R}[x]$

$\ni ax+b \Longrightarrow a, b \in \mathbb{R} \longmapsto a_i + b$

$^{\otimes 2} = -1 \nwarrow \qquad x^{\otimes 2} + 1 = 0 \Longrightarrow i =$ raiz de $\mathbb{R}_f$

$= (x^2+1)\textcircled{-1}$

27/Oct

$= \mathbb{R} \qquad f = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ irreducible $n=2$

$x : a; b \in \mathbb{R}\}$

$\otimes$

$+ bx) + (c + dx) = (a+c) + (b+d)x$ ✓

$a + bx) \otimes (c + dx)$

$+ bx)(c+dx) = ac + (ad+bc)x + bdx^2 = \underbrace{ac} + \underbrace{(ad+bc)}x$

$$+ bd(x^2 + \underbrace{1}_{\text{añado}}) \underbrace{- bd}_{\text{quito}}$$

$\Longrightarrow (a+bx) \otimes (c+dx) = (ac - bd) + (ad+bc)x$

$\longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad \phi$ biyectiva

$\longmapsto a+bi$ $\qquad \phi(\ +\ ) = \phi(\ ) + \phi(\ )$

$\phi(\otimes) = \phi(\ )\cdot\phi(\ )$

$: x^2+1 \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible $n=2$

$a+bx \ : a, b \in \mathbb{Q} \}$

$x) + (c+dx) = (a+c)+(b+d)x$

$+ bx) \otimes (c+dx) =$

$x)(c+dx) = ac + (ad+bc)x + bdx^2 = ac+(ab+bc)x+bd(x^2+1)-bd$

$+bx) \otimes (c+dx) = (ac-bd)+(ad+bc)x$

$\longrightarrow \underbrace{\mathbb{Q}(i)}_{\text{numerable}} = \{a+bi : \underbrace{a}_{\text{numerable}}, \underbrace{b}_{\text{numerable}} \in \mathbb{Q}\}$ subcuerpo $\mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ numerable

$\longmapsto bi$

yectiva

$+) = \phi(\ ) + \phi(\ )$

$\otimes) = \phi(\ )\cdot\phi(\ )$

el caso anterior fuese en $\mathbb{C}$ no sería irreducible $\Longrightarrow$ no sería un subcuerpo

$\underbrace{(\sqrt{-2})}_{\text{subcuerpo}} \subseteq \mathbb{C}$

$= x^2+2 \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible

$\underline{2}\ \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$

$b \in \mathbb{Q}\}$

$x) \otimes (c+dx) \underset{\nearrow}{=} (ac - \underbrace{2bd}_{\substack{\text{quitar}\\ \text{y}\\ \text{poner}}}) + (ab+bc)x$

sin pasos intermedios

$\Uparrow$

$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{-2})$

Pasos intermedios

$x)(c+dx) =$

hac

como

en

a

27/Oct

$x^2 + d$ $d \in \mathbb{Z}$ sin cuadrados

$d = -1, -2, -3, -5, -6, -7 \ldots$

$a = 2, 3, 5, 6, 7 \ldots$

$x^2 + d \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible

$= K_{fd} = \{a + bx : a, b \in \mathbb{Q}\}$ → puedo definir una cantidad infinita de productos, una serie infinitas de cuerpos

$_d$
↑
parece
cada "d"
brá un
producto

coger dos lineales y dividir entre $x^2 - d$ que dan cociente
sto que sean distintos para cada d por lo que el
depende de "d"

$= \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ $(1 + 1 = 0)$

$x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ $\xrightarrow{\text{irreducible}}$ (no tiene raíces en $\mathbb{Z}_2$ ni 0 ni 1 tiene raíz).

$1 = 1 \neq 0$ ⇙ Generará un cuerpo.

$1 = 3 = 1 \neq 0$

$= \{a + bx : a, b \in \mathbb{Z}_2\} := \{0, 1, x, 1 + x\}$

$|K_f| = 4$

$bx) \otimes (c + dx) = (ac - bd) + (ad + bc - \underbrace{bd}_{\text{ajustado}})x$

rpo conmutativo

$x - 1 = x + 1$ ↗ $x(x+1) = x^2 + x = -1 = 1$

-1 en $\mathbb{Z}_2 = 1$

7

$x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$

x^2+1

irreducibles ni 0 ni 1 tienen más raíz en $\mathbb{Z}_2$

$C_9 = \{a+bx+cx^2 : a, b, c = 0, 1\}$

$K_f \cong K_g$ ISOMORFOS

onmutativo, $f \in K[x]$ no constante, $\exists$ un cuerpo conmutativo F: tal que:

es un subcuerpo de F

descompone completamente en $F[x]$, es decir, existen

$, \alpha_n \in F$ tq $\quad f = \underbrace{a}_{\text{coef. principal del polinomio.}}(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n), a \in K$

sobre grado n, $n \geq 1$

$ax+b \Rightarrow a(x+a^{-1}b) \qquad F = K$

$\alpha_1 = -a^{-1} b \in K$

$f_1 \dots f_t \quad , f_i \in K[x]$ irreducibles

$\supseteq K \quad \exists \quad \alpha_1 \in K_{f_1} : f_1(\alpha_1) = 0$

$= (x-\alpha_1) g \qquad g \in K_{f_1}[x]$

$g = n-1$

$F \overset{\text{subcuerpo}}{\supseteq} K_f \quad , g = a(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) \qquad \alpha_i \in F$

$= a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$

27/Oct.

ontrar las raíces de f ⇒ descompongo f y cojo cada ducible y lo completamos para sacar raíces.

$+ 1 \in \mathbb{R}[x]$

$\|$

$^2+1)^2 - 2x^2 \longrightarrow (\sqrt{2}\,x)^2$

$\|$ descomponer

$^2+1+\sqrt{2}\,x)(x^2+1-\sqrt{2}\,x)$ irreducibles $\mathbb{R}[x]$

x^4-1 raíces complejas

$\underset{a=}{\frac{1+i}{2}}, \underset{b=}{\frac{-1+i}{2}}, \underset{c=}{\frac{1-i}{2}}, \underset{d=}{\frac{-1-i}{2}}$

28/Oct.

ea R un anillo unitario con dos operaciones

$\in R \Longrightarrow a+b, ab \in R$

$\mathbb{Z}, a \in R \Rightarrow na = \begin{cases} \overbrace{a+\dots+a}^{n} & (n>0) \\ 0_R & n=0_R \\ -(-n)a & (n<0) \end{cases}$

$\longrightarrow R$

$a = na + ma$

$= n(ma) \quad (\overbrace{a+\dots+a}^{m}) \underbrace{+\dots+}_{n} (\overbrace{a+\dots+a}^{m})$

$= a = \underbrace{1_R}_{\text{unidad } R} a$

$= 0_R = 0_R a \quad 0_R a = (0_R+0_R)a = 0_R a + 0_R \Rightarrow 0_R = 0_R a$

$_R = n(m1_R) = (n1_R)(m1_R)$

un escalar por un vector

$v \Longrightarrow a = 0$ ó $u = 0$ y el resultado es 0

nte a V

$u = 0 , \quad a \neq 0 \Longrightarrow \exists a^{-1} \Longrightarrow a^{-1}(au) = a^{-1} 0 =$

$\overset{\parallel}{(a^{-1}a)u}$

$\overset{\parallel}{1_K u} = u$

$0+0) = a^{-1}0 + a^{-1}0 \Rightarrow a^{-1} \cdot 0 = 0.$

Isomorfismo

$\longrightarrow V'$ es un isomorfismo de K-ev si :

iyectiva

$\left. \begin{array}{l} +v) = \phi(u) + \phi(v) \\ u) = a\phi(u) \end{array} \right\} \forall a \in K , \forall u,v \in V$

v'

u'

Subespacio

espacio de V si $W \subseteq V$ y

$W \times W \longrightarrow W$

$K \times W \longrightarrow W$

a estructura de ev sobre W

30/Oct.

V , V K-ev son equivalentes

i) $W < V'$

ii) $\forall\, u, v \in W \ \forall\, a \in K \Rightarrow u+v \in W , au \in W$

ión $i \Rightarrow ii$ $ii \Rightarrow i$ Estas implican todas las demás

que $0 \in W$ y $u \subset W \Rightarrow u \in W$

$\in W$ $\quad \underbrace{0_K u}_{\substack{\parallel \\ 0_W}} \in W$ ← prop anterior.

$)\ u = -(1_K u) = -u \in W$

$K \times K = \{(a,b) : a, b \in K\}$

$+b) + (a', b') = (a+a', b+b')$ $\qquad \lambda \in \mathbb{N}$

$(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$

$, +, \cdot$ es un e.v sobre K

$\times \overset{n}{\overbrace{K \times \ldots \times K}}$

$(K), +, \cdot$

$) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

$a_{ij}) = (a a_{ij})$

se multiplica
todas por a

Esto tiene forma de ev por estas 2 operaciones

$\boxed{{}_{\times n} (K) \simeq K^{m \cdot n} \quad \text{Isomorfismo}}$

$$< \quad (S)\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

$_n) \in K^n$ tq $\overbrace{a_{11} a_1 + \dots + a_{1n} a_n = 0}^{k}, \dots, a_{n1} a_1 + \dots + a_{mn} a_n = 0$

$>$

$_n) \in k^n : (a_1, \dots, a_n)$ solución de (S) } $< k^n$

na de solución es solucon

usual

$$a \sum_{i=0}^{n} a_j x^i = \sum_{i=0}^{n} (a a_j) x^i$$

$], +, \cdot \Longrightarrow$ es un espacio vectorial.

de $k[x]$ tiene estructura de Ev

$$k[x] \times k[x] \longrightarrow k[x] \quad EV.$$

subespacio de $k[x]$

$k_n[x] < k[x]$

$, \mathbb{R})$ (funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$)

$+ g)(x) = f(x) + g(x)$

$a f)(x) = a f(x)$

ev o evectoriales reales.

30/oct.

...s continuas

$\ldots R ; \mathbb{R}) \underset{\text{sub-ev}}{<} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

...as de funciones continuas es función continua

$\ldots ; \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \exists\, f^{(k)}, f^{(k)}$ continua $\}$ ← derivadbda k-ésima

$= f^{(1)}$ $\qquad$ f Derivada $\Longrightarrow$ f continua

$= f^{(2)}$

$= f^{(3)}$ $\qquad C^{k} < C$

$(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ clase C^{∞} $\Longrightarrow$ tiene ∞ derivadas

cualquier derivada , como $f = e^{x}$, f = sen ...

$\ldots N, k) = \{ f \mid f : \mathbb{N} \longrightarrow k$ es función $\}$

$n \longmapsto a_n$

la imagen $\Rightarrow$ sucesion

$n \geq 0 \qquad a_n \in k$

$\ldots_{n \geq 0} + \{b_n\}_{n \geq 0} = \{a_n + b_n\}_{n \geq 0}$

$\ldots \{a_n\}_{n \geq 0} = \{a a_n\}_{n \geq 0}$

$\ldots K \qquad F$ contiene al subcuerpo K

...tico

$+ : F \times F \longrightarrow F \qquad \Big\| \qquad K \times F \longrightarrow F$

la q tiene como cuerpo $\quad (u, v) \longmapsto u + v \qquad \Big\| \qquad (\underset{\underset{F}{\cap}}{a}, \underset{\underset{F}{\cap}}{u}) \longmapsto \underset{\underset{F}{\cap}}{a \cdot u}$

$\Longrightarrow F \; K\text{-ev}.$

31/Oct

/ -ev sobre k

e $X \subseteq V$ es

de geradores si $\forall \; u \in V \; \exists \; u_1, \dots, u_m \in X \; \exists \; a_1, \dots, a_m \in k$

$u = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m$ Combinación lineal.

ent independiente si $\forall \; u_1, \dots, u_m \in X \; \forall \; a_1, \dots, a_m \in k$

$\dots + a_m u_m = 0 \implies a_1 = \dots = a_m = 0$

si es sistema de generadores y linealmente independiente

$a_1, a_2) : a_1 a_2 \in k \}$

$, e_2\}$ $e_1 = (1, 0)$ $e_2 = (0, 1)$

$SG = a_1 e_1 + a e_2$

$(0, 0) \implies a_1 = a_2 = 0$ LI

$B_c = \{ e_1, \dots, e_n \}$

$, \; B = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$

$+ a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1}$

$, \; B = \{1, x, \dots, x^n, \dots \}$

V-ev sobre k son equivalentes:

es base

iii) X es SG minimal.

es linealmente independiente (Maximal)

$X = \{a, b\}$

$P(x) = \{ \underset{\uparrow \text{ min}}{\emptyset}, \{a\}, \{b\}, \underset{\uparrow \text{ maximal}}{\{a,b\}} \}$

$P(x) \setminus \{\emptyset\} = \{ \underbrace{\{a\}, \{b\}}_{\text{minimales}}, \underbrace{\{a,b\}}_{\text{maximal.}} \}$

31/Oct

i ⇒ ii

se $\Rightarrow X$ es linealmente independiente y suponemos que es SG

es maximal $\Rightarrow \exists\ Y \supsetneq X$, Y linealmente independiente

, $u \notin X \Rightarrow u = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m$, $a_i \in k$, $u_i \in X$

$- a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = 0$

$\{u, u_1 \dots u_m\} \subseteq Y$ linealmente independiente

ii ⇒ i)

$$u \in V \Rightarrow \begin{cases} u \in X \Rightarrow u = 1 \cdot u \\ u \notin X \Rightarrow X \cup \{u\} \supsetneq X \Rightarrow X \cup \{u\} \text{ no } LI \Rightarrow \end{cases}$$

$\exists\ a, a_1, \dots, a_m \in k$ no todos nulos

$a u + a_1 u_1 + \dots + a_n u_m = 0$ $a \neq 0$

$- a^{-1} a_1 u_1 - \dots - a^{-1} a_m u_m$

n sistema LI que no contenga al LI maximal.

ón i ⇒ iii

s $Y \subsetneq X$, Y SG $\Rightarrow \exists\ u \in X$, $u \notin Y \Rightarrow \exists\ a_1, \dots, a_m \in k$

$v_m \in Y$: $u = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \Rightarrow$ ① $\underset{\neq 0}{u} - a_1 v_1 - \dots - a_m v_m$,

$v_1, \dots, v_m\} \subseteq X$ LI

ión iii) ⇒ i) ABSURDO

I $\Rightarrow \exists\ u_1, \dots, u_m \in X$, $\exists\ \underset{\neq 0}{a_1}, \dots, a_m \in k$:

$\underset{\neq 0}{{}_1} \cdot u_1 + \dots + a_m u_m = 0 \Rightarrow$

$u_1 = - a^{-1} a_2 u_2 - \dots - a_1^{-1} a_m u_m$ $\underbrace{X \setminus \{u_1\}}_{SG\,?} \subsetneq \underbrace{X}_{\text{minimal SG}}$

*

es SG porque si quito u_1 es

binación lineal de los demás. Contradicción #.

$V = \# B$ (cardinal de B)

$= \dim_K K^n = n$

$_K \; K_n[x] = n$

$_K \; \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) = m \cdot n$

3/Nov.

sobre K , sea.. equivalentes

s F.G

ene dimensión finita

, ..., $u_r\}$ l. independienete , y $\{v_1, \ldots, v_s\}$ SG $r \leq s$

$\leq \dim_K V = n$

ev sobre K , $W < V$, Si es dimensión finita, entonces:

es de dimensión finita y $\dim_K W \leq \dim_K V$

$_K W = \dim_K V \iff W = V$

$\ldots, u_m\} \subseteq W$ linealmente independente. Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es l.i maximal,

$\ldots, u_m\}$ es base de W (dimensión finita)

$\ldots, u_m\} \subsetneq \{u_1, \ldots, u_{m+1}\} \in V$ l.i , $U_{m+1} \in W$, entonces

$+ 1 \leq \bar{n} = \dim_K V$

de $W \Rightarrow B_V$ es l.i $\Longrightarrow \underset{\dim_K W}{\underset{\shortparallel}{\# B_W}} \leq \dim_K V$

$\dim W \qquad \# B_W = \# B_V = n$

$, \ldots, u_n\} \subseteq W \Rightarrow B_W$ l.i maximal $\Rightarrow B_W$ base de V

tiene mismo n' vectores $\Rightarrow$ maximal) $\Longrightarrow W = V$

n solo hay un espacio , no hay otro sobeu n

3/Nov.

$_2 \subset V \Rightarrow \begin{cases} W_1 \cap W_2 \\ W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\} \end{cases}$

$_2$, $W_1 + W_2 \subset V$

ación

, $v_1 + v_2 \in W_1 + W_2 \Rightarrow (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \underset{\uparrow}{=} \underbrace{(u_1 + v_1)}_{} + (u_2 + v_2)$

propiedad esp. vectorial suma

$\cap$ $W_1 + W_2$.

$\Rightarrow a(u_1 + u_2) = \underset{\overset{\cap}{W_1}}{a u_1} + \underset{\overset{\cap}{W_2}}{a u_2} \in W_1 + W_2$

de dimensión finita , u $\{u_1, \dots, u_r\}$ l.i , $\{v_1, \dots, v_n\}$ base

.., $v'_{n-r} \in \{v_1, \dots, v_r\}$: $\{u_1, \dots u_r, v'_1, \dots, v'_{n-r}\}$ base de V

ación

Por el lema del intercambio

Grassmann

$W_2 \subset V$, V dimension finita

dim = 0 ⟺ E V = vector nulo

$(W_1 + W_2) = \dim_K W_1 + \dim_K W_2 - \dim_K W_1 \cap W_2$

tración

$, \dots, u_m\} = B_{W_1 \cap W_2}$ $\dim W_1 \cap W_2 = m$

$W_2 \subseteq W_1 \Rightarrow \exists \{u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, u_r\} = B_{W_1}$ $\dim W_1 = r$

$W_2 \subseteq W_2 \Rightarrow \exists \{u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_s\} = B_{W_2}$ $\dim W_2 = s$

$W_1 + W_2 = r + s - m$

$, \dots u_r, v_{m+1}, \dots, v_s\} \subseteq W_1 + W_2$

$+ W_2 \subset W_1 + W_2$

$b_1 u''_1 + \dots + b_m u_m + b_{m+1} u_{m+1} + \dots + b_s v_s$

a $+ a_{m+1} u_{m+1} + \dots + a_r u_r$

$$\overset{\in K}{(a_1+b_1)}u_1 + \dots + \overset{\in K}{(a_m+b_m)}u_m \quad + a_{m+1}u_{n+1} + \dots + a_r u_r + b_{m+1}v_{m+1} + \dots$$

$s\, v_s$

$$m u_r + a_{m+1}v_{m+1} + \dots + a_s v_s = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} a_1 = \dots = a_r = a_{m+1} = a_s = 0$$

$$a_r u_r = -a_{m+1}v_{m+1} - \dots - a_s v_s \in W_1 \cap W_2$$

$$\qquad \qquad \qquad \qquad \quad \shortparallel$$

$$a_r = 0 \qquad 0 = b_1 u_1 + \dots + b_m u_m \Rightarrow b_1 u_1 + \dots + b_m u_m + a_{m+1}v_{m+1} + \dots + a_s v_s = 0$$

$$\Downarrow$$

$$b_1 = \dots = b_m = a_{m+1} = \dots = a_s = 0.$$

$$_2 = \{0\} \Rightarrow \dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2$$

(Soma directa)

$ev \;,\; V = W_1 \oplus W_2 \quad$ si

$V = W_1 + W_2$

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$= W_1 \otimes W_2$

$\times \{0\}$

$\} \times K$

$$\boxed{\dim W_1 \oplus W_2 = \dim W_1 + \dim W_2}$$

$$W_1 \oplus W_2 \Longleftrightarrow \forall\, u \in V \;\exists!\, u_1 \in W_1 \;,\; u_2 \in W_2 : u = u_1 + u_2$$

ón

$$u = u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \Rightarrow u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \in W_1 \cap W_2$$

la soma es directa $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$$\Rightarrow \underset{0}{\underset{\shortparallel}{u_1 - v_1}} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v_2 - u_2}}$$

$$V = W_1 + W_2 \qquad u \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u = u + 0 = 0 + u \Rightarrow u = 0 \;y\; 0 = u$$

3/Nov.

, $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ base V

$\Rightarrow \exists\, a_1,\dots,a_n \in K$ tq $u=a_1u_1+\dots+a_nu_n$, $u=(a_1,\dots,a_n)_B$

$b_1)u_1+\dots+\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{(a_n-b_n)}u_n=0$

, $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ base de V   la aplicación :

$\longrightarrow K^n$

$\longrightarrow u_B$ es un isomorfismo   (probar que es biyectiva y que lleva a la suma de coordenadas)

$\longrightarrow (a_1,\dots,a_n)$

$\simeq K^n$

$_2 \iff \dim_K V_1 = \dim_K V_2$

$\simeq K^m \iff n=m$

4/Nov.

erdo.

m , $B=\{u_1,\dots,u_m\}$ base de V , $u\in V \Rightarrow \exists!\ a_1,\dots,a_n\in K$

$=a_1u_1+\dots+a_nu_n$, $u=(a_1,\dots,a_n)_B$

$V \longrightarrow K^n$

$u \longmapsto (a,\dots,a_n)_B$ Isomorfismo de K-ev

conmutativo finito $\Rightarrow |F|=p^n$, $p=\chi(F)$ y $n>0$

$+ W_2 = \dim_K W_1 + \dim_K W_2 - \dim_K W_1 \cap W_2$

$_1 + W_2 - \dim_K W_1 = \dim_K W_2 - \dim_K W_1 \cap W_2$

$/W_1 \cap W_2 \longrightarrow W_1 + W_2 / W_2$

$)(\bar{w}_1) = \tilde{w}_1$

$\tilde{w}_2 \Rightarrow w_1 - w_2 \in W_1 \cap W_2 \parallel \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 , \ w_1 - w_2 \in W_2$

que es inyectiva y supiayectiva

$(\bar{w}_1) = \phi(\bar{w}_1')$

$\tilde{w}_1 = \tilde{w}_1' \Rightarrow w_1 - w_1' \in W_2$

$\overset{\cap}{w_1} \quad \overset{\cap}{w_1} \Rightarrow w_1 - w_1' \in W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow \bar{w}_1 = \bar{w}_1'$

$\widetilde{w_2} = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 = \tilde{w}_1 + \tilde{0} = \tilde{w}_1 = \phi(\bar{w}_1)$

$\phi(\bar{w}_1 + \bar{w}_1') = \phi(\bar{w}_1) + \phi(\bar{w}_1')$

$\phi(a\bar{w}_1) = a\phi(\bar{w}_1)$

$\tilde{w} = \tilde{0} \Leftrightarrow w - 0 \in W_2$

$W_2 / W_2 \simeq W_1 / W_1 \cap W_2$

6/Nov.

lineales (pag 89)

Sean V, W k-ev : se dice que $\phi : V \longrightarrow W$ es k-lineal

orfismo de k-ev) si

$(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$

$(au) = a\phi(v)$

$V, W) = \{\phi : \phi$ es k-lineal$\}$

al $\Rightarrow \phi(0) = 0, \ \phi(-u) = -\phi(u)$

$W \xrightarrow{\psi} U \quad \phi, \psi$ son k-lineales $\Rightarrow V \xrightarrow{(\psi \circ \phi)} U$ es k-lineal

ón

$+v) = \psi(\phi(u+v)) = \psi(\phi u + \phi(v)) = \psi(\phi(u)) + \psi(\phi(v)) =$

$\phi)(u) + (\psi \circ \phi)(v)$

$(au) = \quad \ldots . \quad = a(\psi \circ \phi)(u)$

dentidad

$V \longrightarrow V$ es k-lineal

$u \longmapsto u$

$0_V : V \longrightarrow V$ es k-lineal

$u \longmapsto 0$

$V \longrightarrow W$ k-lineal $\Rightarrow \psi + \phi$ es k-lineal

$) = \phi(au) + \psi(au) = a\phi(u) + a\psi(u) = a(\phi(u) + \psi(u)) =$

$+\psi)(u)$

$: V \longrightarrow W \Longrightarrow a\phi : V \longrightarrow W$ es k-lineal

$, W) +, \cdot$ (escalares) K-ev.

$W), +, \cdot$ (escalares) $\rightarrow$ K-espacio vectorial

$W) \simeq Mat_{m\times n}(K)$

n , $\dim_K W = m$

eramos $V = W$

$V, V) = End_K(V)$ (endomorfismo)

(V) $+, \circ$ (composición) $\rightsquigarrow$ Anillo unitario no conmutativo
en general

$V) \simeq Mat_n(K)$ $\rightsquigarrow (\dim_K V = n)$

$), +, \cdot$ (escalar) $\longrightarrow$ K-espacio vectorial

$V) \simeq Mat_n(K) \rightsquigarrow (\dim_K V = n)$

$(V), +, \cdot, \circ$ $\rightsquigarrow$ Estructura K-álgebra

. que $W < V$

$\longrightarrow V$ K-lineal, inyectiva

$\longrightarrow u$ K-mono isimo (K-homomo inyectivo)

$\rightarrow V/W$ K-lineal suprayectiva

$\rightarrow \bar{u}$ K-epimorfismo

W K-lineal sobreyectiva

$\rightarrow W$

$\longrightarrow w$ donde $u = w + w'$ $\rightsquigarrow$ (única descomposición posible)

$v) = w + \alpha = \Pi_W(u) + \Pi_W(v)$

$$\left.\begin{array}{l} + w' \\ + \alpha' \end{array}\right\} \Rightarrow u + v = (\underset{\substack{\cap \\ W}}{w + \alpha}) + (\underset{\substack{\cap \\ W}}{w' + \alpha'})$$

$\in W$

$\in W'$

$\Pi_W(au) = a\Pi_W(u)$

$\Pi_W \circ \Pi_W = \Pi_W$

6/Nov

Sea $\phi \in Hom_K(V, W)$ se definen

$) = \{u \in V : \phi(u) = 0\}$ núcleo

$\phi = \{\phi(u) : u \in V\}$ imagen.

$, < O \quad , \quad Img\,\phi < W$

ón

$\in \ker\phi \Rightarrow \phi(u) = \phi(v) = 0 \Rightarrow \phi(u+v) = \phi(u)+\phi(v) =$

$) \Rightarrow u + v \in \ker\phi$

nos, $a \in K$, $u \in \ker\phi \Rightarrow aw \in \ker\phi$

$, \underbrace{w \in Img\,\phi}_{w = \phi(u)} \Rightarrow aw = a\phi(v) = \phi(au) \in Img\,\phi$

onomorfismo $\iff \ker\phi = \{0\}$

pimorfismo $\iff Img\,\phi = W$

ón $\boxed{1.}$

$\in \ker\phi \Rightarrow \underset{\phi(u)}{\underset{\shortparallel}{0}} = \phi(u) \Rightarrow 0 = u$

$(u) = \phi(v) \Rightarrow \underset{\phi(u-v)}{\underset{\shortparallel}{\phi(u) - \phi(v)}} = 0 \Rightarrow u - v \in \ker\phi = \{0\}$

$\Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$

$Hom_K(V, W)$, $\dim_K V = 0$, se verifica que:

$, \ Im\,\phi$ tienen dimensión finita

$\ker\phi + \dim_K Img\,\phi = n$

1)

$< V \Rightarrow \dim_f \ker \phi = k$ finita , entonces $\dim_K \operatorname{Img} \phi = n-$

una base del núcleo de ϕ

$u_k \}$ base de $\ker \phi$

$, u_{k+1}, \dots, u_n \}$ base de V

$_1), \dots, \phi(u_n) \}$ base de $\operatorname{Img} \phi$?

ϕ , $w = \phi(u) = (a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n) =$

$u_1) + \dots + a_n \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\phi(u_k)} + a_{k+1} \phi(u_{k+1}) + \dots + a_n \phi(u_n) =$

$\phi(u_{k+1}) + \dots + a_n \phi(u_n)$ S.G sistema generadores

$(u_{k+1}) + \dots + a_n \phi(u_n) = \phi(a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n) \Rightarrow$

$_{k+1} + \dots + a_n u_n \in \ker \phi \Rightarrow -a_1 u_1 - \dots - a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots +$

$u_1 + \dots + a_k u_k$ (xq vale 0)

$_n = 0 \Rightarrow a_{k+1} = \dots = a_n = 0$

$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0$

$a_{ij} \in k \iff$

$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0$

S.L Homogéneo.

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow k^m$

$, a_n) = (\underbrace{a_{11} a_1 + \dots + a_{n1} a_n}_{\overset{\shortparallel}{0}}, \dots, \underbrace{a_{m1} a_1 + \dots + a_{mn} a_n}_{\overset{\shortparallel}{0}})$

eal

porque será sol. del núcleo cuya sol es 0.

6/Nov.

y ϕ_s un sistema lineal homogéneo y la aplicación k-lineal

Sea $A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(k)$ la "matriz del sistema" Se verifica:

ϕ_s es el conjunto de soluciones de (S)

$$\ker \phi_s = n - \underset{\underset{\boxed{\text{rango } A}}{\|}}{\dim_k \text{Img}\, \phi_s} = rg\,(\phi_s)$$

(determinante)

7/Nov.

ecuerdo.

$\longrightarrow k^m$

$,a_n) = (a_{11}a_1 + \cdots + a_{1n}a_n, \ldots, a_{m1}a_1 + \cdots + a_{mn}a_n)$

$\in Mat_{m\times n}(k)$, (S) ; $\underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{m\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\quad Ax^t = 0$

$Hom_k(V, W)$, $A \in Mat_{m\times n}(k)$

$\phi = \dim_k \text{Img}\, \phi$ (dimensión ev, de Im => rango)

$A = \dim_k \langle \underbrace{(a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{mn})}_{\in k^m} \rangle$

$\langle \phi(e_1), \ldots, \phi(e_n) \rangle = \langle (\underset{\in k^m}{a_{11}, \ldots, a_{m1}}), \ldots, (\underset{\in k^m}{a_{n1}, \ldots, a_{mn}}) \rangle$

$\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}\Big)$ $\quad m = 2$, $n = 3$ $\quad \rightsquigarrow rg \times$ columna

$\langle \underbrace{(1, 3), (0, 1), (2, 4)}_{\in k^2} \rangle$

$3) + b(0, -1) = (0, 0)$

$= 0$, $a = 0$, $a \cdot 3 + b \cdot 1 = 0 \rightsquigarrow b = 0$

el espacio de soluciones del sistema lineal homogéneo S,

el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo S,

ión $\boxed{n - rg\ A}$.

$x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$

$$\phi_{S_b} : K^n \longrightarrow K^m$$

$\vdots$

$x_1 + \dots + a_{m1} x_n = b_m$

$, a_n) = (a_{11} a_1 + \cdots a_{1n} a_n , \dots , a_{m1} a_1 + \dots + a_{mn} a_n)$

$Mat_{m\times n}(K)$

$\left(a_{ij} \middle| \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right) \in Mat_{m\times(n+1)}(K)$

ble $\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_m) \in Img\ \phi_S \Leftrightarrow (b_1, \dots, b_m) \in \langle (a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots$

$\dots, a_{mn}) \rangle \Leftrightarrow \langle (a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots a_{mn}), (b_1, \dots, b_m) \rangle =$

$, \dots, a_n), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn}) \rangle \Leftrightarrow dim_K \langle\ \rangle = dim_K \langle\ \rangle$ $\quad W \subset V$
$m \leq n$

$\Leftrightarrow m = n \Leftrightarrow \boxed{rg\ (A|b) = rg A}$

Rucheblundy)

ema lineal S_b es compatible $\Leftrightarrow rg(A|b) = rg\ A$

b es compatible $\Rightarrow$ el conjunto de soluciones de S_b

$, a_n) + Ker\ \phi_S$, siendo $(a_1, \dots, a_n)$ alguna solución de S_b

$(c_1, \dots, c_n)$

$a_n + \dots + a_{1n} a_n = b_1$

$\vdots$

$a_1 + \dots + a_{mn} a_n = b_m$

$$\begin{cases} a_{11} c_1 + \dots + a_{1n} c_n = b \\ \\ a_{m1} c_1 + \dots + a_{mn} c_n = b_m \end{cases}$$

$a_1) + \dots + a_{1n} (c_n - a_n) = b_1 - b_1 = 0$

$\vdots$

$- a_1) + \dots + a_{mn} (c_n - a_n) = b_m - b_m = 0$

$(c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n) \in Ker\ \phi_S$

7/Nov.

= Isomorfía

, $\omega_2 \subset V \Longrightarrow \omega_1+\omega_2/\omega_1 \simeq W_2/\omega_1 \cap W_2$

a de Isomorfía

$V \longrightarrow W$ k-lineal, se verifica que $\underbrace{V/\ker\phi}_{\text{conjunto cociente}} \simeq \operatorname{Im}\phi$

ión

$\phi \longrightarrow \operatorname{Im}\phi$

$\phi(u) \in \operatorname{Im}\phi$

$\Longrightarrow \phi(u) = \phi(v)$

$\ker\phi \Longrightarrow \phi(u-v) = 0$

$(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{\Phi}(\overline{u+v}) = \phi(u+v) = \phi(u)+\phi(v) = \bar{\Phi}(\bar{u})+\bar{\phi}(\bar{v})$

$(a\bar{v}) = \dots \quad = a\phi(u) = a\bar{\phi}(\bar{u})$

tiva $v \in \operatorname{Im}\phi \Longrightarrow v = \phi(u) = \bar{\phi}(\bar{u}) \in \operatorname{Im}\phi$

$\bar{u} \in \ker\bar{\Phi} \Longrightarrow \bar{u} = \bar{0} \quad u \in \ker\phi$

$\bar{\Phi}(\bar{u}) = 0 = \phi(u)$

cación. 11/Nov.

Sea , $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V, $\{V_1, \dots, V_n\} \subseteq W$, W-ev.

aplicación k-Lineal $\phi : V \longrightarrow W$:

V_i , para cada $i = 1, \dots, n$.

ón

d $\phi, \Psi : V \longrightarrow W$ k-lineal : $\phi(u_i) = \Psi(u_i) = V_i$

$i = 1, \dots, u \Longrightarrow \phi = \Psi$

$\in V \Longrightarrow u = (a_1, \dots, a_n)_B = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \Longrightarrow \phi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(\overline{u_i}) =$

$a_i \Psi(\overline{u_i}) = \Psi(u)$ #

Defino $\phi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{v_i}_{\text{imágenes}}$, $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$

k - lineal?

$(u_i) = v_i$?

$\ldots, \overset{a_{i-1}}{0}, \overset{a_i}{1}, 0, \ldots, 0)_B \Longrightarrow \phi(u_i) = 1 \cdot v_i = v_i$

$') = \sum_{i=1}^{n} (a_i + a'_i) v_i = \sum a_i v_i + \sum a'_i v_i = \phi(u) + \phi(u')$

$a'_1, \ldots, a'_n)_B$

$= \sum_{i=1}^{n} (a \cdot a_i) v_i = \sum a (a_i v_i) = a \sum a_i v_i = a \phi(u).$

$\longrightarrow W$ k - lineal , $\dim_K V = u$, $\dim_K W = m$

$u_1, \ldots, u_n\}$ $B_W = \{v_1, \ldots, v_m\}$

$= 1, \ldots, n$ vectores únicos e imágenes únicas

as coordenadas serían únicas

$_1) = (a_{i1}, \ldots, a_{im})_{B_W} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j$

$i = 1, \ldots, n$

$u = (x_1, \ldots, x_n)_{B_V} = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \Longrightarrow \phi(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j =$

$x_i a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \right) v_j$

n

m

// vector en W B_W

$(y_1, \ldots, y_m)_{B_W}$

//

$\sum_{j=1}^{m} y_j v_j$

base W $y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{a_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$ $\forall j = 1, \ldots, m$

$$) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\phi(u_1)$ $\uparrow$ $\phi(u_n)$

Esta matriz es $M_\phi(B_V, B_W)$

11/Nov.

$\longrightarrow K^2$ En bases canónicas

$,0,1)\}$ $B_c' = \{(1,0),(0,1)\}$ Es k-lineal

$\longmapsto (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$

$x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$$B_c, B'_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (1,0) \\ (0,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \phi(1,0,0) & \phi(0,1,0) & \phi(0,0,1) \end{array}$$

$(1,1)$

$(-1,0)$

$(0,1)$

$$\begin{matrix} {}_1 \\ {}_2 \end{matrix}\Bigg)_{B_w} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{B_v}$$

$(y_1, y_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$

$V_{B_v} \longrightarrow W_{B_w}$

$+ \psi)(u) \overset{def}{=} \phi(u) + \psi(u)$

$$\boxed{M_{\phi+\psi}(B_v, B_w) = M_\phi(B_v, B_w) + M_\psi(B_v, B_w)}$$

es k-lineal

$\phi)(u) = a\phi(u) \Longrightarrow \boxed{M_{a\phi}(B_v, B_w) = ⓐ \cdot M_\phi(B_v, B_w)}$

por todas
las coordenadas.

sición aplicaciones

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \phi"'] & W_{B_w} \arrow[r, "\psi"] & U_{B_u} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Rightarrow M_{\psi \circ \phi}(B_v, B_u) = \\ \psi(\phi(u)) \\ = M_\psi(B_w, B_u) \cdot M_\phi(B_v, B_w) \end{array}}$$

f rior .

$\longrightarrow k^2$ $\qquad \phi(e_1) = (1,1) = v_1$

$\phi \quad \to (x_1 - x_2,\ x_1 + x_3)$ $\qquad \phi(e_2) = (-1,0) = v_2$

Base k^2 $\qquad \phi(e_3) = (0,1)$

$1,0)\} = B'$

$v_2 = (0,0) \Rightarrow a = b = 0$

n L. I $\Rightarrow$ son Base

$$(B_c, B') = \begin{pmatrix} 1^a & 0^a & 1^a \\ 0^b & 1^b & 1^b \end{pmatrix} \begin{matrix} (1,1) \\ (-1,0) \end{matrix}$$

$\phi(e_1) \quad \phi(e_2) \quad \phi(e_3)$

$\longrightarrow$ Esta matriz es escalonada

$1) = a v_1 + b v_2 \rightsquigarrow a = 1,\ b = 0$

$1,0) = a v_1 + b v_2 \rightsquigarrow a = 0,\ b = 1$

$1) = a v_1 + b v_2 \rightsquigarrow a = 1,\ b = 1$

E

$B) = I_n \qquad n = \dim_K V$

$V \longrightarrow W$

$(u) = 0 \qquad M_0(B_V, B_W) = 0 \in Mat_{m\times n}(k)$

$\longrightarrow V_{B'}$

$(B, B') = (a_{ij}) \in Mat_n(k)$

$V, \quad u = (x_1, \ldots, x_n)_B = (x'_1, \ldots, x'_n)_{B'}$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \underbrace{(a_{ij})}_{\text{matriz}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

cambio
coordenadas = $M(B, B')$ matriz de paso

11 / Nov

jemplo

$$\xrightarrow{id} \underset{B'}{V} \xrightarrow{id} \underset{B}{V}$$

$$\boxed{I_n = M(B',B)\ M(B,B')}$$

la matriz de paso de una matriz es la inversa (son inversas)

17 / Nov.

Dual.

$V = n$, $\dim_K W = m$ y B_V , B_W las bases de V y W

ón :

$$n_K(V,W) \longrightarrow Mat_{m\times n}(K) \simeq K^{m\cdot n}$$

$$\phi \longmapsto M_\phi(B_V, B_W)$$

- isomorfismo.

ación

$$M_{\phi+\psi}(B_V, B_W) = M_\phi(B_V, B_W) + M_\psi(B_V, B_W)$$

$$B_V, B_W) = a\, M_\psi(B_V, B_W) \Rightarrow \forall u \in B_V, \phi(u) = \psi(u) \Rightarrow$$

$$\psi(u) = \phi(u) \quad \forall\ u \in V$$

$$\Downarrow$$

$$\phi = \psi$$

$$\begin{matrix} 1\le i\le m \\ 1\le j\le n \end{matrix} \in Mat_{m\times n}(K) \overset{?}{\Longrightarrow} \exists\ \phi \in V \longrightarrow W :$$

$$\phi(u_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j \quad , \quad \begin{matrix} B_W = \{v_1, \dots, v_m\} \\ B_V = \{u_1, \dots, u_n\} \end{matrix}$$

$$W) \simeq Mat_{m\times n}(K) \simeq K^{mn}$$

$$n_K(K,W) \simeq Mat_{m\times 1}(K) \simeq K^m \simeq W$$

1 dim $W = m$

caso es el isomorfismo natural

$$Hom_K(K,W) \simeq W$$

$$\phi(u) \longleftarrow\!\shortmid\ u$$

$$\phi(u)(a) = a\cdot u$$

$\mathrm{Hom}_K(K, W)$

$) (a+b) \overset{?}{=} \phi(u)(a) + \psi(u)(b) \Longleftrightarrow (a+b)u \overset{?}{=} au + bu$

$) (ba) \overset{?}{=} [b\phi(u)](a) \Longleftrightarrow (bu)u \overset{?}{=} b(\phi(u)(a)) = b(au)$

[

$\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K, W)$

$\longrightarrow \phi(u)$

$v) \overset{?}{=} \tau(u) + \tau(v) \Longleftrightarrow \phi(u+v) \overset{?}{=} \phi(u) + \phi(v) \Longleftrightarrow$

$$\underset{a(u+v)}{\overset{}{u+v)(a)}} \overset{?}{=} (\phi(u) + \phi(v))(a) = \phi(u)(a) + \underset{au+av}{\phi(v)(a)}$$

$a\tau(u) \Longleftrightarrow \phi(au) \overset{?}{=} a\phi(u) \Longleftrightarrow$

$au)(b) \overset{?}{=} (a\phi(u))(b) = a(\phi(u)(b)) \Longleftrightarrow b(au) = a($

emostrado que es ap. lineal, ahora veamos que es una

ctiva

ctiva, $\ker\tau \overset{?}{=} \{0_W\}$

$= 0_{K \to W} \Longrightarrow \forall a \in K \quad \tau(u)(a) = 0$

$$\phi(u)(a) = au$$

$1_K \cdot u = 0 \Longrightarrow u = 0.$

$k) \simeq \mathrm{Mat}_{1\times n}(K) \simeq K^n \simeq V$

$k) \underset{\uparrow}{\simeq} V \ (\dim_K V \text{ finita})$

no es canónico

No se ha encontrado y un $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ Biyectiva Isomorfismo y canónico

17/Nov.

$\underbrace{\mathrm{Hom}_K(V,K)}_{\text{formas K lineales de V}}$ Espacio Dual.

V (isomorfo a V) si $\dim_K V$ finita

$\{u_m\}$ base V $\quad u_i^* \in V^* \overset{?}{\Longleftrightarrow} u_i^*(u_j) \quad \forall j = 1, \dots, n$

$) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \Longrightarrow$ obtenemos base dual

$B^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ base V^*

ión

$V^* = \dim_K V = n$

$+ \dots + a_n U_n^* = 0 \quad a_i \in K \Rightarrow (a_1 u_1^* + \dots + a_n U_n^*)(u_j) = 0(u_j) = 0 \quad \forall j$

$u_i^*)(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_1 \cdot \delta_{jj} = a_j$

$, B = \{(\overset{u_1}{1, 1}), (\overset{u_2}{1, 2})\}$ Base $\mathbb{R}^2$

$, \underset{e_2}{(0,1)}\}$

$u_1^*, u_2^*\}$

$^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad u_1^*(u_1) = 1 \quad u_1^*(1,1) = 1$

$u_1^*(u_2) = 0 \quad u_1^*(1,2) = 0$

$u_1^*(e_2) = u_1^*((1,2)-(1,1)) = 0 - 1 = -1$

$u_1^*(e_1) = u_1^*(2(1,1)-(1,2)) = 2 \cdot 1 - 0 = 2$ //

$u_1^*(x,y) = 2x - y$

$\longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad u_2^*(u_1) = 0 \quad u_2^*(1,1) = 0$

$u_2^*(u_2) = 1 \quad u_2^*(1,2) = 1$

$u_2^*(e_1) = u_2^*(($

$_2) = u_2^*(($

¿ hacerlo ?

$u_2^*(x,y) =$

$$_B \in V \not\Longrightarrow \underset{\underset{V}{\cap}}{u}^{*} \in V^*$$

$$= \{\underset{\underset{u}{\shortparallel}}{(1,0)}, (0,1)\} \Longrightarrow u^*$$

$$\nparallel$$

$$' = \{\underset{\underset{u}{\shortparallel}}{(1,0)}, (1,1)\} \Longrightarrow u^*$$

$$V^* \neq \{u^* : u \in V\}$$

$$^* \quad , \ \omega = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*$$

$$\omega(u_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*\right)(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*(u_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_{ij}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \omega(u_i) u_i^*}$$

$$a_i u_i$$

$$^*(u) = u_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_j^*(u_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ji} = a_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i^*(u)(u_i)$$

$$v, w \ \dots \in V$$

$$\alpha, \quad V^*$$

18/Nov

$_K(V, K)$ $\dim_K V$ finita $\Longrightarrow V \simeq V^*$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] & W \arrow[d, "w"] \arrow[r, Rightarrow, "?"] & W^* \arrow[r, "\phi^*"] & V^* \\ & K & & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}_K(V, W) \Rightarrow \phi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

$= w \circ \phi \in V^*$ $\qquad w \in W^*$

$)^* = id_{V^*}$

$\circ \phi)^* = \phi^* \circ \varphi^*$

mostración

$\circ \phi)^*(\omega) = \omega \circ (\varphi \circ \phi) = (\omega \circ \varphi) \circ \phi = \phi^*(\omega \circ \varphi) =$

$\phi^*(\varphi^*(\omega)) = (\phi^* \circ \varphi^*)(\omega)$

Sea

n, $\dim_K W = m$ y B_V y B_W base de V y W,

$\in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $\phi^* \in \mathrm{Hom}_K$, $\phi^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$.

que $\underbrace{M\phi^*(B^*_W, B^*_V)}_{\phi^*} = \mathrm{Mat}_\phi(B_V, B_W)^t$

ción

$u_1, \dots, u_m \}$ $\qquad \phi^*(v_i^*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j^* \Rightarrow [\phi^*(v_i^*)](u_k) =$

$v_1, \dots, v_m \}$

$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j^* \right)(u_k)$

$^{*}_{i} \circ \phi)(u_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j^*(u_k) = a_{ik}$

$\overset{\shortparallel}{v_i^*(\phi(u_k))}$

$\overset{\shortparallel}{v_i^*}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{kj} v_j \right) = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} v_i^*(v_j) = b_{ki}$

nita $\Longrightarrow V \simeq V^* \simeq V^{**}$ no hay isomorfismo canónico

dad (dual sobre dual)

$v^*)^* = \mathrm{Hom}_k(V^*, k) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(V, k), k)$

do dimensión finita, entonces la aplicación

$\longrightarrow V^{**}$ dada por

$u)](w) = w(u)$ para cada $u \in V$, $w \in V^*$,

es un k-isomorfismo de ev.

ón

$u_1+u_2) = \eta(u_1)+\eta(u_2)$ „ $\forall\, w \in V^*$

$[\eta(u_1+u_2)](w) \overset{?}{=} [\eta(u_1)+\eta(u_2)](w$

$= w(u_1)+w(u_2)$ $\qquad \eta(u_1)(w)+\eta(u_2)(w)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad w(u_1)+w(u_2)$ ✓

conserva la suma

$u) = a\eta(u)$

$(au)(w) \overset{?}{=} [a\eta(u)](w)$

$a[\eta(u)(w)]$

$\|$

$) = aw(u)$ ✓

$\Rightarrow \eta$ es k-lineal.

mostraciones

18/Nov

yectiva $\xRightarrow[\text{dim } V = \text{dim } V^{**}]{}$ η biyectiva
finita

Ker $\eta \Rightarrow \eta(u) = 0 \Rightarrow \overset{w(u)}{\overset{\shortparallel}{\eta(u)(w)}} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} u = 0$

V.
$w \in V^*$

ión al absurdo

os $n \neq 0$

$_1, \ldots, u_n\}$: base de V

$u^*_1, u^*_2, \ldots, u^*_n\}$ base dual en V^*

1

$(u) = u^*(u_1) = 1$

a ver que todos los elementos del núcleo son cero, tendríamos

a que $w = u^*1$ es igual a cero pero es 1 por lo que hay

tradicción

rchete canónico

$> : V \times V^* \longrightarrow k$,

$\overset{\text{def}}{=} w(u) = \eta(u)(w)$, $u \in V$, $w \in V^*$

/Propiedades

n

$) \langle u_1 + u_2, w\rangle = \langle u_1, w\rangle + \langle u_2, w\rangle$

$) \langle au_1, w\rangle = a\langle u, w\rangle$

$i) \langle u, w_1 + w_2\rangle = \langle u\ w_1\rangle + \langle u, w_2\rangle$

$v) \langle u, aw\rangle = a\langle u, w\rangle$

ón propiedad iii)

$+ w_2 \rangle = (w_1 + w_2)(u) = w_1(u) + w_2(u) = \langle u, w_1 \rangle + \langle u, w_2 \rangle$

Espacio ortogonal)

$\Longrightarrow W^{\perp}$ (ortogonal) $= \{ w \in V^* : \underset{w(u)}{\langle u, w \rangle} = 0 \quad \forall u \in W \} =$

$w \in V^* : w(u) = 0 \ \forall u \in W \} \subseteq V^*$

$= \{ w \in V^* : w(0) = 0 \} = V^*$

$= \{ w \in V^* : w(u) = 0 \quad \forall \ u \in V \} = \{ 0 \}$

$\subseteq W_2 \Longrightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$

ostración

$\in W_2^{\perp} \Rightarrow \omega(u) = 0 \quad \forall u \in W_2 \Longrightarrow \omega(u) = 0 \ \forall u \in W_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow u \in W_1^{\perp}$

20/Nov.

$\longrightarrow V^{**}$ isomorfismo, $\langle \ , \ \rangle$; $V \times V^* \longrightarrow k$ k - lineal

$u)(w) = \omega(u) = \langle u, w \rangle$

$V, \ \omega \in k^*$

$< V \Longrightarrow W^{\perp} < V^*$

stración

$, \ W_2 \in W^{\perp} \Rightarrow \forall u \in W, \ \langle u, w_1 + w_2 \rangle = \langle u, w_1 \rangle + \langle u, w_2 \rangle =$

$= 0 + 0 = 0 \Longrightarrow \omega_1 + \omega_2 \in W^{\perp}$

$\in k, \ \omega \in W^{\perp} \Longrightarrow \forall u \in W, \ \langle u, a\omega \rangle = a \langle u, \omega \rangle = a \cdot 0 = 0$

$\Longrightarrow a\omega \in W^{\perp}$

$b(V) \longrightarrow Sub(V^*)$

$W \longmapsto W^{\perp}$ $\eta_V(W), \ W^{\perp\perp} < V^{**}$

20/Nov.

$w), W^{\perp\perp} < V^{**}$

$\eta_V(W) = W^{\perp\perp} = (W^{\perp})^{\perp}$

ostración

$u \in W \ , \ w \in W^{\perp} \Longrightarrow \eta_V(u) \in (W^{\perp})^{\perp}$

$\langle w, \eta_V(u) \rangle = \eta_V(u)(w) = \langle u, w \rangle = 0$

$u \in W$
$w \in W^{\perp}$

$\Omega \in W^{\perp\perp} < V^{**} = \eta_V(V)$

$\overset{\shortparallel}{\eta_V(u)}, \ w \in V$

¿$u \in W$?

s que $u \notin W \Longrightarrow u \neq 0 \Longrightarrow B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base V

$= \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$ base V^* , $W = u_1^* \in V^*$

$u \in W$? $\forall \ w \in W^{\perp} \Longrightarrow 0 = \langle w, \Omega \rangle = \langle w, \eta_V(u) \rangle$

$\eta_V(u)(w) = w(u)$

$\in \eta_V(W)$?

$W^{\perp\perp} < V^{**} = \eta_V(V) \Rightarrow \Omega = \eta_V(u), \ u \in V$

$W \Rightarrow u \neq 0 \Rightarrow \{\overset{u}{\shortparallel}u_1, \underbrace{\ldots, u_n}_{u_{n-m+1}, \ldots, u_n}\} = B$ base V, B^* de V^*

$W = \langle v_1, \ldots, v_m \}$ Base

$v_1, \ldots, v_m \}$ LI.

$\omega = u_1^*$

$w, \Omega \rangle = \langle w, \eta_V(u) \rangle = \eta_V(u)(w) \overset{\checkmark}{=} u_1^*(u) =$

$^*_1(u_1) = 1 \quad \forall \ w \in W^{\perp}$

$\Longleftrightarrow \langle v, u_1^* \rangle = 0 \quad \forall \ v \in W$

$u_1^*(v)$

$u_{n-m+1}) = \ \ldots = u_1^*(u_n) = 0$

$\delta_{1j} = 0$

la dualidad

Sec n, la aplicación :

$: \mathrm{Sub}(V) \longrightarrow \mathrm{Sub}(V^*)$

$W \longmapsto W^\perp$

a.

ción

$W_2^\perp \Longrightarrow W_1^{\perp\perp} = W_2^{\perp\perp} \Longrightarrow \eta_V(W_1) = \eta_V(W_2)$

$_1 = W_2$

$H < V^* \Longrightarrow H^\perp < V^{**} \overset{\eta_V}{\cong} V \Longrightarrow H^\perp = \eta_V(W)$

$= W^{\perp\perp} \Longrightarrow H = W^\perp$

$V = n \quad , \quad W < V \; , \dim_K W = m \Longrightarrow \dim_K W^\perp = n - m =$

$= \mathrm{codim}_K\, W$

ión

$\underbrace{, \dots, u_m}_{B_W} , u_{m+1}, \dots, u_n \}$ Base de V,,

base V^* ¿ $\{ u^*_{m+1}, \dots, u_n^* \}$ base de $W^\perp$

$, \dots, n \Longrightarrow u_j^*(u_1) = 0 \qquad \forall\, i = 1, \dots, m$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{u^*_{m+1}, \dots, u_n^*}_{LI} \in W^\perp$$

$\in W^\perp \Longrightarrow w = w(u_1)\, u_1^* + \dots + w(u_m)$

$\Longrightarrow w(u_1) = \langle u_1, w \rangle = 0 \; , \; \dots , \quad W(u_m) = \langle u_m, W \rangle =$

$) u_1^* + \dots + \underbrace{w(u_m)}_{0} u^*_m + w(u_{m+1})\, u^*_{m+1} + \dots + w(u_n)\, u_n^*$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0} \qquad \{ u^*_{m+1}, \dots, u_n^* \}$ SG de $W^\perp$

20/Nov

$+ W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

emostración

$W_2 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow (W_1 + W_2)^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}, W_2^{\perp} \Rightarrow$

$+ W_2)^{\perp} \subseteq W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

$\cap W_2 \subseteq W_1, W_2 \Rightarrow W_1^{\perp}, W_2^{\perp} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\perp}$

$v_1^{\perp} + W_2^{\perp} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\perp} \Rightarrow (W_1 + W_2)^{\perp} \subseteq W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

#

$W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

ración

$\Rightarrow \eta_V(W_1 \cap W_2) = (W_1 \cap W_2)^{\perp\perp} \subseteq (W_1^{\perp} + W_2^{\perp})^{\perp} \subseteq$

$^{\perp} \cap W_2^{\perp\perp} = \eta_V(W_1) \cap \eta_V(W_2)$

$_V(W_1 \cap W_2) = \eta_V(W_1) \cap \eta_V(W_2) \Rightarrow$

$(W_1 \cap W_2)^{\perp\perp} = (W_1^{\perp} + W_2^{\perp})^{\perp}$

$\Rightarrow (W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$ #

$V_1 \oplus W_2 \Longrightarrow V^* = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$

21/Nov.

$< K^3$ planos distintos, $W_1 \neq W_2 \Rightarrow W_1^\perp \neq W_2^\perp$, son rectas de $(\cdot^3$

$$^3 \Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{(W_1 \cap W_2)^\perp}}{W_1^\perp + W_2^\perp} \Rightarrow W_1 \cap W_2 \subseteq K^3 \text{, rectas}$$

as.

, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V $\quad u = (x_1, \dots, x_n)_B = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$

, $\dim_K W = m \leq n$, $B_W = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de W

$1, \dots, a_{jn})_B = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} u_i \quad a_{ji} \in K$

$$) \; u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m, \; \lambda_i \in K \iff \begin{cases} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_m a_{m1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_m a_{mn} \end{cases}$$

el nº parámetros = dimensión

anas

$m, v_{m+1}, \dots, v_n\} = B'$ base de V

n - dim W, $\{v^*_{m+1}, \dots, v_n^*\}$ base de $W^\perp$

$$\begin{cases} v^*_{m+1}(u) = 0 \\ \vdots \\ v^*_n(u) = 0 \end{cases} \iff \forall u \in W \; ⊛$$

$$v^*_{m+1}(u) = v^*_{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_j u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{v^*_{m+1}(u_i)}_{\overset{\parallel}{b_{m+1}} \in K}$$

$\vdots$

$$v^*_n(u) = v^*_n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{v_n^*(u_i)}_{\overset{\parallel}{b_{ni}} \in K}$$

ciones cartesianas es n - m ec. independientes

21/Nov

$$W \Rightarrow W^* \xrightarrow{\phi^*} V^*$$

$$w \longmapsto \phi^*(w) = w \circ \phi$$

$$, B_v^*) = M_\varphi \underbrace{(\underbrace{B_v , B_w}_{A})^t}_{A^t}$$

$\dim_K \operatorname{Im} \phi$

$\dim_K \operatorname{Im} \phi^*$

$^* = (\operatorname{Im} \phi)^\perp \in \text{sub } W^*$

ción

$r\ \phi^* \Rightarrow \phi^*(w) = w \circ \phi \iff \forall u \in V,\ 0 = (w \circ \phi)(u) =$

$(u), w\rangle \iff w \in (\operatorname{Im} \phi)^\perp$

$\phi^* = (\ker \phi)^\perp \in \text{sub } V^*$

ración

$n\ \phi^* \Rightarrow w = \phi^*(\alpha),\ \alpha \in W^*$

$\qquad\qquad \overset{\|}{\alpha \circ \phi}$

$u \in \ker \phi$ ¿$\langle u, w\rangle = 0$?

$, w\rangle = \langle u, \alpha \circ \phi\rangle = (\alpha \circ \phi)(u) = \alpha(\phi(u)) = \alpha(0) = 0$

$n_K \operatorname{Im} \phi^* = \dim_K W^* - \dim_K \ker \phi^* = \dim_K W - \dim_K (\operatorname{Im} \phi)^\perp =$

$W - (\dim_K W - \dim_K \operatorname{Im} \phi) = \dim_K \operatorname{Im} \phi = \dim_K V^* - \dim_K \ker \phi =$

$m_K (\operatorname{Ker} \phi)^\perp = \dim_K \operatorname{Im} \phi^*$

ejercicio 3 Hoja 3 (continuación)

$[x] \longrightarrow k[x]$

$$D = \begin{cases} k = \langle 1 \rangle & \text{si} \quad \chi(k) = 0 \\ k[x^p] & \text{si} \quad \chi(k) = p \end{cases}$$

$$D = \langle D(1), D(x), \dots, D(x^n), \dots \rangle = \langle 0, 1, 2x, \dots, nx^{n-1}, \dots \rangle =$$

$$= \begin{cases} k[x] & \chi(k) = 0 \\ = \langle \{x^i : px^{n+i}\} \rangle & \end{cases}$$

$\neq 0$ $\qquad\qquad p = \chi(k)$

ía

$$(k) = 0 \implies \begin{cases} D \text{ epimorfismo} \\ D \text{ no inyectiva} \end{cases}$$

$[x] \longrightarrow k_{n-1}[x]$ ¿ k-lineal?

$= n\ B\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ $\qquad$ dim $= n-1$ $B\{1, x, \dots, x^{n-2}\}$

$(p+q) = D(p) + D(q) \quad D(ap) = aD(p)$

$$p = \underset{\substack{\cap \\ k_n[x]}}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i} \implies D(p) = \sum_{i=0}^{n-1} i a_i x^{i-1} = \underset{\substack{\cap \\ k_{n-1}[x]}}{\sum_{j=0}^{n-2} b_j x^j}$$

epimorfismo tiene que suceder:

$\text{pimorfismo} \iff \langle \underset{\substack{\| \\ 0}}{D(1)}, \underset{\substack{\| \\ 1}}{D(x)}, \dots, \underset{\substack{\| \\ (n-1)x^{n-2}}}{D(x^{n-1})} \rangle = k_{n-1}[x]$

$^2, \dots, (n-1)x^{n-2}\}$

$^2 \in \langle 0, 1, \dots, (n-1)x^{n-2} \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n-2 \quad \overset{\chi(k) \neq p.}{\iff}$

$p\, x_i \quad \forall i = 1, \dots, n-2 \iff p\, \chi\, (n-2)!$

imorfismo $\iff \chi(k) = 0$

24/Nov

ejercicio 3

$] \xrightarrow{\quad} K_5[x] \qquad K = \mathbb{F}_4 \qquad x^4 - x$

$6 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\} \qquad \chi(\mathbb{F}_4) = 2$

$5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

?

$$(B_6, B_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im}\, D = \langle 1, x^2, x^4 \rangle$$

$g(D) = \dim_{\mathbb{F}_4} \mathrm{Im}\, D = 3$

$= 0$

$x^2 = \cancel{x}^2$

$D(P'_0) \qquad D(p's)$

$$M_D(B_6', B_5') = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} g'_0 = 1 \\ g'_1 = x^2 \\ g'_2 = x^4 \\ g'_3 = x \\ g'_4 = x^3 \end{array}$$

$g'_0 = 1$

ón del endomorfismos

$_K(V) \quad \dim_K V = n$

$\longrightarrow V$

$\{u_1, \dots, u_n\}$ base de V

$$) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Phi(u_1) = a_{11} u_1 + u_{21} u_2 + \dots + u_{n1} u_n \\ \vdots \\ \Phi(u_n) = a_{1n} u_1 + \dots + a_{nn} u_n \end{array}$$

$, \dots, u'_n\}$ base de V

$$d \longrightarrow \underset{B}{V} \xrightarrow{\phi} \underset{B}{V} \xrightarrow{id} \underset{B'}{V}$$

$$_\Phi(B') = \underset{\underset{M(B',B)^{-1}}{\shortparallel}}{M(B,B')} \; \overset{\overset{A}{\shortparallel}}{M_\Phi(B)} \; M_{id}(B',B) = P^{-1}AP$$

$$P = M(B'B) \in GL_n(K)$$

$t_n(K)$, A y A' son semejantes si $A' = P^{-1}AP \quad P \in GL_n(K$

nza de matriz es una relación de equivalencia

$In^{-1} A I$

$$= P^{-1} A P \Rightarrow \underset{\underset{(P^{-1})^{-1} A' P^{-1}}{\shortparallel}}{P A' P^{-1}} = A$$

$A P$

$A'Q \qquad A''$ semejante A

$$A' = QAP$$

$$\in Mat_n(K) \Longrightarrow A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad r = rg A$$

$n+1 = \dim$

24/Nov.

observación

$u) = a u \quad \forall u \in V$ $\qquad \phi_a(u_i) = a u_i$

$u_1) = a_{11} u_1 + \dots + a_n u_n$

$\in \mathrm{End}_k(V)$

Jessi / Esther

$\dots, u_n\} \Rightarrow M_{\phi_a}(B) = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ & a & \\ 0 & & \ddots\ a \end{pmatrix} = a I_n + \dots + a_{nn} U_n$

cuerpo conmutativo $\Rightarrow \underbrace{k[x]}_{\text{función racional}}$ d.i $\Rightarrow k(x) = \left\{ \frac{g}{h} : g, h \in k[x] \right\}$

$\frac{g'}{h'} = \frac{gh' + g'h}{hh'}$

$\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$

$\frac{g'}{h} = \frac{g \cdot g'}{hh'}$

$, +, \cdot$ es cuerpo conmutativo, $k[x] \subseteq k(x]$

$g \longmapsto \frac{g}{h} = \frac{gh}{h}$

$k)$

$x I_n| = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix}}_{\in \mathrm{Mat}_{n \times n}(k[x])} \in k[x]$

$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\Bigg) \qquad P_A = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 1 + x$

$P \Rightarrow P_{A'} = |A' - x I_n| = |P^{-1} A P - P^{-1} x I_n P|$

$B \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix} B$

$^{-1}(A - x I_n) P| = |P^{-1}| |A - x I_n| |P| = |P^{-1}| P_A |P| = P_A.$

aracterístico, polinomio ϕ es $P_\phi = P_A$, donde $A = M_\phi(B)$

25/Nov.

$A - xI_n|$

$\phi \in End_K(V)$, $n = dim_K V$

3)

$K[x]$

$P_\phi = n$

$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} t(\phi) x^{n-1} + \dots + det(\phi)$

$t(\phi) = t(A)$, traza de A ; $det(\phi) = |A|$, $A = M_\phi(B)$

n

$') \Longrightarrow A' = P^{-1}AP$, $P = M(B', B)$ $\Longrightarrow |A'| = |P|^{-1}|A||P| = |A|$

$\Longrightarrow t(A') = t(A)$

$\in M_n(K[x])$, $b_{ij} \in K[x] \Longrightarrow P_\phi \in K[x]$

$$\begin{matrix} {}_2 \dots a_{1n} \\ {}_2 \dots a_{nn} - x \end{matrix} \Big) = (b_{ij})$$

$\boxed{n!}$ ⁂

n ii)

$x) \dots (a_{nn} - x) +$ términos de menor grado $\rightarrow n! - 1$

$\shortparallel$

$(-1)^n x^n +$ término de menor grado

$_{11} + (-x)^{n-1} a_{22} + \dots + (-x)^{n-1} (a_{nn})$ ⁂

iii)

$^n + \dots + b_1 x + b_0$

$(0) = |A - xI_n|(0) = |A - 0I_n| = |A|$

⁂

$\text{End}_K(V)$ es diagonalizable si $\exists$ B base de V : $M_\phi(B)$ diagonal

$\longrightarrow$ V $n=2$ $\quad M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$u_1, u_2\}$ $\quad \phi(u_1) = u_2 \quad , \quad \phi(u_2) = u_1$

$B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$?

$) = \lambda_1 u_1' \qquad \phi(u'_2) = \lambda_2 u_2'$

$') = \lambda u' \quad \Big\} \quad \lambda u' = \phi(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_2 u_1 + a_1 u_2$

$\qquad \qquad ||$

$_1 u_1 + a_2 u_2 \qquad \lambda a_1 u_1 + \lambda a_2 u_2$

$a_2 \Big\} \quad \lambda \in K$

$= a_1 \quad a_1, a_2 \in K$

$\boxed{a_2}$

$a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow u' = 0$

$a_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow u'_1 = u_1 + u_2$ $\Big\}$ 2 vectores que forman base

$\Rightarrow a_2 = -a_1 \Rightarrow u_2' = u_1 - u_2$

$= \{u_1', u_2'\} \qquad M_\phi(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \phi(u_1) = -u_2 \quad \phi(u_2) = u_1$

$\lambda u' = \phi(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_2 u_1 - a_1 u_2$

$//$

$\lambda a_1 u_1 + \lambda a_2 u_2$

$_2$

$a_1 \qquad \lambda \in K \quad a_1, a_2 \in K$

$= -a_2$

1°

2°

$\Longrightarrow a_1 = 0 = u' = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 = -1$ $\lambda \in \mathbb{R}$ ⇝ No diagonaliza

$\mathbb{C}$ diagonaliza $\lambda = \pm i$

$\Longrightarrow a_2 = i a_1 \Longrightarrow u'_1 = u_1 + i u_2$

$\Longrightarrow a_2 = -i a_1 \Longrightarrow u_2 = u_1 - i u_2$

$B' = \{u'_1 , u'_2\}$ $M\phi(B') = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

¿

(V), $\lambda \in k$. se define:

$V_{\phi,\lambda} = \{u \in V : \phi(u) = \lambda u\}$

V

ación Sean $u, v \in V_{\phi,\lambda} \Longrightarrow \phi(u) = \lambda u, \phi(v) = \lambda v$

$u+v) = \lambda(u+v) \Longrightarrow u+v \in V_{\phi,\lambda}$

$$\left.\begin{array}{l} u \in V_{\phi,\lambda} \\ a \in k \end{array}\right\} \Longrightarrow au \in V_{\phi,\lambda}$$

es el subespacio propio de ϕ relativo a λ

25/Nov

es el autovalor (valor propio) de ϕ si $V\phi, \lambda \neq \{0\}$

$\phi) =$ espectro de $\phi = \} \lambda_1, \ldots, \lambda_t ; \lambda \in K$, λ es autovalor de $\phi \}$

$M_\phi(B') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} K = \mathbb{R} \Rightarrow \sigma(\phi) = \phi = \{1, -1\} \\ K = \mathbb{C} \Rightarrow \sigma(\phi) = \{i, -i\} \end{cases}$

$(\phi) = \{1, -1)$

27/Nov.

$\ldots, \lambda_t \in K$ los autovalores distintos, $u_i \in V\phi, \lambda_i$ para cada

t si $u_1 + \ldots + u_t = 0$, entonces $u_1 = \ldots = u_t = 0$

ación

$\Longrightarrow u_1 = 0$ $\qquad u_1 + \ldots + u_t = 0 \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_t u_t = \phi$ $*_1$

$\Longrightarrow t$ $\qquad \lambda_t u_1 + \ldots + \lambda_t u_t = 0$ $*_2$

Restamos $*_1 - *_2$

$\underbrace{{}_t - \lambda_i) u_i}_{\in V\phi, \lambda_1} + \ldots + \underbrace{(\lambda_t - \lambda_{t-1}) u_{t-1}}_{\in V\phi, \lambda_{t-1}} = 0 \Longrightarrow \underbrace{(\lambda_t - \lambda_i)}_{\neq 0} u_i = 0$

$\ldots = u_{t-1} = 0 \Longrightarrow u_t = 0$

valentes

s diagonalizable

ece una base de vectores propios

ación

$\Rightarrow$ i) $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base: $\underbrace{u_i \in V\phi, \lambda_i}_{\phi(u_i) = \lambda_i u_i}$

$\phi(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$u_1 \dots u_n\}$ base de V:

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \lambda_i \in k \Rightarrow \forall i, \phi(u_i) = \lambda_i u_i$$

$$u_i \in V_{\phi,\lambda_i}$$

$e_{\phi,\lambda}$ = multiplicidad de λ como raíz de P_ϕ

plo

$$)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow P_\phi = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$\mathbb{R}$, $e_{\phi,1} = 1 = e_{\phi,-1}$, $e_{\phi,7} = 0$

$_2$ $e_{\phi,1} = 2$ ## en $\mathbb{F}_2$ $P_\phi = (x-1)^2$

$\Longleftrightarrow e_{\phi,\lambda} \geq 1$

:

$\sigma(\phi) \Longleftrightarrow e_{\phi,\lambda} \geq 1 \Longleftrightarrow P_\phi(\lambda) = 0$

$\phi)$ es finito

$$\dim_K V_{\phi,\lambda} \leq e_{\phi,\lambda} \leq u$$

$\parallel$

$f_{\phi,\lambda} \equiv$ dim Geométrica de λ respecto de ϕ

ón

$$\sigma(\phi) \Longleftrightarrow V_{\phi,\lambda} = \{0\} \Longleftrightarrow \ker(\phi - \lambda id_V) \neq \underbrace{\{0\}}_{V_{\phi,\lambda}} \Longleftrightarrow$$

$$m_K \ \ker(\phi - \lambda id_V) > 0$$

$\parallel$

$$n - rg(\phi - \lambda id_V) = n - rg(A - \lambda I_n)$$

$$> rg(A - \lambda I_n) \Longleftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0 \Longleftrightarrow P_\phi(\lambda) = 0$$

27/Nov

s (continuación)

$) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ con $t \leq n$

$\lambda \in \sigma(\phi)$, $f = \dim_K V_{\phi,\lambda}$ $\qquad e = e_{\phi,\lambda}$

$, u_f\}$ base de $V_{\phi,\lambda}$

$, \dots, u_f, u_{f+1}, \dots, u_n\}$

$$B) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots \; f & \\ & & \lambda \end{matrix}}_{\phi(u_i) = \lambda u_i \quad i = 1, \dots, f} & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_f & A_{f \cdot (n-f)} \\ \hline 0 & B_{(n-f)(n-f)} \end{array}\right)$$

$$\phi(B) = \left|\begin{array}{c|c} \lambda I_f - x I_f & A \\ \hline 0 & B - x I_{nf} \end{array}\right| = |\underbrace{\lambda I_f - x I_f}_{\overset{\shortparallel}{|(\lambda - x) I_f|}}| \cdot |B - x I_{n-f}| =$$

$\lambda - x)^f \, |B - x I_{nf}|$

$$) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & A_{2\times 3} \\ 0 & \lambda & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & B \end{array}\right) \qquad P_\phi = \left|\begin{array}{cc|c} \lambda - x & 0 & A_{2\times 3} \\ 0 & \lambda - x & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & B \end{array}\right|$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ $\quad t \leq n \quad e_i , f_i \quad i = 1, \dots, t$

$$\leq \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{f_1 + \dots + f_t} \leq \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{e_1 + \dots + e_f} \leq n$$

dicción suficiente no necesaria)

ne n raíces distintas, entonces ϕ es diagonalizable

ación

, $e_i \geq 1$ $e_i \leq n$ $f_i \geq 1$

$^2 + 1$ $\mathbb{R}$ $\sigma(\phi) = \emptyset$ No diagonaliza

dim = 2

$\mathbb{C}$ $\sigma(\phi) = \{i, -i\}$ Diagonaliza

dim = 2

*

lentes

diagonalizable

descompone completamente en $k[x]$ y $f_i = e_i$

$1, \ldots, t$ $(e_1 + \cdots + e_t = u)$

$-1)^n (x-\lambda_1)^{e_1} \ldots (x-\lambda_t)^{e_t} = (\lambda_1 - x)^{e_1} \ldots (\lambda_t - x)^{e_t}$

28/Nov.

$)$, $n = \dim_k V$, $\sigma(\phi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}$ $f_i = \dim_k V_{\phi, \lambda_i}$

tiplicidad de λ_i en P_ϕ.

descompone completamente en $k[x] \Longleftrightarrow P_\phi = (\lambda_1 - x)^{e_1} \ldots (\lambda_t - x)$:

$\Longleftrightarrow n = e_1 + \cdots + e_t$

$_1 + \cdots + f_t \leq e_1 + \cdots + e_t \leq n$

teorema *

$\ldots, t$ $B_i = \{u_{i_1}, \ldots, u_{i f_i}\}$ base de V_{ϕ, λ_c}

$B = B_1 \cup \ldots \cup B_t = B_i \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} B_t \Rightarrow \# B = \# B_1 + \cdots + \# B_t =$

$+ \cdots + f_t = e_1 + \cdots + e_t = n \Rightarrow B$ es L. independiente

unión disjuntas

demostración ii $\Longrightarrow$ i

de V $\Longrightarrow$ ϕ diagonaliza y

$$B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{f_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_t I_{f_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}^{f_i} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overbrace{\lambda_t \ddots \lambda_t}^{f_i} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} u_{ij} = v_1 + \dots + v_t$ donde $v_i = \sum_{j=1,\dots,f_i} a_{ij} u_{ij} \in V_{\phi,\lambda_i}$

$= \dots = v_t = 0 \Longrightarrow 0 = \sum_{j=1,\dots,f_i} a_{ij} u_{ij} \xrightarrow{B_i \text{ base}} a_{ij} = 0$ #

$u_1, \dots, u_n\}$ base de V formado por el vector propio $u_i \in V_{\phi,\lambda_i}$

$$\phi(B) = \begin{pmatrix} \lambda & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}^{a_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overbrace{\lambda_t \ddots \lambda_t}^{a_t} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$= |A - x I_n| = \begin{vmatrix} \overbrace{\lambda_1 - x \ddots \lambda_1 - x}^{a_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overbrace{\lambda_t - x \ddots \lambda_t - x}^{a_t} \end{vmatrix} =$$

$- x_1)^{a_1} \dots (\lambda_t - x_t)^{a_t} \Longrightarrow$

P_ϕ descompone completamente en $K[x]$

(Probarlos)

$a_i = e_i$

$V_{\phi,\lambda_i} = \dim_K \ker(\phi - \lambda_i id_V) = n - \dim_K Im(\phi - \lambda_i id_V)$

$$n - rg(A - \lambda_i I_n) = n - rg\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 - \lambda_i \ddots \lambda_1 - \lambda_i}^{a_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overbrace{\lambda_t - \lambda_i \ddots \lambda_t - \lambda_i}^{a_t} \end{pmatrix}$$

$- a_i) = a_i \Longrightarrow a_i = e_i$

1/Dic

> ϕ no es diagonalizable

e_2 , $e'_2 = e_1 - e_3$

$e'_2, e'_3\}$ base de V

$$= \begin{pmatrix} a-1 & 0 & c_1 \\ 0 & a-1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} = A'$$

$\phi(e'_1) = (a-1)e'_1$

$\phi(e'_2) = (a-1)e'_2$

$\phi(e'_3) = c_1 e'_1 + c_2 e_2' + c_3 e'_3$

$c_i \in K$

$$= \begin{vmatrix} a-1-x & 0 & c_1 \\ 0 & a-1-x & c_2 \\ 0 & 0 & c_3-x \end{vmatrix} = (a-1-x)^2 (\underset{a-1}{\overset{}{\underset{\parallel}{c_3}}} - x)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & c_1 \\ 0 & a-1 & c_2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

ϕ es triangularizable (superior) si $\exists$ B base de V : $M_\phi(B)$ es

p) $a_{ij} = 0 \ \forall i<j$

es triangularizable superior $\Longleftrightarrow$ ϕ es triangularizable inferior

ración

$\{u_1, \dots, u_n\}$ triangular superior $\Longrightarrow M_\phi(\{u_n, \dots, u_1\})$ triangular inf

$) \longmapsto (a_{n+1-j}, u+1-i)$

n equivalentes :

triangularizable

descompone completamente en $k[x]$

ación

$\exists$ B base de V : $M_\phi(B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ O & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix} = A \in Mat_n(K)$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ O & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}-x \end{vmatrix} = (a_{11}-x) \cdots (a_{nn}-x) \quad a_{ii} \in K$$

1/Dic.

n Teorema

) ¿∃ B base de V : $M_\phi(B)$ triangular ?

$\overset{\shortparallel}{\{u_1,\dots,u_n\}}$

obre n

$P_\phi = \lambda_1 - x \in k[x]$, $M_\phi(\{u_1\}) = (a_{11}) \in Mat_1(k)$

Supongamos que la $\dim_k W = n-1$, $\varphi \in End_k W$, P_φ compone completamente en $k[x] \Longrightarrow \exists\ B_W$ base de W, (B_W) triangular superior

$-x)\dots(\lambda_n - x)$ $\lambda_i \in k$ $\lambda_i \in \sigma(\phi)$

$u_1 \in V_\phi$, λ_1 ,, $\phi(u_1) = \lambda u_1$

$W = V$, $B = \{u_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & \boxed{a_{22}} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\overset{\shortparallel}{C}$

$, \dots, v_n\rangle$ $\dim_k W = n-1$

$\rangle \oplus W = V$

$= \langle u_1\rangle + W$ $0 = a_1u_1 = a_2v_2 + \dots + a_nv_n$

$\} = \langle u_1\rangle \cap W$ $\underset{0}{\overset{\shortparallel}{a_1u_1}} - \underset{0}{\overset{\shortparallel}{a_2v_2}} - \dots - \underset{0}{\overset{\shortparallel}{a_nv_n}} = 0$

$= V \Longrightarrow \forall\ u \in V\ \exists!\ a_1u_1 \in \{u_1\}$ $v \in W$

$\longrightarrow W : M_\varphi(\{u_1,\dots,u_n\}) = C$

$_1 - x)\dots(\lambda_n - x) = P_A = \begin{vmatrix} \lambda_1 - x & a_{12}\dots \\ 0 & C - xI_n \end{vmatrix} = (x_1 - x)|C - xI_n =$

$(\lambda_1 - x)\,P_\varphi \Rightarrow P_\gamma = (\lambda_2 - x)\dots(\lambda_n - x)$

descompone completamente en $k[x]$

4/Dc

$)(K)\ (+,\cdot)\quad K[x] \longrightarrow Mat_n(K)$ Homo de anillos

$f \longmapsto f(A)$

$a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 \qquad a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 I_n$

$(A) = f(A) + g(A)$

$(A) = f(A)\, g(A)$

$f = \sum a_i x_i \quad g = \sum b_j x^j ,$

$fg = \sum a_k x^k \ , \ c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

$(A) = \sum a_i A^i \sum b_j A^j = \sum_k \sum_{i+j=k} a_i A^i b_i A^j =$

$= \sum_k \sum_{i+j=k} a_i b_j A^i A^j = \sum_k \sum_{i+j=k} a_i b_j A^{i+j}$

$\longrightarrow End_K(V)$

$(+,\circ)$ Homo de anillos

$\longrightarrow f(\phi) \qquad \phi\ End_K(V),\ dim_K V = n$

$a_m \phi^m + \dots + a_1 \phi + a_0 id_V$

$\phi^k = \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{\text{composición k-veces}}$

$V \quad M_\phi(B) = A \Rightarrow M_{\phi^2}(B) = A^2 \Rightarrow M_{\phi^i}(B) = A^i$

$M_{a_i \phi^i}(B) = a_i A^i$

$M_f(\phi)(B) = f(A)$

$= 0 \Longleftrightarrow M_{f(\phi)}(B) = 0 \Longleftrightarrow f(A) = 0$

4/Dic

Cayley - Hamilton) ★ Exam.

) = 0 (Polinomio característico de ϕ en ϕ se anula)

ción

rticular $P\phi$ se descompone completamente en $k[x]$

$$P_\phi = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n) \quad , \quad \lambda_i \in k$$

$$\shortparallel$$

$$g_i h_i = h_i g_i \quad \forall i \leq n$$

$$g_i = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_i)$$

$$h_i = (x-\lambda_{i+1})\cdots(x-\lambda_n)$$

$= \{u_1 \dots u_n\}$ base de V : $M\phi(B)$ es triangular

$$\phi(u_1) = \lambda_1 u_1$$

$$\phi(u_2) = a_{12}u_1 + \lambda_2$$

$$\phi(u_3) = a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + \lambda_3 u_3$$

$$\vdots$$

$$\phi(u_1) = v_{i-1} + \lambda_i u_i \quad , \quad v_{i-1} \in \langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle$$

$*]_i$ $\quad \forall i \leq n \quad \forall j \leq i \quad [g_i(\phi)](u_j) = 0$

$i = 1$

$$[g_i(\phi)](u_i) = [(x-\lambda_1)(\phi)](u_1) =$$

$$= (\phi - \lambda_1 id_V)(u_1) = \phi(u_1) - \lambda_1 u_1 = \lambda_1 u_1 - \lambda_1 u_1 = 0$$

$[*]_{i-1} \implies [*]_i$

$$j \leq i-1 \Rightarrow [g_i(\phi)](u_j) = \Big(\big((x-\lambda_i)g_{i-1}\big)(\phi)\Big)(u_j) =$$

$$[(\phi - \lambda_i id_V)\cdot(g_{i-1}(\phi))(u_j) = (\phi - \lambda_i id_V)\big(\underbrace{g_{i-1}(\phi)(u_j)}_{0}\big) = 0$$

$$)(u_i) = [(g_{i-1}\cdot(x-\lambda_i)(\phi)](u_i) = (g_{i-1}(\phi)\cdot(\phi - \lambda_i id_V))(u_i)$$

$$\phi)\big(\phi(v_{i-1}) + \lambda_i u_1 - \lambda_i u_i\big) = g_{i-1}(\phi)\big(\underset{\in \langle u_1 \dots u_{i-1} \rangle}{\phi(v_{i-1})}\big)$$

$$\langle \phi(u_1), \dots, \phi(u_{i-1}) \rangle = \langle u_1 \dots u_i \dots u_{i-1} \rangle = \langle u_1 \dots u_{i-1} \rangle$$

$ui) = [h_i(\phi) \circ g_i(\phi)](u_i) = h_i(\phi)\Big(g_i(\phi)(u_i) \Big) =$

$(\phi)(0) = 0$

$)$.

ial $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$, $P_\phi \in k[x]$

$\supset K$, F cuerpo conmutativo , K subgrupo de F donde

descompone completamente en $F[x]$

$A = M_\phi(B)$;, $P_\phi = P_A$,, $P_\phi(\phi) = 0 \Longleftrightarrow P_A(A) = 0$

$= P_\phi(A) = M_{P_\phi}(\phi)(B)$

$A \in \mathrm{Mat}_n(K) \subseteq \mathrm{Mat}_n(F)$

$\psi \in \mathrm{End}_F F^n$, $\mathrm{Mat}_\psi(Bc) = A$

$P_A(A) = 0 \Longleftrightarrow P_\psi(\psi) = 0$ (cierto por el caso particular)

$1)$
$1)$

$$P_A = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

$A^2 - 2A + 2I_2 = 0$.

0

grado P_A = grado $P_\phi = n$

0

olinomio mínimo de ϕ

$\in k[x]$ mónico , $q_\phi \neq 0$

$(\phi) = 0$

, grado mínimo

4/Dic

$q_\phi \mid P_\phi$

$q_\phi \cdot h \quad , \quad h \in k[x]$

tración

$q_\phi \cdot h + r \quad , \quad h, r \in k[x]$

$(\phi) = q_\phi(\phi) \cdot h(\phi) + r(\phi)$ grado $r(x) <$ grado $q_x(x)$

$\overset{\shortparallel}{0} \quad \Longrightarrow r(\phi) = 0$

$x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}[x]$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R})$

$_A = 1 \, , \quad P_A \quad 1(A) = I_2 \neq 0$

$I_2 \quad p_1 = (1-x)^2 \quad \underbrace{q_A = 1 - x}_{\text{Pol. mínimo}} \, , P_A$

$I_2 - A = 0.$

5/Dic.

$x]$, $\phi \in End_k(V) \quad n = dim_k V$, se verifica

$\mid P_\phi$

$\mid f \iff f(\phi) = 0$

$(\lambda) = 0 \iff P_\phi(\lambda) = 0$

nes

tración anterior)

$f = g \cdot q_\phi \Longrightarrow f(\phi) = g(\phi) \circ q_\phi(\phi) = g(\phi) \circ 0 = 0$

$f = g \cdot q_\phi + r \Longrightarrow 0 = f(\phi) = \underbrace{g(\phi) \circ q_\phi(\phi)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + r(\phi) = r(\phi) \Longrightarrow$

$r = 0 \Longrightarrow f = g \cdot q_\phi \Longrightarrow q_\phi \mid f$ *

$g, r \in k[x], \quad r = 0$ o grado $r <$ grado q_ϕ

$) = 0 \Longrightarrow P_\phi(\lambda) = 0$

$) = 0 \ , \ q_\phi(\lambda) \neq 0 \qquad x - \lambda \nmid q_\phi \Longrightarrow$

cd $(x-d, q_\phi) = 1 = g(x)(x-\lambda) + h(x)q_\phi(x) \Longrightarrow$

$k[x] \Longrightarrow id_V = g(\phi) \circ (\phi - \lambda id_V) + h(\phi) \circ q_\phi(\phi) =$

$= g(\phi) \circ (\phi - \lambda id_V)$

$, \lambda \neq \{0\}$

$\Rightarrow u = g(\phi)\left[(\phi - \lambda id_V)(u)\right] = g(\phi)(\lambda u - \lambda u) = g(\phi)(0) = $

e descomposición)

$\dots f_t , \quad f_i \in k[x] \ , \ mcd(f_1, \dots f_t) = 1$. Si $f(\phi) = 0$, entre

(ϕ) es un subespacio de V ϕ-invariante

$f_i(\phi)) \subseteq \ker f_i(\phi)) \quad \forall i = 1, \dots, t$

$\ker f_1(\phi) \oplus \dots \oplus \ker f_t(\phi)$

$u \in V \ \exists! \ u_i \in \ker f_i(\phi) : u = u_1 + \dots + u_t)$

es base de $\ker f_i(\phi)$, entonces

$B_1 \cup \dots \cup B_t$ es base de V y se tiene

$\phi(B) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_t} \end{pmatrix}$ diagonalizado por cajas donde

$A_i = M\phi|_{\ker f_i(\phi)}(B)$

$A \in Mat_n(k) \qquad n = \dim_k V$

$A_i \in Mat_{n_i}(k) \quad n_i = \dim_k \ker f_i(\phi)$

$u_1 + \dots + u_t = u.$

5/Dic.

$\in \ker f_i(\phi) \Longrightarrow \underbrace{\phi(u) \in \ker f_i(\phi)}$

$(\phi)(u)=0 \qquad 0 \overset{?}{=} f_i(\phi)(\phi(u)) = (f_i(\phi)\circ\phi)(u) =$

$= [(f_i(x)\cdot x)(\phi)](u) =$

$x\, f_i(x))(\phi)](u) = \phi(f_i(\phi)(u)) = \phi(0) = 0$

$\#$

$\cdots f_t = f_i\hat{f_i} = \hat{f_i} f_i \qquad \text{mcd}(\hat{f_1},\dots,\hat{f_t}) = 1 =$

P_2

$g_1 + \cdots + \hat{f_t} g_t \Longrightarrow id_V = \hat{f_1}(\phi)\circ g_1(\phi) + \dots + f_t(\phi)\circ g_t(\phi)$

$u \in V, \quad u = \underbrace{\hat{f_1}(\phi)\big(g_1(\phi)(u)\big)}_{u_1} + \dots + \underbrace{\hat{f_t}(\phi)\big(g_t(\phi)(u)\big)}_{u_t}$

$\in \ker f_i(\phi)$?

$\big(\hat{f_i}(\phi)\big(g_i(\phi)(u)\big)\big) = \big(\big(f_i(\phi)\circ f_i(\phi)\big)\circ g_i(\phi)\big](u) =$

$\circ\, g_i(\phi)\big)(u) = 0(u) = 0 \qquad \begin{array}{c} \| \\ f(\phi) \\ \| \\ 0. \end{array}$

$_t = f_i\hat{f_i} = \hat{f_i} f_i \qquad \text{mcd}(\hat{f_1},\dots,\hat{f_t}) = 1 = \hat{f_1} g_1 + \dots + f_t g_t$

$u_1 + \dots + u_t = v_1 + \dots + v_t \Longrightarrow u_i = v_i \qquad u_i, v_i \in \ker f_i(\phi)$

$\phi)(u_1 + \dots + u_t) = \hat{f_t}(\phi)(u_1) + \dots + \hat{f_t}(\phi)(u_{t-1}) + \hat{f_t}(\phi)(u_t)$

$= f_1 \cdots f_{t-1} \qquad \hat{f_t}(\phi) = f_1(\phi)\circ\dots\circ f_{t-1}(\phi) \Longrightarrow .$

$\hat{f_t}(\phi)(u_1) = \dots = \hat{f_t}(\phi)(u_{t-1}) = 0$

$\text{cd}(f_t, \underset{\underset{\text{todos} - f_t}{\downarrow}}{\hat{f_t}}) = 1 = g f_t + h\hat{f_t} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow id_V = g(\phi)\circ f_t(\phi) + h(\phi)\circ\hat{f_t}(\phi)$

$= g(\phi)\big(f_t(\phi)(u_t)\big) + h(\phi)\big(\hat{f}_t(\phi)(u_t)\big) = h\phi\big(\hat{f}_t(\phi)(u$

$\overset{\text{''}}{0}$

$= g(\phi)\big(f_t(\phi)(\overset{\text{''}}{v_t})\big) + h(\phi)\big(\hat{f}_t(\phi)(v_t)\big) =$

$= h(\phi)\big(\hat{f}_t(\phi)(v_t)\big)$

#

e de $\ker f_i(\phi) \Rightarrow B_1 \cup \ldots \cup B_t$ es base de V

$u = u_1 + \ldots + u_t$

$$\big(\underset{u_1}{B_1} \cup \ldots \cup \underset{u_t}{B_t}\big) = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline \underset{\phi(u_1)}{} & \end{array}\right)$$

$u_{11}, \ldots, u_{1n}\}$

$_{11}) \in \ker f_1(\phi)$

$B_1 \subseteq \underline{\ker f_1(\phi)}$

ϕ - invariante.

9/ Dic.

Son equivalentes:

diagonalizable

e descompone completamente en $k[x]$ y es separable.

ón.

P_ϕ se descompone completamente en $k[x] \Rightarrow P_\phi = (\lambda_1 - x)^{e_1} \ldots (\lambda_t - x)^{e_t}$

$| P_\phi \Rightarrow q_\phi = (\lambda_1 - x)^{a_1} \ldots (\lambda_t - x)^{a_t}$, $a_i \leq e_i$

$a_i \geq 1$, λ_i raiz de $P_\phi \Rightarrow \lambda_i$ raíz de $q_\phi \Rightarrow a_i \geq 1$

$(\lambda_1 - x) \ldots (\lambda_t - x)(\phi) = 0 \Rightarrow q_\phi \mid (\lambda_1 - x) \ldots (\lambda_t - x)$

$\Rightarrow \underset{\text{polinomio mínimo}}{q_\phi} = \underset{\text{mónico}}{\boxed{\pm}}(\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_t - x)$

9/Dic.

demostración

$\lambda_1 \dots \lambda_t \} \underset{\text{diagonal}}{\Longrightarrow} e_1 = f_1$, $\exists$ B base de V :

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & e_1 = f_1 \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_t & & e_t = f_t \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$, \dots, u e_1 , \dots \}$

$$- x) \dots (\lambda_t - x)](\phi)](u_i) = \quad 1 \leq i \leq e_1$$

$$- x) \dots (\lambda_t - x)((\lambda_1 - x)(\phi))](u_i) =$$

$$id_V - \phi) \circ \dots \circ (\lambda_t \, id_V - \phi) \circ (\lambda_i id_V - \phi)](u_i) =$$

$$[(\lambda_i \, id_V - \phi)(u_i)] = \varphi(0) = 0$$

$\lambda_1 - x) \dots (\lambda_t - x)$, $\lambda_i \neq \lambda_j \; \forall i,j \; \lambda_i \in k$

$g_\phi(\phi) = 0$, $mcd(\lambda_1 - x, \dots, \lambda_t - x) = 1$

$\ker(\lambda_1 id_V - \phi) \oplus \dots \oplus \ker(\lambda_t id_V - \phi)$

$$(B_1 \cup \dots \cup B_t) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_t} \end{pmatrix}$$

es base de
$\ker(\lambda_t \, id - \phi)$

$e_i = f_i$

$$B_i(\phi|_{\ker(\lambda id_V - \phi)}) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_{e_i}$$

$$u \in B_i \Longrightarrow (\lambda \underset{0}{\underset{\shortparallel}{id_V}} - \phi)(u) = 0 \qquad \lambda_i u = \phi(u)$$

\#

jercicio 2 pag 178 (libro Castellet)

$_2(\mathbb{R}) \qquad A^2 = 0$

$- t(A)\, x + \det(A)\, I_2$

$(A) = A^2 - t(A)\, A + \det(A)\, I_2 = 0$

$- t(A)\, A = 0 \Longrightarrow \underbrace{t(A)}_{\in \mathbb{R}} A = 0 \Longrightarrow t(t(A)A) = t(0) = 0$

$\shortparallel$

$t(A)\, t(A) = t(A)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t(A) = 0$

$- x^2$

$= x^2 \Rightarrow q_A = \begin{cases} x & ① \\ x^2 & ② \end{cases}$

A diagonalitzable $\Rightarrow$ A semejante a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$0 = q_A(A) = A$

A nodiagonalitzable $\quad \sigma(\phi) = \{\underset{\lambda_1}{\overset{}{0}}\} \quad e_1 = 2 \quad f_1 = 1$

$_{\phi}(\underset{\{u_1, u_2\}}{B}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow A = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} P$

vector propio

9/Dic

pag 178 (Castellet)

$_4(\mathbb{R})$ $\qquad \phi : \mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^4$

$A + 2I_4 = 0 \qquad H_\phi(B_c) = A$

$3x + 2)(\phi) = 0$

$\overset{\shortparallel}{x-2)}(x-1) \qquad \phi$ siempre va a ser diagonalizable

$$= \begin{cases} x-1 \Rightarrow P\phi = (x-1)^4 \\ x-2 \Rightarrow P\phi = (x-2)^4 \\ (x-2)(x-1) \Rightarrow P\phi = \begin{cases} (x-2)(x-1)^3 & ① \\ (x-2)^2(x-1)^2 & ② \\ (x-2)^3(x-1) & ③ \end{cases} \end{cases}$$

$$_A(A) = \begin{cases} A - I_4 \\ A - 2I_4 \end{cases}$$

$$① \Rightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} P$$

$$② \Rightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} P$$

$$③ \Rightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} P$$

I

$k^3 \qquad n = 3 \qquad P\phi = (x+2)(x^2+2)$

$$\Longrightarrow P\phi = (x+2)(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2}) \underset{\nearrow}{\Rightarrow} H_\phi(B) = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & \sqrt{-2} & \\ 0 & & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

diagonaliza

$P\phi = (x+2)(x^2+2) \qquad mcd(x+2, x^2+2) = 1 \underset{\nearrow}{\Longrightarrow}$

Tma. Estructura

$$\ker(\phi + 2id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(\phi^2 + 2id_{\mathbb{R}^3})$$

$$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$$

$V_{\phi,-2} \qquad\qquad V_2 = \{u_2, u_3\}$

$B_1 = \{u_1\}$

$$(\{u_1, u_2, u_3\}) = \left(\begin{array}{c|c} A_{1\times1} & 0 \\ \hline 0 & \boxed{A_{2\times2}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & + & + \\ 0 & + & + \end{array}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\nexists\ u_2 \in \ker(\phi^2 + 2id\ \mathbb{R}^2)$

$a u_2 + b\phi(u_2) = 0$

$\Downarrow$

$[(a + bx)(\phi)](u_2) = 0 \Rightarrow [(x^2+2)(\phi)](u_2) = 0$

$^2(u_2) = -2u_2$

$$x^2+2 = q(x)(a+bx)+c$$

$$(\underbrace{q(\phi)(a\,id_{\mathbb{R}^3}+b\phi)}_{\overset{\shortparallel}{0}}+C\,id_{\mathbb{R}^3})(u_2) = Cu_2 \underset{\substack{\uparrow \\ u_2\neq 0}}{\Longrightarrow} C=0$$

$= 2 \Longrightarrow P_\phi = x^3 \Rightarrow q_x = \begin{cases} x \\ x^2 \\ x^3 \end{cases}$

$= 3$.

Ejemplo . I.

11/Dic.

$(x+2)(x^2+2)$ $\phi \in \mathrm{End}_k\, k^3$

$\Rightarrow -P_\phi = (x+2)(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2}) \Rightarrow \sigma(\phi) = \{-2, -\sqrt{-2}, \sqrt{-2}\}$

$\phi(B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-2} \end{pmatrix}$, B base de k^3 diagonalizable.

$P_\phi = (x+2)(x^2+2)$, x^2+2 irreducible en $\mathbb{R}[x] \Rightarrow$

$(B) = \left(\begin{array}{c|cc} -2 & & \\ \hline & 0 & -2 \\ & 1 & 0 \end{array}\right)$, B base de $\mathbb{R}^3$, $\sigma(\phi) = \{-2\}$

No diagonaliza

No triangulariza.

$= 2 \Rightarrow -P_\phi = x^3$, $\sigma(\phi) = \{0\} \Rightarrow q_\phi = \begin{cases} x & ① \\ x^2 & ② \\ x^3 & ③ \end{cases}$

$= q_\phi(\phi) = \phi \Rightarrow M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ $\forall$ B base de k^3

$= 0$, $\phi = 0 \Rightarrow \{0\} \subsetneq \ker_2 \phi \subsetneq \ker_3 \phi^2 = k^3$

table (P_ϕ dc.) $\dim \ker \phi = 3 - \dim \mathrm{Im}\phi \geq 3 - \dim \ker \phi$

(q_ϕ no separ)

$$\mathrm{Im}\,\phi \subseteq \ker \phi$$

$$\phi\,\phi(n) = 0$$

$$0 = u_i \in k^3,\ u_i \notin \ker \phi \Rightarrow \phi(u_i) \neq 0$$

ejemplo

$(u_1) \in \operatorname{Ker} \phi$

$_2 \}$ l.i.

$a_2 = 0$

$a_2 \phi(u_1)$ $\Longrightarrow a_1 \phi(u_1) = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \quad \phi(u_1) = 0$

$= 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ 0 = u_2 = \phi(u_1) \end{cases}$

$_3 \}$ l.i $\qquad u_3 \in \operatorname{Ker} \phi$

$, u_3 \}$ Li $\qquad a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$

$$\Downarrow u_2, u_3 \text{ l.i}$$

$$a_2 = a_3 = 0$$

$u_2 + a_3 u_3 = 0$

$_2 \phi(u_1) + \phi_3 u_3 = 0$

$\phi(u_1) = 0 \Longrightarrow a_1 = 0$

caja Jordan.

$$M_\phi(\{u_1, u_2, u_3\}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\uparrow V_3$$

$\phi^3 = 0 \ , \ \phi^2 \neq 0 \Longrightarrow 0 \subseteq \underset{1}{\ker \phi} \subseteq \underset{2}{\ker \phi^2} \subseteq \underset{3}{\ker \phi^3} = k^3 \Longrightarrow$

$\{u_1, u_2, u_3\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

agonalizable (q_ϕ no separable)

larizable (P_ϕ se d.c en $k[x]$)

$u_1, \underset{u_2}{\overset{\shortparallel}{\phi(u_1)}}, \underset{u_3}{\overset{\shortparallel}{\phi^2(u_1)}} \} \qquad \phi^2(u_1) \neq 0$

$_2 \phi(u_1) + a_3 \phi^2(u_1) = 0 \qquad \phi(u_1) = u_2$

$(u_1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ \phi^2(u_1) = 0 \end{cases} \qquad \phi(u_2) = u_3$

$$\phi(u_3) = \phi(\phi^2(u_1)) = \phi^3(u_1) = 0$$

$\Longrightarrow - P_\phi = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)^2$

$$\sigma(\phi) = \{ \underset{\lambda_1}{\overset{e_1 = 2}{1}}, \underset{\lambda_2}{\overset{e_2 = 1}{-1}} \} \Longrightarrow q_\phi = \begin{cases} (x-1)(x+1) \Rightarrow \phi \text{ diagonalizable} \Rightarrow \exists \underset{\text{base } k^3}{B} \\ (x-1)^2(x+1) \ * \end{cases}$$

diagonalizable (q_ϕ no separ) triangularizable (P_ϕ d.c $k[x]$)

$1)^2 \quad f_2 = x+1 \implies k^3 = \ker(\phi - id_{k^3})^2 \oplus \ker(\phi + id_{k^3})$

$\downarrow$ 2

$\downarrow$ $V_{\phi,1} = 1$ dim 1

: base $\ker(\phi - id_{k^3})^2$

" $\ker(\phi - id_{k^3})$

$u_2, u_3\}$ base k^3

$$(B) = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\ker(\phi - id_{k^3})$ $(\{u_1, u_2\})$

Ejemplo prox día del Tma que va a dar.

12/Dic

$(x-\lambda_1)^{e_1} \dots (x-\lambda_t)^{e_t} \iff \phi$ diagonalizable

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\} \quad u = e_1 + \dots + e_t$

$)^{a_1} \dots (x-\lambda_t)^{a_t} \quad 1 \leq a_i \leq e_i \quad \forall\, i = 1, \dots, t$

q_ϕ Tma Estructura

$= (x-\lambda_i)^{a_i}$

$$V = \ker(\phi - \lambda_1 id_V)^{a_i} \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda t\, id_V)^{a_t}$$

$= f_1 \dots f_t$

$$V = N_i \oplus \dots \oplus N_t \quad N_i \text{ es } \phi\text{-invariante}$$

$d(f_1, \dots, f_t) = 1$

$(\phi - \lambda_i\, id_V)^{a_i} = N_{\phi, \lambda_i} \supseteq V_{\phi, \lambda_i}$

$$\text{e de } N_i : M_\phi(B_1 \cup \dots \cup B_t) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_t} \end{pmatrix}$$

$N_i(B_i)$

$. \; id_V + \phi - \lambda_i\, id_V$

$\lambda_i\, id_{N_i} + (\phi - \lambda_i\, id_V)|_{N_i} = \lambda_i\, id_{N_i} + \eta_i$

$= (\phi - \lambda_i\, id_V)|_{N_i} : N_i \longrightarrow N_i$ endomorfismo

12/Dic

eorema

$(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i}|_{N_i} = 0$ endomorfismo nulpotente ?

$$I_{N_i}(B_i) = M_{\lambda_i \, id_{N_i}}(B_i) + M_{\eta_i}(B_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} + M_{\eta_i}(B_i)$$

Examen parte teoría. ★

$(x-\lambda_i)^{a_i} \quad \left(q_\phi = \prod_{i=1}^{t} q_{\phi_i} \right)$

$N_i = \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i}$

$\eta_i = (\phi - \lambda_i \, id_V)|_{N_i}$

$-1)^{e_i} \, (x-\lambda_i)^{e_i}$

$\phi_i = \phi|_{N_i} = \lambda_i \, id_{N_i} + \eta_i$

$n = e_1 + \dots + e_t$

$N_i = e_i$

$\ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i + j} \quad \forall j \geq 0$

$$\overset{\text{dim}:\ f_i \uparrow}{\ker(\phi - \lambda_i \, id_V)' = V_{\phi, \lambda_i}} \subseteq \overset{e_i \uparrow}{N_{\phi, \lambda_i}} = \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i}$$

$$N_{\phi,\lambda_i} = N_i$$

$$\ker(\phi - \lambda_i \, id) \subsetneq \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i} =$$

$$= \ker(\phi - \lambda \, id_V)^{a_i + 1}$$

$)^{a_i}(\phi_i) = (\phi_i - \lambda_i \, id_{V_i})^{a_i} = (\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i}|_{N_i} = 0$

$(x-\lambda_i)^{a_i - 1}(\phi_i) \neq 0$

Supongamos que $(x-\lambda_i)^{a_i - 1}(\phi_i) = 0 \Longrightarrow$

$_i \subset \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i - 1} \Longrightarrow$

$$)^{a_1} \dots \underset{\underset{\frac{q_\phi(x)}{x-\lambda_i}}{\|}}{(x-\lambda_{i-1})^{a_{i-1}}} (x-\lambda_i)^{a_i} (x-\lambda_{i+1})^{a_{i+1}} \dots (x-\lambda_t)^{a_t} \Big] (\phi) = 0$$

ntradicción

$B_1 \cup \dots \cup B_t$, B_j base $N_j \Longrightarrow [h(\phi)](u_j) = 0 \quad \forall u_j \in B_j$

$$B_1 \cup \ldots \cup B_t) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{A_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{M\phi_1(B_1)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{M\phi_t(B_t)} \end{pmatrix}$$

$$A_i = M\phi|N_i(B_i)$$

$$A_i = M\phi_i(B_i)$$

$$_1 = |A - \lambda I n| = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 - x I m_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{A \cancel{t} - x I m_t} \end{pmatrix} =$$

$$(x-\lambda_1)^{e_1} \ldots (x-\lambda_t)^{e_t}$$

$$|A - x I m_1| \cdot \ldots \cdot |A_t - x I m_t|$$

$$\overset{\shortparallel}{(x-\lambda_i)^{a} \ldots (x-\lambda_i)^{b_i}}$$

$$(x-\lambda_i)^{b_i} \qquad a_i \leq b_i$$

Ahora demostraremos $b_i = e_i$

15/Dic.

②

$n = \dim_K V = e_1 + \ldots + e_t$

$x-\lambda_1)^{e_1} \ldots (x-\lambda_t)^{e_t} \qquad \lambda_i \in K$

$)^{a_1} \ldots (x-\lambda_t)^{a_t} \qquad 1 \leq a_i \leq e_i \ \forall i$

$\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i} \qquad \phi$ - invariant

$\oplus N_t$

$i \in End_K(N_i) \quad \phi_i = \lambda_i \, idv_{N_i} \quad (\phi_i - \overset{\overset{\eta_i}{\shortparallel}}{\lambda_i} \, id_{N_i})$

de N_i : $M_\phi(B_1 \cup \ldots \cup B_t) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_t} \end{pmatrix}$

$\overset{\shortparallel}{A_1 \oplus} \ldots \oplus A_t$

$B_i) = M_{\lambda_i idv_i}(B_i) + M_{\eta_i}(B_i) = \lambda_i I e_i + M_{\eta_i}(B_i)$

$x - \lambda_i)^{a_i}$

$-1)^{e_i} (x - \lambda_i)^{e_i}$

$v_i = e_i$

$\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i} = \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i + j} \qquad \forall j \geq 0$

$= \text{grado} \qquad p_{\phi_i} \overset{②}{=} e_i$

$)^{a_1+j} \ldots (x - \lambda_t)^{a_t+j}$

$(x) \left[(x-\lambda_1) \ldots (x-\lambda_t) \right]^j \qquad j \geq 0$

$x - \lambda_1)^{a_1+j}, \ldots, (x - \lambda_t)^{a_t+j}] = 1$

$\Downarrow$

$\boxed{(\phi - \lambda_1 \, id_V)^{a_1+j}} \oplus \ldots \oplus \boxed{\ker(\phi - \lambda_t \cdot id_V)^{a_t+j}}$

$\boxed{(\phi - \lambda_1 \, id_V)^{a_1}} \oplus \ldots \oplus \boxed{\ker(\phi - \lambda_t \cdot id_V)^{a_t}}$

$d_K(N_i)$

$\Longrightarrow \forall \underset{\ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i}}{\overset{n \in N_i}{\|}} \qquad \eta_i^{a_i}(v) = 0$

$i - \lambda_i \, id_{N_i})^{a_i}(v)$

$|_{N_i} - \lambda_i \, id_{N_i})^{a_i}(v)$

$\phi - \lambda id_V)|_{N_i}]^{a_i}(v)$

· nilpotentes

ón, supongamos que:

$= e$, $\eta \in \mathrm{End}_K(N)$ es nilpontente de indice a sí:

$= 0$

$^{-1} \neq 0$

$= x^a$

$= x^e$

$) = \{0\}$ $\boxed{\lambda_1 = 0}$ $e_1 = e_1$ $1 \leq f_1 < e$

$a \leq e$

Ej

$\mathcal{B}$ base d N

$q_\eta = x \Rightarrow \eta = 0 \Rightarrow M_\eta(b) = 0$ I_e

$N_K = \ker \eta^k \quad k \geq 0$

$N_K < N$ (subespacio) $N_0 = \ker \eta^0 = \ker id_N = \{0\}$

$N_1 = \ker \eta \supsetneq N_0$ (Si $N_1 = N_0$, entonces $\ker \eta = \{0\} \Rightarrow \eta$ inyec

biyectiva $\Rightarrow \eta^a \neq 0$)

$$\eta^a = 0 \Rightarrow \underset{\underset{\eta^{a-1}}{\shortparallel}}{\eta^{-1}} \cdot \eta^a = 0$$

$_K \subsetneq N_{K+1} \quad K+1 \leq a$

$_K \subseteq N_{K+1} \left[\eta^k(U) = 0 \Rightarrow \eta^{k+1}(U) = \eta(\eta^k(u)) = \eta(0) = 1\right]$

$_{K+1} \Rightarrow U \in N_K$

$a = N_{a-(K+1)+K+1} \Rightarrow \eta^{K+1}\left(\eta^{a-(K+1)}(u)\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta^{a-(K+1)}(U) \in N_{K+1} \subseteq N_K$

15/Dic

$)(u))=0 \implies \eta^{a-1}(u)=0 \implies U \in N_{a-1}$

, subespacios de N

$\subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_{a-1} \subsetneq N_a = N$

$$\subsetneq \underset{\substack{\downarrow \\ 1=(\dim)}}{N_1} \subsetneq \dots \subsetneq \underset{\substack{\downarrow \\ (e-1)=\dim}}{N_{e-1}} \subsetneq \underset{\substack{\downarrow \\ e(\dim)}}{N_e} = N$$

n)

$= K$

$\underset{\overset{\shortparallel}{N}}{\in N_e}\ , \quad U \notin N_{e-1}$

^{2}

$(u), \dots, \overset{u_e}{\overset{\shortparallel}{\eta^{e-1}(u)}}\}$ base de N

$(u)=0 \xrightarrow{e-1} \lambda_0 \cdot \eta^{e-1}(u) + \lambda_1 \overset{=0}{\boxed{\eta^e}}(u) + \dots = \lambda_0 \eta^{e-1}(u) \Rightarrow$

0 ó $\eta^{e-1}(u)=0 \implies \lambda_0 = 0$

$$(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{J_{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{autovalor}}}{0},e}}$$

Base etacíclica, η-cíclica

Matriz Jordan

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & & 0 \\ & \boxed{0} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{0,1} & & \\ \hline & J_{0,1} & \\ \hline & & J_{0,1} \end{array}\right)$$

$J_{0,1} \oplus J_{0,1}$ ← matriz nula

48

$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\Bigg)$

$J_{0,1} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad a = 2$

16 / Dic

$(N) \quad \eta^a = 0 \,, \quad \eta^{a-1} \neq 0$

$_K N \qquad 1 \leq a \leq e$

$\boxed{r\ \eta^k}$

$0\} \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_{a-1} = N_a = N$

Notación

N_K

e_{K-1}

$< \cdots < e_{a-1} < e_a = e$

$\leq d_{a-1} \leq \cdots \leq d_1 = e_1$

$m_K N_1 < \cdots < \dim_K N_{a-1} < \dim_K N_a = \dim_K N$

$= e_a - e_{a-1}$

$= e_1 - \boxed{e_0} \longrightarrow e_0 = \dim_K N_0 = \dim_K \ \mathrm{Ker}\ \eta^0 = \dim_K(\mathrm{Ker}\ id_N) =$

$= \dim_K \{0\} = 0$

$= e_1 - 0 = e_1$

$\leq d_{K-1} \qquad 2 \leq k \leq a$

$- e_{K-1} \leq e_{K-1} - e_{K-2}$

16/Dic

demostración ii)

$\dim_K N_{K-1} \leq \dim_K N_{K-1} - \dim_K N_{K-2}$

$_K N_K / N_{K-1} \leq \dim_K N_{K-1} / N_{K-2}$

$\xrightarrow{\Phi} N_{K-1}/N_{K-2}$ Φ lineal e inyectiva

$\longmapsto \widetilde{\eta(u_K)}$

$) = \phi(\overline{u_K + v_K}) = \widetilde{\eta(u_K + v_K)} = \widetilde{\eta(u_K) + \eta(v_K)} =$

$) + \eta(\widetilde{v_K}) = \phi(\bar{u}_K) + \phi(\bar{v}_K)$

$= a\phi(\bar{u}_K) \implies \phi$ K-lineal

$\phi \overset{?}{\implies} u_K \in N_{K-1}$

$\text{Ker}\,\phi \implies \underset{\widetilde{\eta(u_K)}}{\underset{\|}{\phi(\bar{u}_K)}} = \tilde{0} \implies \eta(u_K) \in N_{K-2} \implies$

$> \eta^{K-2}(\eta(u_K)) = 0 \implies \eta^{K-1}(u_K) = 0 \implies u_K \in N_{K-1}$

$\implies d_{K-1} - d_K \geq 0$

$d_a > 0$

secuencia

$d_K \geq 0$

$)$

previa

$\implies M_1 \oplus \ldots \oplus M_t$

$\|$

$\begin{matrix} \boxed{} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{M_t} \end{matrix} \Bigg)$

$\underbrace{M \oplus \ldots \oplus M}_{d} = M^{(d)}$ matriz diagonal cajas M

Jordan para endomorfismos nilpotentes)

base B de N tal que

$$= J_{0,a}^{(d_a)} \oplus J_{0,a-1}^{(d_{a-1}-d_a)} \oplus \dots \oplus J_{0,2}^{(d_2-d_3)} \oplus J_{0,1}^{(d_1-d_2)}$$

(Matriz Jordan)

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_{\lambda,i} = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow \eta = 0 \Rightarrow M_\eta(B) = 0 \\ a = 3 \Rightarrow M_\eta(B) = J_{0,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \boxed{a = 2} \Rightarrow \eta^2 = 0 \quad \eta \neq 1 \end{cases}$$

$, 2$

$< e_2 = e = 3$

$\leq d_1 = e_1$

$e_1 \Rightarrow e_2 - e_1 \leq e_1 \Rightarrow 3 = e_2 \leq 2e_1 \quad \boxed{e_1 = 2}$

$= e_1 = 2$

$= e_2 - e_1 = 3 - 2 = 1$

$$= \underbrace{J_{0,2}^{(1)}}_{\substack{\text{caja} \\ 2\times 2}} \oplus \underbrace{J_{0,1}^{(1)}}_{\substack{\text{caja} \\ 1\times 1}}$$

Teorema

16/Dc

$> e_{a-1}$

$= N_{a-1} \oplus \langle u_{a1}, \dots, u_{ad_a} \rangle$

$_{-1} = N_{a-2}$

$_{1}, \dots, u_{ad_a} \}$ Li $\Rightarrow \{ \eta^{i}(u_{aj}) : 0 \le i < a \, , 1 \le j \le d_a \}$ lineal. indep.

$\sum \lambda_{ij} \, \eta^{i}(u_{aj}) = 0 \xRightarrow[\eta^{a-1}]{} \sum \lambda_{0j} \, \eta^{a-1}(u_{aj}) = 0$

$^{a-1}\left(\sum \lambda_{0,j} \, u_{aj} \right) = 0$

$_{j} \in \underset{\substack{\parallel \\ \{0\}}}{N_{a-1} \cap \langle u_{a1}, \dots, u_{ad_a} \rangle} \Longrightarrow \lambda_{0j} = 0 \quad \forall j = a \dots d_a$

$N_{a-1} \oplus \langle u_{a1}, \dots, u_{ad_a} \rangle$

$= N_{a-2} \oplus \langle \eta(u_{a1}), \dots, \eta(u_{ad_a}) \rangle \oplus \langle u_{a-1}, \dots, u_{a-1, d_{a-1} - d_a} \rangle$

$= N_{a-3} \oplus \langle \eta^{2}(u_{a1}), \dots, \eta^{2}(u_{ad_a}) \rangle \oplus \langle \eta(u_{a-1,1}), \dots, \eta(u_{a-1, d_{a-1} - d}$

$\oplus \langle u_{a-2,1}, \dots (u_{a-2}, d_{a-2} - d_{a-1}) \rangle$

$N_1 = \underset{\substack{\parallel \\ \{0\}}}{N_0} \oplus \langle \dots \rangle \oplus \langle u_{11}, \dots, u_{1 d_1 \dots d_2} \rangle$

$, \eta(u_{a,1}) \dots \eta^{a-1}(u_{a,1}), u_{a,2} \, \eta(u_{a,2}) \dots \eta^{a-1}(u_{a,2}), \dots$

$(\eta_{a-1,1}), \dots, \eta^{a-2}(u_{a-1,1}) \dots \}$

\#

e_2

$N = N_2 = N_1 \oplus \langle u_{21} \rangle$

$\underset{\substack{| \\ \dim 2}}{N_1} = \underset{\substack{\parallel \\ \{0\}}}{N_0} \oplus \langle \eta(u_{21}) \rangle \oplus \langle u_{11} \rangle$

¿ era la base ?

$u_{2,1}\ ,\ \eta(u_{21})\ ,\ u_{11}\}$

$$) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = J_{0,2} \oplus J_{0,1}$$

$e_3 = 3$

$e_2 = 2$

$e_1 = 1$

$N_3 = N_2 \oplus \langle u_{31} \rangle$

$N_2 = N_1 \oplus \langle \eta(u_{31}) \rangle$

$N_1 = \underset{\{0\}}{\overset{}{N_0}} \oplus \langle \eta^2(u_{31}) \rangle$

$$q \cdot \}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2º Semestre

16/2/2015

S AFINES

o afín.

afín es una terna (A, V, φ) donde:

es un conjunto

un k-espacio vectorial de dimensión finita

$\times A \longrightarrow V$ es una aplicación tal que:

i) $\forall p \in A$ $\varphi_p ; A \longrightarrow V$ dada por $\varphi_p(q) = \varphi(p,q)$

es biyectiva

ii) $\forall p, q, r \in A \Longrightarrow \varphi(p,q) + \varphi(q,r) = \varphi(p,r)$ (Chasles)

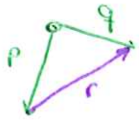
$\overrightarrow{pq} = u \in V$

$\dim_k V = 0 \Longrightarrow V = \{0\} \Longrightarrow A = \{p\}$

$A \times V \longrightarrow A$

$(p, u) \longmapsto p+u$

$p + u = p + \overrightarrow{pq} = q$ $q \in A$ único



$= \{(a_1, a_2) : a_i \in k\}$

$\longrightarrow k^2$

$(b_1, b_2) \Longrightarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

ue se cumplen las dos propiedades:

$\overrightarrow{a_2)(b_1, b_2)} + \overrightarrow{(b_1, b_2)(c_1, c_2)} = (b_1 - a_1 ; b_2 - a_2) + (c_1 - b_1, c_2 - b_2) =$

$+ c_1 - b_1 , b_2 - a_2 + c_2 - b_2) = (c_1 - a_1 , c_2 - a_2) = \overrightarrow{(a_1, a_2)(c_1, c_2)}$

#

$a_2) \in k^2$

$\longrightarrow k^2$

$) \longrightarrow \overrightarrow{(a_1, a_2)(b_1, b_2)}$ ¿Biyectiva?

$(b_1 - a_1 , b_2 - a_2)$

$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2) \Longrightarrow b_1 = c_1, \ b_2 = c_2$

$_2) = (c_1, c_2) \longrightarrow$ Inyectiva.

$, u_2) \in \quad k^2 = V$

$\overrightarrow{_1, a_2)(b_1, b_2)}$, para algún $(b_1, b_2 \in k^2)$

$(u_1, u_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ tienen que existir a y b

$b_2 = u_2 + a_2$.

$\times V \longrightarrow V$

$A \longrightarrow V$

$V \longrightarrow A$ (vector y punto)

$) \longmapsto p+u$

$= q \iff u = \overrightarrow{pq}$

Pr

$0 \iff p = q$

$-\overrightarrow{pq}$

$\overrightarrow{rs} \iff \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$

res.

$q = p + \overrightarrow{pq} = p + 0 = p + \overrightarrow{pp} = p$

$\overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp} = 0$

$\overrightarrow{qp} = \overrightarrow{pp} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$

$\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{rs} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{qs}$

16/2/2015

Sea R referencia afín :

; B } o (centro) punto del espacio afín (A)

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base del espacio vectorial

$\vec{op} = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$

$\dots, x_n)_R$

,

$= (0, \dots, 0)$; $Bc\}$; $Bc = \{e_1, \dots, e_n\}$

$, x_n) \in k^n$

$= (x_1 - 0, \dots, x_n - 0) = (x_1, \dots, x_n)_{Bc} \Longrightarrow p = (x_1, \dots, x_n)_{Rc}$

referencia afín canónica.

Sea R la referencia afín y S el sistema de referencia de A

$B\} = \{o \, ; \{u_1, \dots, u_n\}\}$

$, B'\} = \{o' ; \{v_1, \dots, v_n\}\}$ Sistema de referencia de A

$\Rightarrow \} p = (x_1, \dots, x_n)_R \iff \vec{op} = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$

$p = (y_1, \dots, y_n)_S \iff \vec{o'p} = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$

$oo' = \{(b_1, \dots, b_n)_B \iff oo' = b_1u_1 + \dots + b_nu_n$

$+ \vec{o'p} \Longrightarrow x_1u_1 + \dots + x_nu_n = b_1u_1 + \dots + b_nu_n + y_1v_1 + \dots + y_nv_n \Rightarrow$

$+ b_nu_n + y_1(\underline{a_{11}}\, u_1 + \underset{\substack{\| \\ v_1}}{\dots} + \underline{a_{n1}}\, u_n) + \dots + y_n(\underline{a_{1n}}\, u_1 + \underset{\substack{\| \\ v_n}}{\dots} + \underline{a_{nn}} u_n)$

$_{1} y_1 + \dots + a_{1n} y_n$

$a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = M(B'B) =$$

= matriz de paso.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + M(B'B)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M(B',B) \\ b_n & \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M(B',B) \\ b_n & \end{array}\right) = M(S,R)$$

17/2/2015

^{3}, R_c, $R = \{p(1,0,1)$; $B = \{u_1=(1,1,1), u_2=(1,1,0), u_3=(1,0,$ $\}\}$

de paso R_c, R?

allar Matriz.

étodo

$$,R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & & \\ b_2 & M(B_c,B) & \\ b_3 & & \end{array}\right)$$

$_3)_R = O = (0,0,0)$ $\qquad$ O centro canónico $(0,0,0)$

p centro $R = (1,0,1)$

$-1, 0, -1)$

$$(B_c, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

$\qquad e_1 \qquad\qquad e_2 \qquad\qquad e_3$

$0) = e_1 = a_{11}(1,1,1) + a_{21}(1,1,0) + a_{31}(1,0,0)$

$\boxed{a_{11}=0}$ $\boxed{a_{21}=0}$ $\boxed{a_{31}=1}$

$0) = e_2 = a_{12}(1,1,1) + a_{22}(1,1,0) + a_{32}(1,0,0)$

$\boxed{a_{12}=0}$ $\boxed{a_{22}=1}$ $\boxed{a_{32}=-1}$

$1) = e_3 = a_{13}(1,1,1) + a_{23}(1,1,0) + a_{33}(1,0,0)$

$\boxed{a_{13}=1}$ $\boxed{a_{23}=-1}$ $\boxed{a_{33}=0}$

17/2/2015

$$B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b_3)\ R =$

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\Bigg) \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{PO} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

odo

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ \hline (B_c, B) \end{matrix}\Bigg)$$

M(R

$(b_1, b_2, b_3)_R$ mismo proceso

$$M(B_c, B) \cdot \vec{PO} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$) = M(B, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\Bigg| = -1 \qquad M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{Adj\,(M^t)}{\det M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

do

$$) = M(R, R_c)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ p & u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right)^{-1}$$

Operar sólo filas

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Adj(M^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$, W < V$

$w = \{p + u : u \in W\}$, siendo X una subvariedad afín

pasa por P y cuya dimensión es W

K^2 , $p = (1,2)$, $w : x - 3y = 0$ $\dim_K W = 1$ $W = \langle (3,1) \rangle$

$(1,2) + \lambda(3,1) : \lambda \in K\} = \{(1 + 3\lambda), (2 + \lambda) : \lambda \in K\}$

$x = 1 + 3\lambda$

$\lambda \in K$

$y = 2 + \lambda$

$\Leftrightarrow q = p + u \Leftrightarrow \overrightarrow{pq} = u \in W$

$\in p + w \Leftrightarrow \overrightarrow{pq} \in W \Leftrightarrow (x-1, y-2) \in W$

$-1) - 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 5 = 0$,,

$x = p + W \Longrightarrow x = q + W \quad \forall q \in X$

ón

$p + W \overset{?}{\Longrightarrow} r \in q + W$

$= p + \overrightarrow{pr} = p + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = q + \boxed{\overrightarrow{qr}} \in W$

$\overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pr} = \underbrace{-\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{pr}}$

Están en W porque q y r lo están.

$u = \overrightarrow{ps}$ único

$\vec{s} = s.$

ea $X \subset A$ (subconjunto de A) $\Rightarrow \vec{X} = \{ \overrightarrow{pq} : p, q \in X \}$

$p + W \Longrightarrow \begin{cases} \bar{X} = W \\ p \in X \ (p = p + 0 = p + \overrightarrow{pp}) \in W \end{cases}$

$, r \in X = p + W$, ¿$\overrightarrow{qr} \in W$?

$\left. \begin{array}{l} p+u \\ + v \end{array} \right\} \Longrightarrow \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pr} - \overrightarrow{pq} = v - u \in W$

$\in W$

$\in W \Rightarrow \exists! \ s \in A : u = \overrightarrow{ps} \Longrightarrow s = p + u \in p + W = X$

$u = \overrightarrow{ps} \ ; \ p, s \in X \Longrightarrow u \in \vec{X}$

$W := \dim_K W$

dades. (dim p.)

$n = 0 \Rightarrow$ puntos afines

$n = 1 \Rightarrow$ rectas afines

$n = 2 \Rightarrow$ planos afines

$*$ Dim $= n - 1 \Rightarrow$ hiperplanos afines

19/2/2015

ersección

$:' \subset A \quad , \quad x = p_0 + W = p + W \quad ; \quad x' = p'_0 + W' = p' + W'$

$x' = \emptyset$

$unto) \in x \cap x' \Rightarrow x \cap x' = p + W \cap W'$

$W = \vec{x} \quad , \quad W' = \vec{x'}$

ón ii)

$\cap x' \Rightarrow q = p + u = p + u' \Rightarrow \begin{cases} u = \overrightarrow{pq} \\ u' = \overrightarrow{pq} \end{cases} \Rightarrow u = u' \in W \cap W'$

$u \in W \; , \; u' \in W'$

$= p + u \in p + W \cap W'$

"

$W \cap W' \subseteq (p+W) \cap (p+W') = x \cap x'$

Fórmula Grassmann

$= \dim \overrightarrow{x \cap x'} = \dim W \cap W' = \dim W + \dim W' - \dim (W + W')$

$\boxed{x \cap x' \neq \emptyset}$

$+ \dim x' - \dim (W + W')$

las ecuaciones cartesianas

$+ \dots + a_{1n} x_n = b_1$

m - ecuaciones $\qquad (x_1 \dots x_n)_R = q \in x$

$x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$

$x_1 + \dots + a'_{1n} x_n = b'_1$

p - ecuaciones

$x_1 + \dots + a'_{pn} x_n = b'_n$

$\Rightarrow m + p$ linealmente independiente

19/2/2015

Soma

$v \subset A$

$W' \subset A$

$X + X' = P_0 + W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0'} \rangle$

' variedad de A

$' \subset X + X'$

stración

$X = P_0 + W \subseteq P_0 + W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0} \rangle = X + X'$

$X' = P_0' + W' = P_0 + \overrightarrow{P_0 P_0'} + W' = P_0 + W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0'} \rangle =$

$= X + X'$

$\subset Y$ variedad $\Rightarrow X + X' \subset Y$

ostración

$X + X' = P_0 + W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0'} \rangle \overset{?}{\subseteq} Y$

$P_0 \in X \subseteq Y \Longrightarrow P_0 \in Y$

$X \subset Y \Rightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}$

$X = P_0 + \bar{X} \qquad Y = P_0 + \bar{Y}$

$\forall\ u \in \bar{X} \qquad P_0 + u \in P_0 + \bar{Y}$,, $P_0 + u = P_0 + v$, $v \in \bar{Y}$

$q = P_0 + u \qquad u = \overrightarrow{P_0 q}$, $v = \overrightarrow{P_0 q} \qquad u = v$

$\subset Y \Rightarrow W \subseteq \bar{Y}$

$\subset Y \Rightarrow W' \subseteq \bar{Y}$

$\in X$, $P_0' \in \underset{\underset{Y}{\cap}}{X'} \Longrightarrow P_0, P_0' \in Y \Rightarrow \overrightarrow{P_0 P_0'} \in \vec{Y}$

$\cap$

Y

$W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0'} \rangle \subseteq Y$

$P_0 + W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0'} \rangle \subseteq P_0 + \bar{Y} = Y$

$$:) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ϕ es afín, $h_0(\overrightarrow{p_0p}) = \overrightarrow{\phi(p_0)\phi(p)}$ lineal,

$h_1(\overrightarrow{p_1p}) = \overrightarrow{\phi(p_1)\phi(p)}$ es lineal y $h_0 = h_1$

$$= \overrightarrow{\phi(p_1)\phi(p)} = \overrightarrow{\phi(p_1)\phi(p_0)} + \overrightarrow{\phi(p_0)\phi(p)} =$$

$$) \phi(p_1) + \overrightarrow{\phi(p_0)\phi(p)} = -h_0(\overrightarrow{p_0p_1}) + h_0(\overrightarrow{p_0p}) =$$

ho linealmente afín

$$) = h_1(u) \quad \forall u \in V \Longrightarrow h_0 = h_1$$

o es lineal h_1 es linealmente afín #

ón

$$= \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$$

$$\overrightarrow{\phi(p_0)\phi(q)} \Leftrightarrow \phi(q) = \phi(p_0) + \vec{\phi}(\overrightarrow{p_0q}) = \phi(p_0) + \vec{\phi}(u)$$

$q = p_0 + u$

$$) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$$

$$\Longrightarrow \phi(q) = \phi(p) + \vec{\phi}(u)$$

$\longrightarrow A'$ afín

, B} $\dim A = n$

o'; B'} $\dim A' = m$

$\dots, x_n)_R \in A$

$\Rightarrow$

$\phi(q) = (x'_1, \dots, x'_m)_{R'} \in A'$

$\phi(p_0) = (h_1, \dots, h_m)_{R'} \in A'$

$\phi(q) = \phi(p_0) + \vec{\phi}(\overrightarrow{p_0q})$

$$\underbrace{\phi(q) - \phi(p_0)}_{(x'_1 - h_1, \dots, x'_m - h_m)_{R'}} = \underbrace{\vec{\phi}}_{\text{ap. lineal}}(\overrightarrow{p_0q})$$

24/2/2015

C definición

acar la matriz de la aplicación

$, \dots, x_n)_B$

$B') \in Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$

$) = M_{\vec{\phi}}(B, B') \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + M_{\vec{\phi}}(B,B') \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M_{\vec{\phi}}(B,B') \\ b_m & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Mat_{(n+1)\times(m+1)}(K)$ (matriz de la aplicación afín)

$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M_{\vec{\phi}}(B,B') \\ b_m & \end{array}\right)$

e (caso 1)

$\to A' \quad P_0' \in A'$

$\forall p \in A$

$B\} \quad R' = \{P_0', B'\}$

$= P_0' = (0, \dots, 0)_R$

$M\phi(R, R') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & O \\ 0 & \end{array}\right)$

(caso II)

$A \qquad A = A' \qquad n = m$

$\Rightarrow R = R'$

$p \quad \forall p$

$\Longrightarrow M_{\vec{\phi}}(B, B) = I_n$

BY

$) = (h_1, \dots, h_n)$ $\quad R = (0, \dots, 0)_R$

$= I_{n+1}$

el vector u_0

Se $\longrightarrow A$, $u_0 \in V$

$p + u_0$

ver que es afín

$= \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = \overrightarrow{p+u_0\, q+u_0} = \overrightarrow{pq}$

lineal

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ b_n & & & \end{array}\right)$$

$n)_R = \phi(P_0)$

$\overrightarrow{P_0}) = (h_1, \dots, h_n)_B$

$\overrightarrow{\quad} u_0 = u_0$

licación afín $\phi: A \longrightarrow A$ son equivalentes

s traslación

id_V $\Leftrightarrow$ $\Rightarrow$? x ver.

si partimos de una ap afín $\Longrightarrow \phi$ es traslación cuya ap lineal

es Id_n

26/12/2015

el vector u_0

iones son aplicaciones afines $\phi: A \longrightarrow A$ cuya
lineal asociado es la identidad.

)

$\longrightarrow A, \; \bar{\phi} = id : V \longrightarrow V \Longrightarrow$ traslación

ación

$q \in A \Longrightarrow \underset{\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}}{\underset{\shortparallel}{\bar{\phi}(\overrightarrow{pq})}} = \overrightarrow{pq} \Longrightarrow \overrightarrow{p\phi(p)} = \underset{u}{\underset{\shortparallel}{\overrightarrow{q\phi(q)}}} \Longrightarrow$

ley paralelogramo

(vector cte)

$) = p + \overrightarrow{p\phi(p)} = p + u \Longrightarrow \phi$ es traslación de vector u.

slación

$$) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & I_n \\ b_n & \end{array}\right) \qquad (b_1, \dots, b_n)_R = u$$

B}

ación siempre es biyectiva $\Longrightarrow \phi = \tau_u \Longrightarrow \exists\, \phi^{-1} = \tau_{-u}$

ración

ición de una traslación de u y su inversa

$(\tau_{-u} \circ \tau_u)(p) = \tau_{-u}(p+u) = p+u+(-u) = p$ #

aslaciones

$(p) = (p+u)+v = p+(u+v) = \tau_{u+v}$

id_A

de traslaciones, $(\underset{T(A)}{\overset{\shortparallel}{\{\tau \mid \tau : A \longrightarrow A}}$ es traslación $, \circ)$ es un grupo

o

$T(A), \circ) \cong (V, +)$

$\tau_u \longmapsto u$

aplicación afín.

$A \longrightarrow A$, aplicación afín

$p \in A : \phi(p) = p\} \subseteq A$ (ptos fijos de la ap. afín)

que A_0 sea único , $A\phi = p + V_{\bar{\phi},1}$: $V_{\bar{\phi},1} = 0$.

$\neq \emptyset \Longrightarrow A\phi = p + V_{\bar{\phi},1}$, siendo $p \in A\phi$

$\bar{\phi},1$ es la dirección del punto = subespacio propio para el autovalor 1.

nostración $A\phi \neq \emptyset \Rightarrow \underbrace{A\phi = p + V_{\bar{\phi},1}}$

Supongamos qe $q = p + u$, $u \in V_{\bar{\phi},1} \Longrightarrow \phi(q) = \phi(p) + \bar{\phi}(u)$

$\overset{A\phi}{=} p + u = q \Longrightarrow q \in A\phi$ #

Supongamos $q \in A_0 \Rightarrow q = p + \overrightarrow{pq} \in p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle$,,

$\bar{\phi}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = \overrightarrow{pq} \Longrightarrow \overrightarrow{pq} \in V_{\bar{\phi},1}$ porque la imagen pq es la misma. #

$A \longrightarrow A$ afín , es homotecia (de razón $r \neq 0, 1$)

$\cdot \, id_V$

26/12/2015

· Matriz homotecia

$$) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & 0 & & r \end{array}\right)$$

Bf

matriz correspondiente

correspondiente, no cambia según las bases, ya que simplement

Id.

punto fijo - centro.

nto $(x_1, \ldots, x_n)_R \in A\phi$ (pto fijo) entonces

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & 0 & & r \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} b_1 + (r-1)x_1 = 0 \\ \vdots \\ b_n + (r-1)x_n = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{1-r}$$

$$\vdots$$

$$n = \frac{b_n}{1-r}$$

$\Longrightarrow \exists!\, c$ (existe ún único punto fijo $= c$)

$$c = \left(\frac{b_1}{1-r}, \ldots, \frac{b_n}{1-r}\right)_R \in A\phi$$

plicación biyectiva, $\phi(c) = c \Longrightarrow c$ es el centro homotecia

$= \{0\} \Longrightarrow$ congruente con todo

$$\Longrightarrow V_{\vec{\phi}, r} \underset{\boxed{r \neq 1}}{=} V$$

$$; Bf) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & r \end{array}\right)$$

fijo
ro

Porque $\overrightarrow{c\phi(c)}$ está en función de B $\Longrightarrow \overrightarrow{c\phi(c)} = \{0\}$

allar c de forma algebraica y no por coordenadas

, $c = p + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\phi(p)}$ p = pto cualquiera

$\phi(p) + \vec{\phi}\left(\frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\phi(p)}\right) =$

$p) + \frac{1}{1-r} \vec{\phi}\left(\overrightarrow{p\phi(p)}\right) = \phi(p) + \frac{r}{1-r} \overrightarrow{p\phi(p)} =$

$\overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{r}{1-r} \overrightarrow{p\phi(p)} = p + \left(1 + \frac{r}{1-r}\right) \overrightarrow{p\phi(p)} =$

$\frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\phi(p)} = c$ #

plicación es homotecia ∃! solución ⟹ biyectiva

otecia.

homotecia

de homotecia sigue siendo homotecia

posición de homotecias no es homotecia

→ A una aplicación afín, es una proyección si $\phi^2 = \phi$,

$\phi \circ \phi = \phi$.

la proyeccion como lineal y vectorial con base $V_{\bar{\phi},1}$

ón $\ker \phi = V_{\phi,0}$

$_{,1} \oplus \ker \phi$

$u_1 + u_2$

$\phi(u)$ |

oyección afín con base $\underbrace{Im\,\phi}_{\substack{\shortparallel \\ \text{variedad afín}}}$ y dirección $\underbrace{\ker \bar{\phi}}_{\text{subespacio vectorial.}}$

26/2/2015

$\phi \Longrightarrow \vec{\phi}^2 = \vec{\phi}$

stración

a|

$\vec{\phi}^2 = \vec{\phi} \circ \vec{\phi} \overset{?}{=} \overrightarrow{\phi \circ \phi} = \vec{\phi}^2 = \vec{\phi}$ #

b (sin usar igualdad) |

$p, q \in A, \vec{\phi}^2(\overrightarrow{pq}) = \vec{\phi}(\vec{\phi}(\overrightarrow{pq})) = \vec{\phi}(\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}) =$

$\overrightarrow{\phi(\phi(p))\phi(\phi(q))} = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = \vec{\phi}(\overrightarrow{pq})$ #

$\underset{\hookrightarrow \text{no vacío}}{\phi} \Longrightarrow A\phi = p + V\bar{\phi},1 \qquad p \in \operatorname{Im}\phi$

$(\phi \neq \operatorname{Im}\phi \subseteq A\phi \Longrightarrow A\phi = \operatorname{Im}\phi)$

stración

$q \in A_0 \Longrightarrow q = p + \overrightarrow{pq} \Longrightarrow \underset{q}{\underset{\parallel}{\phi(q)}} = \underset{p}{\underset{\parallel}{\phi(p)}} + \vec{\phi}(\overrightarrow{pq})$

$\Rightarrow \overrightarrow{pq} = \vec{\phi}(\overrightarrow{pq}) \Longrightarrow \overrightarrow{pq} \in V_{\phi,1} \Longrightarrow q \in p + V\bar{\phi},1$ #

ón afín con base $\operatorname{Im}\phi$ y dirección $\ker\bar{\phi} = V_{\bar{\phi},0}$ |

$q)\{ \overset{?}{=} \underbrace{\operatorname{Im}\phi \cap (q}_{\text{se cortan}} + \ker\bar{\phi})$

27/2/2015

stración

1. ¿$\phi(q) \in q + \ker\bar{\phi}$?

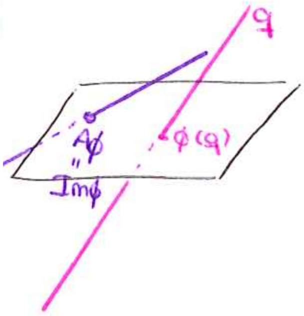
$(q) = q + \overrightarrow{q\phi(q)} \qquad$ ¿$\overrightarrow{q\phi(q)} \in \ker\vec{\phi}$?

$\phi(\overrightarrow{q\phi(q)}) = \overrightarrow{\phi(q)\phi^2(q)} = \overrightarrow{\phi(q)\phi(q)} = 0$

2. $\operatorname{Im}\phi \cap (q + \ker\bar{\phi})$

$\phi(q) + W, \; W = \operatorname{Im}\vec{\phi} \cap \ker\vec{\phi} = A\vec{\phi} \cap \ker\vec{\phi} = V\vec{\phi},1 \cap \ker\vec{\phi} = \{0\}$

$\operatorname{Im}\phi \cap (q + \ker\bar{\phi}) = \phi(q) + \{0\} = \{\phi(q)\}$ #



Las proyecciones no son biyectivas

Las proyecciones son idelpotentes ?

$= \dim A_\phi = \dim V_{\bar\phi,1} \leq \dim V$

latriz

$; B\}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_{\bar\phi}(B) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

$V = V_{\bar\Phi,1} \oplus V_{\bar\Phi,0} \Longleftrightarrow \bar\Phi^2 = \bar\Phi$

$B = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$

$\overrightarrow{\phi(p)} = \overrightarrow{pp} = 0$

$\Downarrow$

$= x(x-1)$

$x \Rightarrow \bar\Phi = 0$

$x-1 \Rightarrow \phi = id_V$

$x(x-1)$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 \ddots^{r} 1 & & \\ \vdots & & & \\ \cline{2-4} 0 & & & 0 \ddots^{n-r} 0 \end{array}\right)$$

$\longrightarrow A$ una aplicación afín én $\mathcal{X}(\kappa) \neq 2$, es

ra si y solo sí $\vec\Phi^2 = id_A$

$\to V$ simetría vectorial de base $V_{\vec\Phi,1}$ y dirección $V_{\bar\Phi,-1}$

$\oplus V_{\bar\Phi,-1}$

u_2 $\vec\Phi(u) = u_1 - u_2$

27/2/2015

:

$: id_V$

$\phi = id_A \Longrightarrow$ Simetrías son biyectivas.

$\phi_{\sim \text{vacío}}$ $\quad A_\phi = p + V_{\bar\phi,1}$ (ϕ es simetría con base $\operatorname{Im}\phi$ y dirección $V_{\bar\phi,0} = \ker\bar\phi$)

tración

$$p \in A \Longrightarrow \begin{cases} p \in A_\phi \\ p \notin A_\phi \Rightarrow p + \overset{\text{pto medio}}{\boxed{\frac{1}{2}}}\overrightarrow{p\,\phi(p)} \in A_\phi \end{cases}$$

$$(p + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{p\phi(p)}) = \phi(p) + \tfrac{1}{2}\phi(\overrightarrow{p\phi(p)}) =$$

$$\overrightarrow{p\phi(p)} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\phi(p)\phi^2(p)} = p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\phi(p)p} =$$

$$\overrightarrow{p\phi(p)} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{p\phi(p)} = p + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{p\phi(p)} \qquad \#$$

$$\} = A_\phi \cap (q + V_{\bar\phi,-1})$$

$$)\} = q + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}$$

stración

$$+ \tfrac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)} \in A_\phi$$

$$+ \tfrac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)} \in q + V_{\bar\phi,-1}$$

$$\tfrac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)} \in V_{\bar\phi,-1}$$

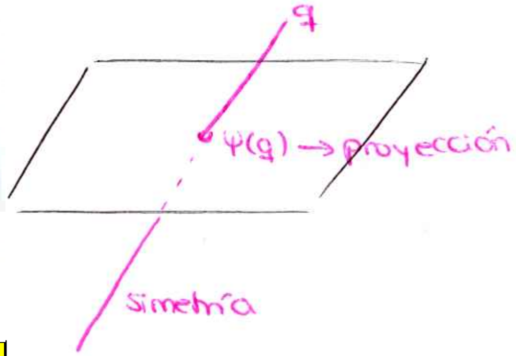
$$\phi(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}) = \tfrac{1}{2}\bar\phi(\overrightarrow{q\phi(q)}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\phi(q)\phi^2(q)} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\phi(q)q} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}$$

$$, V_{\vec{\phi},-1} = V_{\bar{\phi},1} \cap V_{\bar{\phi},-1} = \{0\}$$

$$\bar{\phi},-1) = q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)} + \{0\} = \{q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}\}$$

#



$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ q & \longmapsto & q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)} \end{array}$$

$$V_{\vec{\psi},0} = V_{\vec{\phi},-1}$$

$$\psi = m$$

riz .

$$, B\} \quad B \in A_\phi \quad B = \{\underbrace{u_1, \ldots, u_r}_{V_{\vec{\phi},1}}, \underbrace{u_{r+1}, \ldots, u_n}_{V_{\vec{\phi},-1}}\}$$

$$) = \text{matriz canónica} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 \; . \; . \; . & 0 \\ \hline 0 & I_r & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & -I_{n-r} \end{array}\right)$$

ón identidad es una simetría.

2/3/2015

fines

$\psi : A_1 \longrightarrow A_2$ aplicaciones afines tal que

$\psi(p)$ $p \in A_1$ y $\bar{\phi} = \bar{\psi}$. Entonces $\phi = \psi$.

ción

A_1 , $\phi(q) = \phi(p) + \bar{\phi}(u) = \psi(p) + \psi(u) = \psi(q)$

$u \in V_1$

2/3/2015

I

A_2 espacios afines y $p \in A_1$; $p' \in A_2$, $h: V_1 \longrightarrow V_2$ es

ión lineal. Existe una única $\phi: A_1 \longrightarrow A_2$ afín tal que

y $\vec{\phi} = h$.

ción

ad, se cumple por la propiedad

encia ¿$\phi: A_1 \longrightarrow A_2$? $q \in A_1 \Rightarrow q = p+u$,

$_1$

$) = p' + h(u) \in A_2$

afín? ✓ $\quad \phi(p) = p' + \underbrace{h(0)}_{\text{lineal}} = p' + 0 = p'$

$(p) = p'$?

$\vec{\phi} = h$? $\quad \vec{\phi}(u) = h(u) \quad \forall u \in V_1$

$u = \overrightarrow{pq} \quad q \in A_1$

$(u) = \vec{\phi}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = \overrightarrow{\underbrace{p'}_{\text{por lo anterior}}\phi(q)} \underset{\uparrow \text{definición}}{=} h(u)$ #

II

A_2 espacios afines, $p \in A_1$ $p' \in A_2$ y $\{u_1, \dots, u_n\}$ es

, y $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V_2 \Rightarrow$ Existe una única aplicación

$_1 \longrightarrow A_2$ tal que $\phi(p) = p'$ y $\vec{\phi}(u_i) = v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

IV

$_2$ espacios afines, $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ es la referencia afín de

$P_1', \dots, P_n'\} \subseteq A_2$. Existe una única aplicación afín

$\rightarrow A_2 : \phi(p_i) = p_i' \quad \forall i = 0, \dots, u$.

$P' = P_0$

$$\left\{\begin{array}{ll} u_1 = \overrightarrow{P_0P_1} & v_1 = \overrightarrow{P_0'P_1'} \\ \vdots & \vdots \\ u_n = \overrightarrow{P_0P_n} & v_n = \overrightarrow{P_0'P_n'} \end{array}\right.$$

Carácter biyectivo, inyectivo, suprayectivo que hay entre una afín y una lineal

$A_1 \longrightarrow A_2$ aplicación afín, $\vec{\phi} : V_1 \longrightarrow V_2$

inyectiva $\Longleftrightarrow$ $\vec{\phi}$ inyectiva

suprayectiva $\Longleftrightarrow$ $\vec{\phi}$ suprayectiva

biyectiva $\Longleftrightarrow$ $\vec{\phi}$ biyectiva

ión

$\Rightarrow$" $\quad 0 = \vec{\phi}(\vec{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} \Longrightarrow \phi(p) = \phi(q) \Rightarrow p = q$

$\underbrace{\vec{pq}}_{\in \phi} = 0$

$\underbrace{\vec{pq}}_{\in \phi} = 0 \Longrightarrow p = q \Longrightarrow \phi(p) = \phi(q) \Rightarrow \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} =$

$= \phi(\vec{pq}) = 0$ #

forma similar

la demostración i y ii.

finidad.

afín de A en A biyectiva

3/3/2015

Composición aplicaciones afines

φ aplicaciones afines tal que $A_1 \xrightarrow{\phi} A_2 \xrightarrow{\varphi} A_3$

$\to V_2 \xrightarrow{\vec{\varphi}} V_3$ espacios afines. Se verifica que:

ϕ es afín

$\overrightarrow{\ \ \phi} = \vec{\varphi} \circ \vec{\phi}$

$p, q \in A_1$, $\overrightarrow{\varphi \circ \phi}\,(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{(\varphi \circ \phi)(p)\,(\varphi \circ \phi)(q)} =$

$\overrightarrow{\phi(p))\,\varphi(\phi(q))} = \vec{\varphi}\,(\overrightarrow{\phi(p)\,\phi(q)}) = \vec{\varphi}\,(\vec{\phi}\,(\overrightarrow{pq})) =$

$\circ\, \vec{\phi})\,(\overrightarrow{pq})$ #

an ϕ, φ afines $\Longrightarrow \vec{\phi}, \vec{\varphi}$ son lineales $\Longrightarrow$

es lineal $\Longrightarrow \varphi \circ \phi$ es afín

na aplicación afín, biyectiva, $A_1 \xrightarrow{\phi} A_2$, $\Longrightarrow \phi^{-1}: A_2 \to A_1$

y $\overrightarrow{\phi^{-1}} = \vec{\phi}^{-1}$

afín biyectiva $\Longrightarrow \vec{\phi}$ biyectiva $\Longrightarrow \vec{\phi}^{-1}$ es lineal y

a.

$$= \vec{\phi}^{-1} \iff \begin{cases} \vec{\phi} \circ \overrightarrow{\phi^{-1}} = id_{V_2} \ast \\ \overrightarrow{\phi^{-1}} \circ \vec{\phi} = id_{V_1} \end{cases}$$

$p, q \in A_2$,, $(\vec{\phi} \circ \overrightarrow{\phi^{-1}})(\overrightarrow{pq}) = \vec{\phi}\,(\overrightarrow{\phi^{-1}(p)\,\phi^{-1}(q)}) =$

$\overrightarrow{(\phi^{-1}(p))\,\phi(\phi^{-1}(q))} = \overrightarrow{id_{A_2}(p)\,id_{A_2}(q)} = \overrightarrow{pq}$

afín y $\overrightarrow{\phi^{-1}} = \vec{\phi}^{-1}$ #

, A_2 espacios afines. $A_1 \simeq A_2$ (isomorfos) si $\exists$

$\longrightarrow A_2$ afín biyectiva.

, V_1, φ_1) , (A_2, V_2, φ_2) espacios afines , $\dim A_1 = n_1$

$= n_2$, son equivalentes

$= A_2$

V_2

u_2

ón

$_1 \longrightarrow A_2$ isomorfismo afín $\Rightarrow \vec{\phi} : V_1 \longrightarrow V_2$ lineal biyectiva

$\simeq V_2$

$h : V_1 \simeq V_2$ isomorfismo lineal $\Rightarrow \phi : A_1 \longrightarrow A_2$ isomorfismo

ϕ único tal que $\begin{cases} \phi(p_1) = q_1 & p \in A_1 , q \in A_2 \\ \vec{\phi} = h & \Rightarrow \phi \text{ afín biyectiva.} \end{cases}$

$A = n \Longrightarrow A \simeq k^n$

un espacio vectorial sobre $k \Longrightarrow GL(V) = \{ \phi : V \longrightarrow V \mid \phi$ es biyectiva $\}$

, $\circ$) grupo isomorfo $(\underset{4}{\simeq})$ $(Mat_n(k), \cdot) = GL_n(k)$

$\dim_K V = n$

pacio afín $\Longrightarrow GA(A) = \{ \phi : A \longrightarrow A \mid \phi$ es $\underbrace{\text{afín biyectiva}}_{\text{afinidad}} \}$

es el grupo afín del espacio afín

, $\circ$) grupo invariante del espacio

$\simeq A_2 \Rightarrow GA(A_1) \simeq GA(A_2)$

ración

$. GA(A_1) \Longrightarrow GA(A_2)$

$\xrightarrow{\phi} A_1 \xrightarrow{h} A_2$

$(\phi) = h \circ \phi \circ h^{-1} \in GA(A_2)$

$(\psi \circ \phi) = \tau(\psi) \circ \tau(\phi)$

$\xrightarrow{\phi} \underset{R_2}{A_2} \xrightarrow{\psi} \underset{R_3}{A_3}$, se verifica que $M_{\psi \circ \phi}(R_1, R_3) =$

$R_1, R_3) = M_\psi(R_2, R_3)\ M_\phi(R_1 R_2)$

icular

$\to \underset{R_2}{A_2} \xrightarrow{\phi^{-1}} \underset{R_1}{A_1}$ ϕ biyectiva

$R_2 R_1) = M_\phi(R_1 R_2)^{-1}$

de paso

$\xrightarrow{id} \underset{R_2}{A}$. $M\,id(R_1, R_2) = M(R_1, R_2)$

$M\,id(R_2, R_1) = M(R_1, R_2)^{-1}$

rticular

$\xrightarrow{id} \underset{R_1}{A_1} \xrightarrow{\phi} \underset{R_2}{A_2} \xrightarrow{id} \underset{R'_2}{A_2}$

$, R'_2) = M(R_2, R'_2)\ M\phi(R_1 R_2)\ M(R'_1, R_1)$

hoja 7 ejc 1

$$S) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad R', S'$$

$$S') = ¿ M(R', R) , M(S, S') ?$$

$; \{u_1, u_2, u_3\}\}$

$$\underset{p'}{\overset{\shortparallel}{p+u_1+2u_3}} ; \{ \underset{u'_1}{\overset{\shortparallel}{u_3}} , \underset{u'_2}{\overset{\shortparallel}{u_1+u_2}} , \underset{u'_3}{\overset{\shortparallel}{u_2+u_3}} \}\}$$

$$, R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad M(S, S') =$$

$$S, R') = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \\ \\ M(S', S)^{-1} \end{array}\right.$$

$$p \ \overrightarrow{p+u_1+2u_3} = \overrightarrow{pp'} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$

$A_1 \longrightarrow A_2$ afín se verifica:

$+ W) = \phi(p) + \vec{\phi}(W)$

(ϕ) es variedad

conserva el paralelismo $(x \parallel y \ ; \ \overrightarrow{\phi(x)} = \vec{\phi}(\vec{x}))$

conserva la alineación

3/3/2015

ón

≡" $\phi(p+u) = \phi(p) + \vec{\phi}(u) \in \phi(p) + \vec{\phi}(w)$

" $\underbrace{\phi(p) + \bar{\phi}(u)}_{\shortparallel} \in \phi(p) + \bar{\phi}(w)$

$\phi(p+u) \in \phi(p+w)$

⁂

5/3/2015

$\longrightarrow$ A la aplicación afín, con dim A = 1 , siendo V el espacio vectorial

$R = \{p ; B = \{u_1\}\}$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & \lambda \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \qquad \lambda = M_{\bar{\phi}}(B)$$

constante , $\phi \equiv (b)_R$

$\bar{\phi} = \lambda id_V \Longrightarrow \begin{cases} \phi \text{ traslación} & \lambda = 1 \\ \phi \text{ homotecia} & \lambda \neq 1 \neq 0 \end{cases}$

$\longrightarrow$ A una aplicación afín

$\Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\bar{\phi})$

ón

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \text{ el sistema } \left\{ \begin{array}{l} b_1 + (a_{11} - 1)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-1)x_n = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{única} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow P_{\bar{\phi}}(1) \neq 0 \Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\bar{\phi})$$

#

(aplicaciones afines)

$\longrightarrow A$ afín , $\dim A = 2$, $R = \{p ; B = \{u_1 , u_2\}\}$

$\xrightarrow{\Phi} (x', y')_R$

s en el que el valor propio es 1

$1 \in \sigma(\bar{\Phi})$

$\dim_K V_{\bar{\Phi},1}$	A_Φ punto fijos	Nombre	Ecuaciones
2	$\neq \emptyset$	id_A	$x' = x \quad y' = y$
2	$= \emptyset$	traslación	$x' = 1 + x$, $y' = y$
1	$\neq \emptyset$	homología especial de eje A_Φ	$x' = x$, $y' = x + y$
1	$= \emptyset$	Homología eje seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + x + y$
1	$\neq \emptyset$	Proyeccion de base A_Φ y dirección u_2	$x' = x$, $y' = 0$ $\lambda =$ razón $\langle u_2 \rangle$ ↓ dirección eje $A_\Phi = p + \langle u \rangle$
1	$= \emptyset$	Proyección seguida de traslacón	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2$
1	$\neq \emptyset$	Homología general	$x' = x$, $y' = xy$ eje $A_\Phi = p + \langle u_1 \rangle$
1	$= \emptyset$ (no tiene pto fijo)	Homología general seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + \lambda \cdot y$

$$1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (p \in A_\phi)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (b_1, b_2) \neq (0,0)$$

u_1 $\quad u_1 =$ vector de la traslación $\quad B = \{p ; \{u_1 u_2\}\}$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M_\phi(R)$$

$$M \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} u_1 \in V_{\bar{\phi},1} \\ u_2 \in V_{\bar{\phi},0} \end{array}$$

$$M \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

$u_2 \longmapsto p + \alpha \lambda u_2$ recta invariante, punto fijo cambia?

5/3/2015

$1 \notin \sigma(\bar{\Phi}) \Longleftrightarrow A_\phi = \{p\}$

	$\dim_K V_{\bar{\Phi},\lambda}$	Ecuaciones
	—	$x' = \lambda_1 x, \quad y' = \lambda_2 y$
	2	$\phi \equiv cte, \lambda = 0$ Homotecia centro p y razón λ $x' = \lambda x, \quad y' = \lambda \cdot y$
	1	$x' = \lambda x, \quad y' = x + \lambda y$
		$x' = -a_0 y, \quad y' = x - a_1 y$ no hay recta invariante afín ya que $\nexists$ P_ϕ

$$R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array} \right)$$

educible en $k[x] \Rightarrow \sigma(\bar{\Phi}) = \emptyset$

$= x^2 + a_1 x + a_0$

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{array} \Bigg)$$

$R = \{p ; \{u_1, \bar{\Phi}(u_1)\}\} \quad \exists u_1 \in V$

6/3/2015

$\longrightarrow A$ una aplicación afín, $X \subset A$ la variedad.

invariante si $\phi(X) \subset X$, es decir, $\phi_{|X} : X \longrightarrow X$ afín)

$p + W$, X es ϕ-invariante $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{p\phi(p)} \in W$ y $\vec{\phi}(W) \subseteq W$

ón

n ϕ-invariante $\Longleftrightarrow \phi(p+W) \subseteq p+W \Longleftrightarrow \phi(p) + \vec{\phi}(W) \subset p + W \Longleftrightarrow$

$$\begin{matrix} \phi(p) \in p+W \\ \vec{\phi}(W) \subset W \end{matrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{p\phi(p)} \in W \\ \vec{\phi}(W) \subset W \end{matrix} \right.$$

9/3/2015

BILINEALES Y CUADRÁTICAS

s bilineales

as bilineales, vamos a tomar que trabajamos en $\chi(k) \neq 2$

$V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow V$ k - multilineal si

$\dots, u_{i-1}, a u_i + a' u_i', u'_{i+1}, \dots, u_m) = a f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_m) +$

$f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i', u_{i+1}, \dots, u_m)$

ión

$n \quad ; a, a' \in k \quad u_i, u_i' \in V_i$

2 ,, f es bilineal ; $V = k$ f es Forma

n

bilineal y lineal $f: V \times V \longrightarrow k$, $\forall u, v \in V$

$v, u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v)$

$\shortparallel$

$u,u)+(v,v)) = f(u,u) + f(v,v)$

$f(u,v) + f(v,u) = 0 \Rightarrow f(v,u) = -f(u,v)$

$^2 \longmapsto k$

$, y_1), (x_2, y_2)) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_1 y_2$

$\overset{\shortparallel}{u} \qquad \overset{\shortparallel}{v}$

$\in k$. f bilineal ya que tiene distributividad en el cuerpo K

$\longrightarrow K$ bilineal $\dim_K V = 2$

$u_2\}$ base de V

$\Rightarrow f(u,v) = f(\underbrace{x_1u_1 + x_2u_2}_{u}, \underbrace{y_1u_1 + y_2u_2}_{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ bilineal}}}{=}$

$_1\, f(u_1,u_1) + x_1y_2 f(u_1,u_2) + x_2y_1 f(u_2,u_1) + x_2y_2 f(u_2,u_2)$

$, a_{11} + x_1y_1a_{12} + x_2y_1a_{21} + x_2y_2a_{22}$. $a_{ij} = f(u_i, u_j)$

$V \longrightarrow K$ $\dim_K V = n$

$\dots, u_n\}$ base de V bilineal

$\in V$; como en el caso anterior nos sale una suma tal que

$$\begin{cases} u = x_1u_1 + \dots + x_nu_n \\ v = y_1u_1 + \dots + y_nu_n \end{cases}$$

$$= \sum_{ij} a_{ij}\, x_i y_j$$

$f(u_i, u_j)$ $M_f(B) = (a_{ij}) \in Mat_n(K) = A$

$$(x_1, \dots, x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} n=2 \\ (x_1, x_2) \underset{\substack{\| \\ f(u,v)}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$) = P$ $A' = M_f(B')$, $A = M_f(B)$

9/3/2015

ilineal.

$\times V \longrightarrow k$ bilineal tal que $f(u,v) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$

B) = matriz bilineal = $f(u_i, v_j) \in Mat_n(k) = A$

$) = P$, $A' = M_f(B')$ y $A = M_f(B)$

$$= P \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$(x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1' \dots x_n') \underbrace{P^t A P}_{\begin{array}{c}\shortparallel \\ A'\end{array}} \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

P^t

si: $A' = P^t A P$ $\quad P \in GL_n(k)$

$(P^t)^{-1} = A \Longrightarrow (P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$

ente es una forma multilineal

Bilineal)

ica si $f(u,v) = f(v,u)$

étrica si $f(u,v) = -f(v,u)$

$(V) = \{ f : V \times V \longrightarrow k \mid f$ forma k-bilineal $\}$ y

$, +, \cdot)$ k-espacio vectorial

$(u,v) = f(u,v) + g(u,v)$

$u,v) = af(u,v)$

$\text{il}_K(V) \xrightarrow[\cong]{} \text{Mat}_n(K)$ (Biyección)

$f \longmapsto M_f(B)$

$\text{Bil}_K(V) = n^2$

$\{f \in \text{Bil}_K(V) : f \text{ simétrica}\}$

$\{ f \in \text{Bil}_K(V) : f \text{ antisimétrica}\}$

$_K(V) < \text{Bil}_K(V)$

$v) = f(u,v) + g(u,v) = f(u,u) + g(v,u) = (f+g)(v,u)$

$) = af(u,v) = af(v,u) = af(v,u)$

estar trabajando $\chi(K) \neq 2$ (sino no se puede)

$v) = S_K(V) \oplus A_K(V)$

$$_K(V) \Rightarrow \begin{cases} f(u,v) = \dfrac{f(u,v)+f(v,u)}{2} & \text{(simétrica)} \\ f_a(u,v) = \dfrac{f(u,v)-f(v,u)}{2} = \dfrac{-f(v,u)-(-f(u,v))}{2} \end{cases}$$

$= -f_a(v,u)$ (antisimétrica)

$A_K(V) = \{0\}$

$) \cap A_K(V)$

$$= \begin{cases} f(v,u) \\ -f(v,u) \end{cases} \Rightarrow f(v,u) = -f(v,u) \Rightarrow 2f(v,u) = 0$$

$(v,u) = 0$

Demostración

9/3/2015

$s + f_a$

$$(f(u_i, u_i)) = f(u_j, u_i)$$

métrica $\Longleftrightarrow$ $M_f(B)$ simétrica

$$S_k(V) = \dim_k \{A \in Mat_n(k) : A = A^t\} = n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$A_k(V) = \frac{n^2-n}{2}$$

$n = 3$

$$\begin{matrix} {}_2 & a_{13} \\ {}_2 & a_{23} \\ & a_{33} \\ {}_3 & \end{matrix}\Bigg) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ca $\quad \chi(k) \neq 2$

$- a_{ij} \Longrightarrow a_{ij} = 0$

$, a_{ij} = -a_{ij} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$

$A^t = A^t$

$$\begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{23} \\ -a_{23} & 0 \end{matrix}\Bigg)$$

10/3/2015

ango

il$_K$(V) , B, B' bases de f $\Big\}\Longrightarrow$ $A' = P^t A P$, $P \in GL_n(K)$
$A' = M_f(B')$; $A = M_f(B)$

et $A' = (\det P)^2 \det A$ $(\det A' \neq \det A)$

g $A' = rg\, A$

ango

$= rg(A)$, donde $A = M_f(B)$

generado si $rg\, f = \dim_K V$

$K^n \longrightarrow K$ $(k \leq n)$ $(h \leq n)$

$, v) = \sum_{i=1}^{k} x_i$

no es lineal en la variable "v" $\Longrightarrow$ no es bilineal

aejemplo

$u, v+v') \neq f(u,v) + f(u,v')$

$$\overset{\parallel}{\sum_{i=1}^{k} x_i} \neq \overset{\parallel}{2\sum_{i=1}^{k} x_i}$$ pero si es lineal en u.

$= \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{h} y_i$

es bilineal . Contraejemplo

$, v+v') = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{h} (y_i + y_i')$

$\nparallel$

$, v) + f(u,v') = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} y_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{h} y_i \right)$

$f : k^{2n} \longrightarrow k$ lineal 10/3/2015

$$) = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{h} y_i\right) = \sum_{\substack{1\leq i\leq k \\ 1\leq j\leq h}}^{k,h} x_i y_j$$ es bilineal por definición

$$f(B_c) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{matrix}}^{h} \Big| k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

como x_i y_j matriz de $1 \ldots 1$

distinta variable.

$f) = 1$, f es degenerado

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$ es bilineal por definición.

$$_f(B_c) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg(f) = k \leq n$

$) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ no es degenerado

f es el producto escalar y M_f es la matriz del producto

r $M_f(B_2) = I_n$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{h} y^2\right)$$ no es bilineal

itraejemplo

$(\lambda u, v) \underset{\uparrow}{=} \lambda f(u,v) \quad \forall \lambda$

no se cumple.

$\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$, v) = \sum_{i=1}^{k} |x_i y_i|$ No es bilineal

traejemplo $\lambda = -1$

$f(\lambda u, v) = \sum_{i=1}^{k} |(-1) \cdot x_i y_i|$ $\neq$

$\lambda f(u,v) = (-1) \cdot \sum_{i=1}^{k} |x_i y_i|$

#

$, v) = \left| \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \right|$ No es bilineal

ontraejemplo $\lambda = -1$

$f(\lambda u, v) = \left| \sum_{i=1}^{k} (-1) \cdot x_i y_i \right|$ $\neq$

$\lambda f(u,v) = (-1) \left| \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \right|$

#

$, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$ No es bilineal

plo $\lambda = 4$

$f(\lambda u, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 4 \cdot x_i y_i} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$

$f(u,v) = 4 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$

#

10/3/2015

III.

$_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$

rimítica es lineal por definición de integrales

$+p')q\,dx = \int (pq + p'q)\,dx$

$p)q\,dx = \lambda \int pq\,dx$

bilineal y simétrica.

$$= \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array}$$

$f(1,\ )$ $\quad f(x,\ )$ $\quad f(x^2,\ )$

$1) = \int_0^1 dx = 1$

$x) = \int_0^1 x\,dx = 1/2$

$, x^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

1ª columna

rg f = 3

f no degenera

$\mathrm{Mat}_n(K) \times \mathrm{Mat}_n(K) \longrightarrow K$

$, C) =$ traza $A \cdot \mathrm{tr}\, C$

$(A+A', C) = \mathrm{tr}(A+A') \cdot \mathrm{tr}\, C = (\mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, A') \cdot \mathrm{tr}\, C =$

$= \mathrm{tr}\, A\, \mathrm{tr}\, C + \mathrm{tr}\, A'\, \mathrm{tr}\, C = f(A,C) + f(A',C)$

$(\lambda A, C) = \mathrm{tr}(\lambda A) \cdot \mathrm{tr}\, C = \lambda \mathrm{tr}\, A \cdot \mathrm{tr}\, C = \lambda f(A,C)$

métrica bilineal. ; $\dim \mathrm{Mat}_n(K) = n^2$

$= 2$

$) = tr\, A\; tr\, C$

hacer matriz y ver rango

$, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(B) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \underbrace{\;}_{f(E_{11})} \underbrace{\;}_{f(E_{12})} \underbrace{\;}_{f(E_{21})} \underbrace{\;}_{f(E_{22})} \end{array} \begin{array}{l} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array}$$

Rango = 1

$) = tr\,(A \cdot C)$

$A \cdot C =$ traza $C \cdot A$ para $n = 2$ $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

$A = a_{ij}$ $CA = (p_{ij})$ hacer matriz y rango.

$C = c_{ij}$ $CA = q_{ij}$

bi lineal y simétrica.

$) = tr\,(A^t \cdot C)$ * Importante

$A^t C) \overset{?}{=} tr\,(C^t \cdot A) \Longleftrightarrow (A^t C)^t = C^t A^{tt} = C^t A$

nces f es bilineal y simétrica.

$n = 2$ $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ hacer matriz y calcular rango

10/3/2015

(continuación)

$C) = \det A \cdot \det C$

bilineal. Contraejemplo

$(A, C+C') = \det A \cdot \det(C+C') \neq (\det C + \det C') \det A$

$,C) = \det(A \cdot C)$

es bilineal. Contraejemplo.

$(A, C+C') = \det(A \cdot (C+C')) = \det(AC + AC') \neq \det AC + \det AC'$

$f) = rg\, M_f(B)$, $f: V \times V \longrightarrow K$ bilineal B base de V

$V \longrightarrow \overset{dual}{V^*} = \{ w: V \longrightarrow k \mid w \text{ lineal} \}$

$u \longmapsto f_i(u)(v) = f(u,v).$

neal $\Longleftrightarrow$ f_i es lineal

$B) = A = (f(u_i,u_j)) \Rightarrow M_{f_i}(B,B^*) = A^t$

ción

V $f_i(u)$ lineal?

$(u)(v+v') = f(u,v+v') = f(u,v) + f(u,v') = f_i(u)(v) + f_i(u)(v')$

$u)(\lambda v) = \lambda f_i(u)(v).$

$' \in V \Rightarrow f_i(u+u') \overset{?}{=} f_i(u) + f_i(u')$

$v \in V \quad \underset{f(u+u',v)}{\underset{\shortparallel}{f_i(u+u')(v)}} = f_i(u)(v) + f_i(u')(v) = f(u,v) + f(u',v)$

$(B) = A = (\underset{a_{ij}}{\underset{\shortparallel}{f(u_i,u_j)}}) \Rightarrow M_{f_i}(B,B^*) = A^t$

$,\dots, u_n\}$

$_i(B,B^*) = c_{ij}$

$) \in V^*$ $\Longrightarrow f_i(u_i)(u_j) = (c_{i1}u_1^* + \dots + c_{in}u_n^*)(u_i)$

$^* + \dots + c_{in}u^*_n$

$$\begin{aligned} &= c_{ij}\, u^*_j(u_j) \\ &= c_{ij} \end{aligned}$$

$\times V \longrightarrow k$ bilineal y B base de V

$: f_d : V \longrightarrow V^* = \{W : V \longrightarrow k \mid W \text{ lineal}\}$

$u \longmapsto f_d(u)(v) = f(v,u)$

eal $\Leftrightarrow$ f_d es lineal

$A = f(u_i u_j) \Longrightarrow M_{f_d}(B,B^*) = A$

f_d

f_d si A es simétrica, es decir, si f es simétrica.

12/3/2015

degenerada $\Leftrightarrow$ $f_i, f_d : V \longrightarrow V^*$ son isomorfismos

generada $\Leftrightarrow$ $rg < 2$

$Bil_K(V)$, $u \in V$ es isótropo si $f(u,u) = 0$

plo.

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad f(u,v) = x_1y_2 + x_2y_1$

$\left.\begin{aligned} u_1 &= (1,0)_B \\ u_2 &= (0,1)_B \end{aligned}\right\}$ isótropos

erada

12/3/2015

$\neq 0 \Rightarrow$ no es isótropo = antisotropos

erada $\Rightarrow \exists\, u \in V,\ u \neq 0$

ración

$\xrightarrow{\quad} V_n^*$, n-isomorfismo $\Rightarrow \exists\, u \neq 0 \in V$ tal que $f_i(u) = 0 \in V^*$

$\forall v \in V$ tal que $f_i(u)(v) = 0 \Rightarrow \underset{f(u,u)}{\underset{\shortparallel}{f_i(u)(u)}} = 0$.

#

simétrica $\Leftrightarrow \forall\, u \in V$, u es isótropo

ración

$f(u,u) = -f(u,u)\ \forall u \in V \Rightarrow 2f(u,u) = 0 \xRightarrow{\mathcal{X}(K) \neq 2} f(u,u) = 0$

$\forall\, u, v \in V \Rightarrow \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(u+v, u+v)}} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(u,u)}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(v,v)}} + f(u,u) + f(v,u)$

$\Rightarrow f(v,u) = -f(u,v)$

#

antisimétrico $\Rightarrow \exists\, u$ y este no es isótropo

ración

$, v \in V : f(u,v) + f(v,u) \neq 0 \Rightarrow$

$\underset{0}{\underset{\neq}{f(u+v, u+v)}} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(u,v)}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(v,v)}} + f(u,v) + f(v,u)$

$\Rightarrow f(u;v) + f(v,u) \neq 0 \Rightarrow$ u ó v ó u + v no son isótropo

#

I

$\longrightarrow k$ siendo $q(u)=f(u,u)$, es forma cuadrática

$\longrightarrow Q_k(V)$

$\longrightarrow q_f$

f simétrica

$= q(u)+q(v)+f(u,v)+f(v,u) \overset{\downarrow}{=} q(u)+q(v)+2f(u,v)$

$$f(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v)-q(u)-q(v)\right)$$

antisimétrica

$2 \ , \ \underset{\text{simétrica}}{f = f_s} + f_a \Longrightarrow \underset{\text{forma cuadrática de } f}{q_f(u)} = f(u,u) = f_s(u,u) + f_a(u,u) =$

$-f_a(u,u)=0)$

$) = q_{f_s}(u)$

I

$)$ la matriz cuadrática, cuadrada.

$Mq(B) = M_f(B) = A = (a_{ij})$

$u,v) = \sum a_{ij} x_i y_j$

$u) = f(u,u) = \sum a_{ij} x_i x_j$

$x_3) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_3^2$

$x_3),(u_1,u_2,u_3)) = x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 + \frac{3}{2}x_2y_1 + 5x_3y_3$

$$(B) = Mq(B) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

12/3/2015

Sec ...s antisimétrica

togonal de V

, $f \in Bil_K(V)$,, $W^{\perp_f} = \{u \in V : f(u,v)=0, \forall v \in W\}$ *

↳ ortogonal respecto de f

$,v)=0 = f_i(u)(v) = \pm f(v,u) = f_d(u)(v)$

$< V$

$W^{\perp} \geqslant n - \dim W$

$\subset W_2 \Longrightarrow W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$

$+ W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

$\cap W_2)^{\perp} \supset W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

$^{\perp} > W$

f no es degenerada ⟹ Las propiedades **ii, v, vi** son igualdades

s (ideas)

$f(u_2, v) = 0 \Longrightarrow f(\underbrace{u_1 + u_2}_{W_1 + W_2}, v) = 0$,, $u \in W_1$, $u_2 \in W_2$

$u \in W, v \in W^{\perp} \Longrightarrow f(v,u) = f(u,v) = 0$

ter Intro. Definicón

$f_s + f_a$, $Bil_K(V) = S_K(V) \oplus A_K(V) \Longrightarrow S_K(V) \cap A_K(V) = \{0\}$

, $f \in S_K(V) \Longrightarrow f$ no antisimétrica $\Longrightarrow \exists\ u$ no isótropo $(u \neq 0)$

plen lo siguente

$\langle u \rangle^{\perp} = n-1$

$\langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^{\perp}$

$\{u_1, \dots, u_n\}$ base de V

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{\neq 0} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \{ v \in V : f(v,u) = 0 \}$$

$$(v, u_1) = f((x_1, \dots x_n)_B, (1, 0 \dots 0)_B) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \overset{\neq 0}{a_{11}} x_1 + \dots + a_{n1} x_n \implies \dim \langle u_1 \rangle^{\perp} = n-1$$

$$u \rangle \cap \langle u \rangle^{\perp} \implies v = \lambda u, \ f(u, \lambda u) = 0 \implies \lambda f(u,u) = 0 \implies$$

$\lambda = 0 \implies v = 0$ $\qquad \langle u \rangle \cap \langle u \rangle^{\perp}$

$f(u,u) = 0$ ⓃⓄ

13/3/2015

$\mathrm{Bil}_K(V)$ se verifica:

$\in S_K(V) \iff M_f(B)$ es diagonal, para alguna base B de V

togonal respecto f)

$\in A_K(V) \iff M_f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{r/2} \oplus O_{n-r}$, para alguna base

, siendo $r = rg(f)$

ón

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{pmatrix} = A \ ; \ A \text{ simétrica} \implies f \in S_K(V)$$

$f = 0 \implies M_f(B) = 0$, diagonal

$f \neq 0 \implies V = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_1 \rangle^{\perp} \quad (u_1 \neq 0)$

$\{v_2, \dots, v_n\}$ base de $\langle u_1 \rangle^{\perp}$

$\{u_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V

13/3/2015

emostración

$$_2, \dots, v_n\}) = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_{f|\langle u_1\rangle^\perp}(\{v_2, \dots v_n\}) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$0 \qquad i = 2, \dots, n \qquad f(v_i, v_i)$

$\Rightarrow$ trivial

Hipótesis inducción

$\dots, u_n\}$ base de $\langle u_1\rangle^\perp$ talque $M_{f|\langle u_1\rangle^\perp}(\{u_2, \dots u_n\})$ diagonal

$Mat_n(k)$, A simetrica $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(k) : \underbrace{P^t A P}_{\text{por congruencia}}$ diagonal

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{r/2} \oplus O_{n-r} = A \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{t(r/2)} \oplus O_{n-r}^{\,t} =$$

$$\begin{matrix} & -1 \\ & 0 \end{pmatrix}^{(r/2)} \oplus O_{n-r} = \left[- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{r/2} \oplus O_{n-r} = -A$$

s es antisimetrica.

$\Rightarrow f = 0 \Rightarrow M_f(B) = 0 = O_n$

$$f \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(u,u) = 0 \quad \forall u \in V \ \left(f(u,u) = -f(u,u) \Rightarrow 2f(u,u) = 0 \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. \Longrightarrow f(u,u) = 0 \right) \\ n \geq 2 \quad \exists\, u, v \in V : f(u,v) \neq 0 \end{cases}$$

$u_1, u_2 \in V : f(u_1, u_2) \neq 0$

$\{u_1, u_2\}$ linealment independiente, suponemos $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 = f(\lambda u_1 + \lambda_2 u_2, u_1) = \lambda_2 \boxed{f(u_2, u_1) \neq 0} \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ 0 = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, u_2) = \lambda_1 \boxed{f(u_1, u_2) \neq 0} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\dim_K \langle u_1, u_2\rangle = 2$

$\langle u_1, u_2\rangle^{\perp} = n-2 \quad " \quad V \in \langle u_1, u_2\rangle^{\perp}$

ración

$$\_ = (x_1 x_2\ x_3 \dots x_n)_B \in \langle u_1, u_2\rangle^{\perp} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = f(u_1, v) \\ 0 = f(u_2, v) \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow$$

$$= f(u_1, v) = f(u_1, v_1)x_1 + f(u_1, v_2)x_2 + \dots + f(u_1, v_n)x_n = f(u_1, u_2)x_2 + \dots$$

$$= f(u_2, v) = f(u_2, v_1)\lambda_1 + f(u_2, v_2)x_2 + \dots + f(u_2, v_n)x_n = \boxed{\begin{array}{c} f(u_2, u_1)x_1 + \dots \\ \shortparallel \\ -f(u_1, u_2) \neq 0 \end{array}}$$

$\Rightarrow$ linealmente independiente

$, u_2\rangle + \langle u_1, u_2\rangle^{\perp}$

stración

$$+ \lambda_2 u_2 \in \langle u_1, u_2\rangle^{\perp} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = f(\lambda u_1 + \lambda_2 u_2, u_1) = \lambda_2\, f(u_2, u_1) \\ 0 = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, u_2) = \lambda_1\, f(u_1, u_2) \end{array} \right.$$

$$\neq 0$$

$$_3, \dots, v_n\} \text{ base } \langle u_1, u_2\rangle^{\perp} \Rightarrow M_f(\{u_1, u_2, v_3, \dots, v_n\}) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} M_{f|\langle u_1, u_2\rangle}^{(\{u_1, u_2\})} & 0 \\ \hline 0 & M_{f|\langle u_1, u_2\rangle^{\perp}}^{(\{v_3, \dots, v_n\})} \end{array} \right)$$

$$\{u_1, u_2\}) \atop , u_2\rangle \quad = \begin{pmatrix} 0 & f(u_1, u_2) \\ -f(u_1, u_2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{u_1 u_2)^{-1}} u_1 \qquad f(f(u_1, u_2)^{-1} u_1, u_2) = f(u_1 u_2)^{-1} f(u_1 u_2)$$

$= u'_1 \in K$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{array} \right)$$

m cajas

$$rg(M_f) = 2 \cdot m$$
$$\shortparallel$$
$$r \qquad m = r/2$$

13/3/2015

$$\left.\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right) = \boxed{\left(\begin{array}{cc|c}0&1&0\\-1&0&0\\ \hline 0&0&0\end{array}\right)} = A$$

Antisimétrica

P^t. Matriz Antisimétrica $\cdot P = A$

$rg = 2$

$$=)\begin{cases}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \text{Caso 1}\\ 0 & \text{Caso 2}\end{cases}$$

rencia

$$) \Longrightarrow M_f(B) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & O\\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mu_1^{-1}\\ \vdots\\ \mu_r^{-1}\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} M_f(B') =$$

$\neq 0$

$= \{u_1, \dots, u_n\}$

$$= \begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots \overset{1 ⓡ}{} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix} = I_r \oplus O_{n-r}$$

$_i^2$ $\mu_i \in \mathbb{C}$

i

$, \dots, \mu_r u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$

(1ª parte tma Sylvester)

$$) \Longrightarrow M_f(B) = \begin{pmatrix}\underbrace{\lambda_1 \; \ddots \; \lambda_s}_{0<} & & & O\\ & \underbrace{\lambda_{s+1} \; \ddots \; \lambda_r}_{0>} & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0\end{pmatrix}$$

$1 \leq i \leq s$

$B = \{u_i\}$

$_i^2$ $s+1 \leq i \leq r$ $B' = \{\mu^{-1}.u_1, \dots, \mu_r^{-1}u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$

$$\begin{pmatrix}\overbrace{1 \; \ddots \; 1}^{s} & & & O\\ & \overbrace{-1 \; \ddots \; -1}^{r-s=t} & & \\ O & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0\end{pmatrix} = I_s \oplus -(I_t) \oplus O_{n-r}$$

atura $= \mathcal{E}(f) = (s, t)$ $s + t = r$.

16/3/201

Sylvester (ley de inercia de Sylvester) $k = \mathbb{R}$

de Sylvester se da en el cuerpo $k = \mathbb{R}$

$\in S_{\mathbb{R}}(V)$ simétrica $\in Bil_{\mathbb{R}}(V) \Longrightarrow \exists$ B base de V tal que

$.(B) = I_s \oplus (-I_t) \oplus O_{n-r}$

s si $B' \subset V$ es base tal que $M_f(B') = I_{s'} \oplus (-I_{t'}) \oplus O_{n-r}$

$s = s'$, $t = t'$; siendo s y t únicas.

1

2

$$(V) \Longrightarrow M_f(B) = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_s}_{>0} & & & O \\ & \underbrace{\lambda_{s+1} \cdots \lambda_r}_{<0} & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

$,\quad 1 \le i \le s \qquad B = \{u_i\}$

$i^2 \quad s+1 \le i \le r \qquad B' = \{\mu_1^{-1} u_1, \dots, \mu_r^{-1} u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$

$$B') = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{s} & & & O \\ & \underbrace{-1 \cdots -1}_{r-s=t} & & \\ O & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} = I_s \oplus -(I_t) \oplus O_{n-r}$$

2 ¿$s = s'$, $t = t'$?

$\dots, u_n\} \qquad B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$

$= f(u'_i, u'_j) = 0 \quad \forall \quad 1 \le i \ne j \le n$

$= 1$ si $1 \le i \le s$

$) \le 0$ si $s' \le i \le n$

$\dots, u_s\rangle$ subespacio de $V \qquad W' = \langle u'_{s+1}, \dots, u'_n\rangle$ subespacio de V

$= \{0\}$

demostración

$\cap W' \Rightarrow u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s \Rightarrow f(u,u) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \lambda_j f(u_i, u_j) =$

$\lambda_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{s} \lambda^2_i \geq 0$

$= \sum_{i=s'+1}^{n} \lambda_i' u_i' \Rightarrow f(u,u) = \sum_{i=s'+1}^{n} \lambda_i' \lambda_i' = f(u'_i, u'_j) =$

$\sum_{s+1} \lambda_i' \lambda_i' \, f(u_i', u'_i) = \sum_{s+1}^{t'} (\lambda_i')^2 (-1) + \sum_{t'+1}^{n} (\lambda'_i)^2 \cdot 0 =$

$\sum_{s+1}^{t'} (\lambda_i')^2 \leq 0$

$\cap W' \Rightarrow f(u,u) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0 \Rightarrow u = 0$

$m\,(W + W') = \dim W + \dim W' = s + n - s'$

$\Downarrow$

$\boxed{s' \geq s}$

álogo $s \geq s'$

os como $s + t = r = s' + t'$, queda demostrado $s = s'$ y $t = t'$ #

$(V) \iff M_f(B)$ diagonal $(B \subset V$ base$)$

rótica $\iff M_q(B)$ diagonal $(B \subset V$ base$)$

$t_n(k)$ simétrica $\iff \exists\, P \in GL_n(k)$ tq $P^t A P$ = matriz diagonal

C

$) = I_r \oplus O_{n-r}$

$= \mathbb{R}$

$B) = I_s \oplus (-I_t) \oplus O_{n-r}$

tisimétrica $\Rightarrow f(u_i, u_i) = 0$,, $f(u_j\ u_i) = -f(u_j . u_j)$

$: \sum a_{ij} x_i y_j \qquad a_{ij} = f(u_i, u_j)$

$$f(u,u) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j$$

$$j\ x_i x_j + a_{ji} x_j x_i = a_{ij} x_i x_j - a_{ij} x_i x_j = 0$$

$$u) = \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j = 0$$

17/3/2015

$q : V \longrightarrow k$ Cuadrática

$\dots + x_n u_n$

$T(x_3, \dots, x_n)$ cuadrática

$$, x_n) = a x_1 x_2 + x_1 \underset{\downarrow}{R} + x_2 S + \overset{\uparrow}{T} =$$

$a \neq 0 \qquad R(x_3, \dots, x_n) \qquad S(x_3 \dots x_n)$

Lineal Lineal

$$\underbrace{\frac{S}{a})\left(x_2 + \frac{R}{a}\right)}_{''} \underbrace{- \frac{RS}{a} + T}_{q'(x_3 \dots x_n)}$$

$${}_1'^2 - x_2'^2)$$

$$+ x_2 + \frac{S}{a} + \frac{R}{a}$$

$$- x_2 + \frac{S}{a} - \frac{R}{a}$$

forma diagonal de una cuadrática

$: \quad q(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{x_1 x_2}_{a x_1 x_2} + \underbrace{x_2 x_3}_{x_R . S} + \underbrace{x_3 x_1}_{x_1 R}$ Bilineal simétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

no hay cuadrados.

17/3/2015

$+ x_2 + x_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 \Big] - x_3^2$

$- \frac{1}{4} x_2'^2 - x_3'^2$ $\qquad x_3' = x_3 \qquad x_2 =$

$$= D = \begin{pmatrix} 1/4 & & 0 \\ & -1/4 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

$= F^t A^t F^{tt} = F A^t F^t = F A F^t$

si A es simétrica

parece un ceio en la primera posición

$$\begin{matrix} a_{12} & \dots \\ a_{22} & \dots \\ \vdots & \\ \end{matrix} \Bigg) \qquad i = 2$$

los mismos operaciones por filas y columnas para que sea

de 0 es igual a hacer

$$\begin{matrix} a_{12} & \dots \\ 0 & \dots \\ 1 & \dots \\ 1 & \dots \end{matrix} \Bigg) = T_{12} A T_{12}^t$$

diagoral con ceios

$$\begin{matrix} {}_{12} & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \Bigg) \qquad a_{ij} \neq 0$$

$a_{12} \neq 0$

$c_1 + c_2 \neq 0$

$$) A = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots \\ a_{12} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_{12} & a_{12} & \dots \\ a_{12} & 0 & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

24/3/2015

Espacio vectorial Euclídeo

ectorial) Euclídeo

$= \dim_{\mathbb{R}} V$ y $f \in S_{\mathbb{R}}(V)$, se dice que f es un producto

: es definida positiva ($f(u,u) = q(u) > 0 \quad \forall u \neq 0$)

n

$S_{\mathbb{R}}(V)$, entonces, por el Teorema de Sylvester, $\mathcal{E}(f) = (s,t)$.

$= s+t$, entonces, como f es producto escalar, $\mathcal{E}(f) = (n,0)$

$\equiv x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

$\equiv x_1^2 + \dots + x_n^2$

$_f(B) = I_n$

$I_n \implies f$ es producto escalar

$, \dots, u_n \}$; $f(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

, $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \implies f(u,u) = q(u) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$

en $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ no sucede $1^2 + i^2 = 0$

ase ortonormal (ortogonales unitarios normalizados)

ducto escalar, la matriz es simétrica tal que B es base

al $M_f(B) = (f(u_i u_j)) = I_n$

productos escalares se interpretan $f \equiv x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

producto escalar sobre V, $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$\overline{f(u,u)} = \sqrt{q(u)} \geq 0$

$: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad f((x_1, \dots, x_n)(y_1 \dots y_n)) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

prod. escalar

$x_1 \dots x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$(u,u)=1 \iff \|u\| = \sqrt{f(u,u)} = 1$

. vectores unitarios tienen norma 1.

. escalar usual $x_1y_1 + \dots + x_ny_n = f$

$x_1^2 + \dots + x_n^2 = g$

, $[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \ : a_i \in \mathbb{R}\}$

$\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(p,q) = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$ es una

bilineal y como $f \cdot g = g \cdot f \Rightarrow$ es simétrica.

$\int_0^1 p(x)^2\,dx > 0$, si $p \neq 0$, es producto escalar

$t_2(\mathbb{R})$, Suponemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces definimos

$\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(X,Y) = \operatorname{tr} X^tAY$, siendo $X, Y \in Mat_2$

cto escalar (1° Bilineal.)

$;Y) = \operatorname{tr}((X+X')^t AY) = \operatorname{tr}(X^tAY + X'^tAY) =$

$(X^tAY) + \operatorname{tr}(X'^tAY) = f(X,Y) + f(X',Y)$

$,Y) = \lambda f(X,Y)$

$) = \operatorname{tr}(Y^tAX) = \operatorname{tr}(Y^tAX)^t = \operatorname{tr}(X^tA^tY^{tt}) =$

$\operatorname{tr}(X^tAY) = f(X,Y)$

s

$A = A^t$

es positivo se cumple que es producto escalar

24/3/2015

)

$$(x,x) = tr(X^t A X) = tr\left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 & x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}\Bigg] = tr\begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 & \sim \\ \sim & x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 \end{bmatrix} =$$

calcula solo
la diagonal porque
solo le interesa eso

$$x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2 = (x_1 + x_2)^2 + X_2^2 + (X_3 + X_4)^2 + X_4^2 > 0$$

se anule $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

orma de ver todo esto formando matriz $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$

vectoral euclídeo se le llama a un espacio vectorial V que
ducto escalar ϕ . V tiene dimensión finita .. En el siempre
base ortonormal de E .

$dim_{\mathbb{R}} V = n$, $f \in S_{\mathbb{R}}(V)$ y B es base de V siendo
$) = (a_{ij})$. Entonces son equivalentes :
producto escalar
eterminante $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall i \leq n$

$V = \langle u_1 \dots u_n \rangle \quad B = \{u_1, \dots u_n\}$

$V_i = \langle u_1 \dots u_i \rangle$

$V_i \times V_i \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_i = f_{|V_i \times V_i}$

$f_i \in S_{\mathbb{R}}(V_i)$ f es producto escalar en V_i

sobre cada uno de estos subespacios V_i desde u_1 hasta u_n

cto escalar denominado f_i . Su matriz es

$$\underset{\overset{\shortparallel}{V_i}}{u_1, \dots, u_i\})} = \begin{pmatrix} \overset{f(u_1,u_1)}{\boxed{a_{11}}} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix} \begin{matrix} f(\ ,u_1) \\ \\ f(\ ,u_i) \end{matrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{f(u_1,\ )} \qquad \underbrace{\quad}_{f(u_j,\ )}$$

s producto escalar ⟹ es congruente con la forma diagonal de

áximo , entonces

$$_i(V_i) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_i = M_{f_i}(B'_i) = \text{ortonormal}$$

ente entonces

$$\begin{matrix} \cdots & a_{ij} \\ & \vdots \\ \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} = P_i^t \, I_i \, P_i$$

$$\begin{matrix} a_{ii} \\ \\ a_{ii} \end{vmatrix} = |P^t| \cdot 1 |P| = |P|^2 \underset{\uparrow}{>} 0$$

$|P|^2$ = real al cuadrado

26/3/2015

Demostración

(Método Gram - Schmidt)

$\dots, u_n\} = \{v_1 \dots v_n\}$ donde $\{v_1 \dots v_n\}$ es base ortonormal

af y $\{u_1, \dots, u_i\} = \{v_1 \dots v_i\} \ \forall \ i \leq n$

$$\frac{}{\|\ \|} = \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}}} \qquad (a_{11} > 0)$$

pótesis de la 2ª , todos los menores son positivos

$$\sqrt{f(u_1,u_1)} = \sqrt{a_{ij}}$$

26/3/2015

$v_1 \rangle$

$\lambda_i \rangle = \{ v_1 \dots v_i \rangle$, siendo $\{ v_1 \dots v_i \}$ un conjunto ortonormal

λf

$\rangle \overset{?}{=} \{ v_1 \dots , v_{i+1} \rangle$ siendo $\{ v_1 \dots v_{i+1} \}$ ortonormal

$\dots , v_i \rangle)^{\perp} = (u_1 , \dots , u_i \rangle$

$_i v_i + v_{i+1}$

$= f(v_i , u'_{i+1}) = x_1 + f(v_1 , u_{i+1})$ $\exists \ x_1 \dots x_i \in \mathbb{R}$

$$\overset{\shortparallel}{-f}(v_1 , u_{i+1})$$

$= f(v_i , u'_{i+1}) = x_i + f(v_i , u_{i+1})$

$$\frac{u'_{i+1}}{\| u_{i+1} \|}$$

$, u'_{i+1}) > 0 \ ?$

$\dots , u_{i+1} \rangle = \langle v_1 \dots , v_{ij} \ u'_{i+1} \rangle$

$$\shortparallel$$

$$\langle u_1 \dots u_i , u'_{i+1} \rangle$$

$_{i+1} \ , u'_{j+1}) > 0$

$v_{i+1} \times v_{i+1} : V_{i+1} \times V_{i+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

$u_1 \dots u_{i+1} \}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i+1} \\ & & \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix}$

$u_1 , \dots , u_i , u'_{i+1}) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & f(u'_{i+1} + u'_{i+1} \end{array}\right)$

$\dots$

$a_{i+1,i+1} \Big) P$

$a_{ij} \ \ a_{ij} \Big| \quad f(u'_{i+1} , u'_{j+1}) = |P|^2 \begin{vmatrix} a_{11} & \dots \\ \vdots & a_{i+1,i+1} \end{vmatrix}$

producto escalar $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall i \leq n \Longleftrightarrow$ tiene base

$\{ u_1 \ldots u_n \}$ de V se puede ortonormalizar por Gram Schmidt

$u \cdot v = \{ 10 x_1 y_1 + 3(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2 x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_3 \}$

$$B_c) = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$| > 0 \quad | \quad | = 1 > 0$

producto escalar ya hay bases ortonormales

$e_3 \} \xRightarrow{(G. Schmidt)} \{ e'_1 , e'_2 , e'_3 \}$

$e'_1 = \dfrac{e_1}{\sqrt{10}}$

$, e_1 \} \xRightarrow{Grand\ Schmidt} \{ e'_3 , e'_2 , e'_1 \}$

$e'_3 = \dfrac{e_3}{\| e_3 \|} = e_3$

7 / 4 / 2015

$$B_c) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

iz anterior define un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$

una base ortonormal (relativamente a f) por Gram-Schmidt

$, e_2 , e_3 \} \xrightarrow[G.S]{} \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ ortonormal.

7/4/2015

$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $|A| = 1$ > 0

lo tanto f es definida positiva

$.) = 3 \Rightarrow \|e_1\| = \sqrt{f(e_1, e_1)} = \sqrt{3}$

$e_2) = -1 \Rightarrow e_1, e_2$ no son ortogonal.

$\neq \langle\, , \rangle \qquad 3x_1^2 - 2x_1x_2 \ldots + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ ortonormal relativo a f

$I_3 = M_{\langle , \rangle}(B_c)$

$$\frac{e_1}{\|e_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)$$

$= \lambda_1 v_1 + \underbrace{e_2}_{\text{ortonormal a } v_1} \Rightarrow 0 = f(\lambda_1 v_1 + e_2, v_1) = \lambda_1 + f(e_2, v_1) =$

$\lambda_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\left.\begin{matrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 3/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} = -1/\sqrt{3} \Bigg\}$$

$$= \frac{(1/3, 1, 0)}{\underbrace{\|(1/3, 1, 0)\|}_{\to (\frac{1}{3}, 1, 0) A \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

$0 = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + e_3, v_1) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + e_3 ; v_2)$

$v_3 = \left(-1/\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

n producto escalar sobre V , ó $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, entonces

= norma = $\sqrt{q(u)} = \sqrt{f(u,u)} \geq 0$

s

verifica :

: 0 y $\|u\| = 0 \iff u = 0 \quad \forall u \in V$

$u\| = |\lambda| \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u \in V$

goras) $\forall u, v \in V \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff f(u,v) = 0$

$u \perp v$

gualdad Schwarz) $\forall u, v \in V \quad |f(u,v)| \leq \|u\| \|v\|$

u, v son linealmente dependiente $\iff |f(u,v)| = \|u\| \|v\|$)

gualdad triangular) $\forall u, v \in V \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

piedades i, ii, v ya se verificaría que es norma.

n propiedades.

$q(u) \qquad q(u) \geq 0 \qquad q(u) = 0 \iff u = 0$ #

$= \sqrt{q(\lambda u)} = \sqrt{f(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda^2 f(u,u)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{q(u)} =$

$\cdot \|u\|$ #

$v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff f(u+v, u+v) = f(u,u) + f(v,v)$

$u) + f(v,v) + 2 f(u,v) = f(u,u) + f(v,v) \iff f(u,v) = 0.$ #

linealmente dependiente $\implies u = \lambda v$

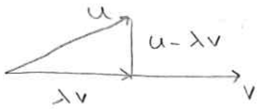
$f(u,v) = \lambda f(v,v) = \lambda \|v\|^2$))

$\|u\| \|v\| = \|\lambda v\| \|v\| = |\lambda| \|v\|^2$

continuación)

7/4/2015

es linealmente independiente, es decir,



$\lambda v, \ u-\lambda v) = \lambda f(v,u) - \lambda^2 f(v,v) \Rightarrow \lambda = \frac{f(v,u)}{\|v\|^2}$

se verifica $\|u\|^2 = \|\lambda v\|^2 + \|u-\lambda v\|^2 \overset{\uparrow}{>} \|\lambda v\|^2 \Longrightarrow$

$\|u-\lambda v\|^2 \neq 0$ ya que
u, v son lin. indep.

$|^2 > \lambda^2 \|v\|^2 = \frac{f(v,u)^2}{\|v\|^4} \|v\|^2 =$

$= \frac{f(v,u)^2}{\|v\|^2}$

$\|v\|^2 > f(v,u)^2$

$\|v\| > |f(v,u)|$ ⁂

$^2 = f(u+v, u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2f(u,v) \leq$

$\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

⁂

Schwarz)

9/4/2015

V, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, y f un producto escalar sobre V

$v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

$\lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda v, u - \lambda v) = 0$

$\lambda = \frac{f(u,v)}{\|v\|^2}$, $\lambda > 0$

$\cos(u,v) = \frac{\|\lambda v\|}{\|u\|} = \frac{|\lambda| \, \|v\|}{\|u\|} =$

$= \frac{f(u,v) \cdot \|v\|}{\|v\|^2 \cdot \|u\|} = \frac{f(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$

$(u,v) = \cos(u,v) \, \|u\| \, \|v\|$, $\|u\|, \|v\| \neq 0$

$\Rightarrow f(u,v) = 0 \Rightarrow \cos(u,v) = 0$

$$\cos(u,v) \doteq \frac{f(u,v)}{\|u\|\,\|v\|}$$

Sea $W \subset V$, se verifica

$_{\mathbb{R}} W^{\perp} = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} W \;\left(= n - \dim_{\mathbb{R}} W \right)$, siendo $n = \dim_{\mathbb{R}} V$

$^{\perp\perp} = W$

$= W \oplus W^{\perp}$

ción

$= \langle u_1, \ldots, u_m \rangle \quad m = \dim_{\mathbb{R}} W$

$= \langle u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n \rangle \xrightarrow{GS} V = \langle v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n \rangle$

endo $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal

$\langle u_1 \ldots u_i \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$

$\langle u_1, \ldots, u_m \rangle = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$

$= \langle v_{m+1}, \ldots, v_n \rangle$

$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n,\; v_i) = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \implies$

$\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

$W^{\perp} = n - m$

$W^{\perp\perp}$

$W = \dim W^{\perp\perp}$ $\Bigg\} \implies W = W^{\perp\perp}$

$W + W^{\perp}$

$\cap\, W^{\perp} = \{0\}$

0 y $u \in W \cap W^{\perp} \implies f(u,u) = 0$ llegando a

contradicción

9/4/2015

$V \longrightarrow V$ la proyección ortogonal de V con base W

$\overset{\shortparallel}{\boxed{W \oplus W^{\perp}}}$

$(u) = \Pi_W(\underbrace{W + W'}_{\text{único.}}) = W$

ción no es biyectiva, no conserva ni la ortogonalidad ni

ito escalar.

ción

$v \in W^{\perp}$, $v \neq 0$, $\lambda_1 v \neq \lambda_2 v$

$v, \lambda_2 v) = \lambda_1 \lambda_2 \, f(v, v) = \lambda_1 \lambda_2 \|v\|^2 \neq 0$

$w(\lambda_1 v), \Pi_w(\lambda_2 v)) = f(0, 0) = \|0\|^2 = 0$

yección no conserva el producto escalar excepto con la

ad

$V \longrightarrow V$ la simetría ortogonal de V con base W

$(u) = w - w'$

es una biyección, la cual conserva el producto escalar

ón

$w_1 + w'_1$ y $u_2 = w_2 + w'_2$, $u_1, u_2 \in V$

$, u_2) \overset{?}{=} f(\sigma_W(u_1), \sigma_W(u_2))$

$_2) = f(w_1 + w'_1, w_2 + w'_2) \underset{\uparrow}{=} f(w_1, w_2) + f(w'_1, w'_2)$

por bilinealidad

$\|$ $\Rightarrow$ conserva prod. escalar

$_1), \sigma_W(u_2)) = f(w_1 - w'_1, w_2 - w'_2) = f(w_1, w_2) - (-f(w'_1, w'_2))$

forma bilineal no es degenerada, f_1 es un isomorfismo.

una aplicación

$\longrightarrow \mathbb{R}$ (vector w se asocia un determinante)

$$\longmapsto \det_B(\underbrace{u,v,w}_{\text{vectores fijos}}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Longrightarrow u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$$

fijamos B, base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (relativo a f)

ase canónica es la ortonormal.

$\in \mathbb{R}^3$ tenemos esta forma lineal, $\forall\, w \in \mathbb{R}^3$

$$(u, v, w+w') = \det_B(u,v,w) + \det_B(u,v,w')$$

$$(u, v, \lambda w) = \lambda \det_B(u,v,w) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

multiplica
toda la columna

es un isomorfismo, entonces, existe un único $\alpha \in \mathbb{R}^3$ tal que

$\omega_{u,v}$, siendo $f_1(\alpha): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces

^{3} : $\forall\, w \in \mathbb{R}^3$ $f_1(\alpha)(w) = \omega_{u,v}(w) = f(\alpha, w) = \det_B(u,v,\cdot)$

elemento es $\alpha = u \wedge v$ (producto vectorial)

(producto vectorial)

$^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una forma bilineal simétrica alternada.

$v, u) = f(u \wedge v, v) = 0$, es decir, el producto

ortogonal con esos vectores

ación

$$\wedge v, u) = \det_\beta(u,v,u) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

forma análoga si $f(u \wedge v, v) = \det_B(u,u,v)$

10/4/2015

continuación)

$= -(v \wedge u)$ (Antisimetría)

tración

$f(u \wedge v, w) = \det_B(u, v, w)$ y $f(v \wedge u, w) = \det_B(v, u, w)$

$\mathbb{R}^3$

s propiedades de los determinantes, si cambiamos una columna de

$\wedge v, w) = \det(u, v, w) = -\det(v, u, w) = -f(v \wedge u, w)$

↑ por definición

nces ya queda demostrado que $f(u \wedge v, w) = -f(v \wedge u, w)$

or lo tanto que $u \wedge v = -(v \wedge u)$

$) \wedge v = (u \wedge v) + (u' \wedge v)$

ación

as propiedades de los determinantes

$f((u+u') \wedge v) = \det((u+u'), v) = \det(u, v) + \det(u', v)$

$f(u \wedge v) + f(u' \wedge v)$, $\Rightarrow (u+u') \wedge v = (u \wedge v) + (u' \wedge v)$

$v = \lambda(u \wedge v)$

$v) = \lambda(u \wedge v)$

ración

as propiedades de los determinantes y porque

es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal alternada de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow \{u, v\}$ linealmente dependiente

ción

$\wedge v = 0 \Leftrightarrow \det_B(u, v, w) = 0 \quad \forall\, w \in \mathbb{R}^3$

$\{u, v\}$ linealmente dependiente $\Rightarrow \det(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda x_1 & z_1 \\ x_2 & \lambda x_2 & z_2 \\ x_3 & \lambda x_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

$$, w) = 0 \quad \forall\, w \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow 0 = \begin{cases} \det_B(u,v,u_1) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} \\ \det_B(u,v,u_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} \\ \det_B(u,v,u_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

ores son nulos

$, u_3\} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3)$ y (y_1, y_2, y_3) son linealmente dependientes.

s que los coordenadas del producto vectorial son los menores anteriores.

$$u \wedge v = (z_1, z_2, z_3)_B$$

$$u \wedge v = z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3$$

$$, u_1) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = x_2 y_3 - x_3 y_2 = z_1$$

$$, u_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = -(x_1 y_3 - x_3 y_1) = z_2$$

$$, u_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - y_1 x_2) = z_3$$

$$u \wedge v = (x_2 y_3 - x_3 y_2 \;, x_3 y_1 - x_1 y_3 \;, x_1 y_2 - x_2 y_1)_B$$

tonormal

$, u_3\}$ $\quad u_1 \wedge u_2 = u_3$

$$u_2, w) = \det_B(u, u_2\, \underset{u_3}{\underset{\parallel}{w}}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\underset{\|u_3\|^2 = 1}{\underset{\parallel}{(u_3, u_3)}} = 1$$

módulo prod. vectorial

13/4/2015

ortogonales (Isomorfismo euclideo / ortogonal)

Sea V es espacio vectorial euclideo con el producto escalar

$\longrightarrow \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Se dice que $\phi : V \to V$ es una aplicación

si :

es un endomorfismo

$\phi(u), \phi(v)) = f(u,v) \ \forall u,v \in V$

$\Longrightarrow \begin{cases} \sigma_W : V \longrightarrow V & \text{aplicación ortogonal} \\ \pi_W : V \longrightarrow V & \text{no es ortogonal (solo si } W = V) \end{cases}$

$\longrightarrow V$ es ortogonal . Se verifica:

erva $\| \ \|$ (norma)

erva la ortogonalidad

biyectiva

$\phi) \subseteq \{1, -1\}$

V , W ϕ - invariante $\Longrightarrow W^{\perp}$ ϕ - invariante .

$u)\| = \sqrt{f(\phi(u), \phi(u)} = \sqrt{f(u,u)} = \|u\|$

$,v) = 0 \Longrightarrow f(\phi(u), \phi(v)) = f(u,v) = 0$

$u \in \ker - \phi$, $f(u,v) = f(u,v) = f(\phi(u), \phi(v)) = f(0, \phi(v)) = 0$

$\Longrightarrow u \in \ker f_i \underset{\substack{\uparrow \\ f.\ \text{prod. escalar.}}}{\Longrightarrow} u = 0$

$\mathbb{R}$, $\lambda \in \sigma(\phi)$, $\exists\, u \neq 0$ tal que $\phi(u) = \lambda u$

$|^2 = f(\phi(u), \phi(u)) = f(u,u) = \|u\|^2 \neq 0$

$$\Big\Downarrow u \neq 0$$

$\lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\Bigg) = M_\phi(B_c)$$

$B_c)$

$e_2\rangle$ (e_3 ortogonal de e_1 y e_2)

$\phi : V \longrightarrow V$ es un isomorfismo y sea B una base de V, son equivalentes:

ortogonal

es base ortonormal

) es ortogonal (es decir $A^t = A^{-1}$)

$B), B)$, es ortogonal

$M_\phi(B) = M(\phi(B), B)$.

Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ $\phi(B) = \{\phi(u_1), \dots, \phi(u_n)\}$

$u_i), \phi(u_j)) = f(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Sea $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j u_j$

ver que $f(\phi(u), \phi(v)) \overset{?}{=} f(u, v)$

$, \phi(v)) = f(\sum \lambda_i \phi(u_i), \sum \mu_j \phi(u_j)) =$

$\mu_j f \underbrace{(\phi(u_i), \phi(u_j))}_{\overset{\text{ortogonal}}{\|} \, \delta_{ij}} = \sum_{ij} \lambda_i \mu_j \delta_{ij} =$

$\lambda_i \mu_j f(u_i, u_j) = \dots = f(u, v)$

tros .

14/4/2015

$(B) = I_n, \quad M_f(\phi(B)) = I_n$

$= P^t A P$ siendo $P = M(B', B)$

$\phi(B)) = M(\phi(B), B)^t \, M_f(B) \, M(\phi(B, B))$

$)) = I_n \iff M(\phi(B), B)^t = M(\phi(B), B)^{-1} \iff M(\phi(B), B) = M_\phi(B)$

$\phi(u_i) \to u_i$. ϕ - es ortogonal

oja 9

ase $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (1,2,0)\}$ del espacio vectorial

sual, estudia si cada una de las siguientes matrices es la

n la base B de una aplicación ortogonal

espacio vectorial usual

$\longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$, 1, 0), \underset{u_2}{\overset{\shortparallel}{(1,0,1)}}, \underset{u_3}{\overset{\shortparallel}{(1,2,0)}}\}$; $\overset{\shortparallel}{u_1}$

$>$ ortonormal $\|u_1\| = \sqrt{2} \neq 1$!!

$\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal

$$= M(B, B_c) \cdot M_\phi(B) \, M(B_c, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gonal $\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ortogonal

ba ortogonalidad $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$

ogonal $\Rightarrow$ det $(\phi) = \pm 1$, entonces

es ortogonal , B es ortonormal

, $M_\phi(B)^t \doteq I_n$

(B) det $M_\phi(B)^t = 1$

$(B))^2 = 1$, det $\phi(B) \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad M_\phi(B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq I$

en el plano.

$V)$, siendo $V = \mathbb{R}^n$, es una estructura usual

$= O(n)$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\eta"] & \mathbb{R}^n \\ {} \arrow[r, "\eta^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\eta \circ \phi \circ \eta^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$O(V) \simeq O(n)$

Estudiar para los valores de n

$O(1)$ $\qquad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$B_c = \{1\}$

$M_\phi(B_c) = (a_{11}) = \begin{cases} (1) \\ (-1) \end{cases}$

$(a_{11})(a_{11}) = 1$

$O(1)$ hay dos elementos

simetría central

$(1) = \{ \underset{O^+(1)}{\underset{\cap}{id_{\mathbb{R}}}} , \underset{O^{-1}(1)}{\underset{\cap}{-id_{\mathbb{R}}}} \}$

14/4/2015

$\simeq O(V)$

$\longrightarrow V$ ortogonal $\quad \dim_{\mathbb{R}} V = 2$

$\{u_1, u_2\}$ ortonormal

$B) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonal

$) \subseteq \{1, -1\}$

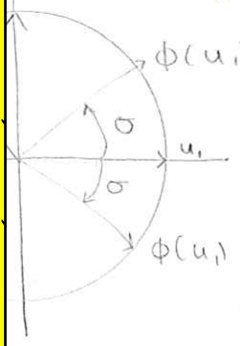
$) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2(b^2 + a^2) = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \\ ac + bd = 0 \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ a,b \neq 0}}{\dfrac{c}{b}} = \dfrac{-d}{a} = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c = b\lambda,\ d = -a\lambda$$

$$) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix} \Rightarrow \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 \longmapsto \cos\sigma\, u_1 + \operatorname{sen}\sigma\, u_2 \\ u_2 \longmapsto -\operatorname{sen}\sigma\, u_1 + \cos\sigma\, u_2 \end{cases}$$

Rotación del plano, amplitud σ

$y \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no son giros. El det $= -1$.

b

$$\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}\Bigg) = \Bigg\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad P_\phi = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ matriz diagonal

d=0 ⇒ no es una aplicación biyectica ⇒ no es ortogonal

$\left.\begin{matrix} b \\ 0 \end{matrix}\right)$ $b, c = \pm 1$

) , $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ⇒ $x^2 - 1$ ⇒ diagonalizable

) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ⇒ por lo de los cosenos

$=0$ ⇒ $a, d = \pm 1$. Son diagonalizables entonces son

bles

), $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

bles el grupo de rotaciones :

$\{\phi_\sigma : 0 \leq \sigma < 2\pi\}$

$M\phi_\sigma(B) = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}$

) ⟺ ∃ B ortonormal con $M\phi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

upo en el espacio.

16/4/2015

$V = 3$ $O_3(V) \ni \phi$, grupo $P_\phi = 3$.

$x]$, $\sigma(\phi) \subseteq \{1, -1\} \Rightarrow \sigma(\phi) \neq \phi$

ó $-1 \in \sigma(\phi)$ (ortogonales) ⇒ $\exists\, u \neq 0$, $u \in V$, $\phi(u) = \lambda u$.

$\frac{u_1}{\|u_1\|}$, $\dim_{\mathbb{R}} \langle u_1 \rangle^\perp = 3 - 1 = 2$, eligimos

$\rangle^\perp = \langle u_2, u_3 \rangle$, $\{u_2, u_3\}$ base ortonormal de $\langle u_1 \rangle^\perp$

16/4/2015

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$

$\rangle \oplus \langle u_1 \rangle^{\perp}$, $\langle u_1 \rangle$ ϕ - invariante „ $\langle u_1 \rangle^{\perp}$ ϕ - invariante $\Longrightarrow$

$$\phi(B) = \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & \\ \hline & M_{\phi|\langle u_2, u_3 \rangle}(\{u_2, u_3\}) \end{array} \right) \Longrightarrow$$

positivas = rotaciones

negativas = matrices se pueden permutar.

emplo)

$$\left. \begin{array}{cc} & 0 \\ \hline s\sigma & -\text{sen}\,\sigma \\ n\sigma & \cos\sigma \end{array} \right)$$

$\sigma(\phi) = 1$. „ $\det \phi = 1$ $\phi \in O_3^+(V)$ es rotación

$$\left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hline & 0 \\ & 1 \end{array} \right)$$

$\det \phi = 1$ $\phi \in O_3^+(V)$. Es una rotación de eje $\langle u_3 \rangle$ y ángulo π.

emplo)

$$\left. \begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ -1 \end{array} \right) \equiv \sigma \langle u_1, u_2 \rangle$$

= Simetría ortogonal respecto un plano

$\det \phi = -1$, $\phi \in O_3^-(V)$

$$\left. \begin{array}{c} 0 \\ \hline -\text{sen}\,\theta \\ \cos\theta \end{array} \right) \equiv \sigma_{\langle u_1 \rangle^{\perp}} \circ \rho_{\langle u_1 \rangle, \theta}$$

. La matriz se puede ver como producto de matrices

$\det \phi = -1$, $\phi \in O_3^-(V)$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{\text{simetría negativa}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{array} \right)}_{\text{giro de amplitud 1 ángulo } \theta}$$

ría ortogonal compuesto de una rotación

da rotación del espacio euclídeo que es dimensional que conserve el lar se puede obtener como una rotación, una simetría respecto o la composición de estas.

En un giro hay que calcular el eje y la amplitud, el ángulo. El eje, cogiendo la matriz en cualquier base, restandole ogonal, se calcula la recta de vectores fijos ctor hay que hacerlo ortonormal.

el ángulo σ, comprimido $0 < \sigma <$ tal que

$+ 2\cos\sigma = tr\, A = tr\, A' = tr\, \phi$. Y es necesario calcularlo

por el seno ya que la rotación no se halla solo con el

hallar el $\cos\sigma$ es fácil

$$\boxed{+ 2\cos\sigma = tr\, A = tr\, A' = tr\, \phi}$$

17/4/2015

cada $\phi \in O(V)$ existe una base ortonormal B tal que

$s \oplus (-I_t) \oplus M_{\sigma_1} \oplus \cdots \oplus M_{\sigma_k}$ donde:

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -sen\,\sigma \\ sen\,\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}$$

$$) = \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & \vdots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \\ 0 & \cdots & & 1 & & & & & \\ \hline & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ \hline & & & & & & & c_1 & -s_1 \\ & & & & & & & s_1 & c_1 \end{array}\right)$$

$u_1 \cdots u_s \quad u_{s+1} \cdots u_{s+t} \quad u_{s+t+1} \quad u_{s+t+2}.$

$\langle u_1, \ldots, u_s \rangle$ ϕ-invariante

$\langle u_{s+1}, \ldots, u_{s+t} \rangle$ ϕ-invariant

$\langle u_{s+t+1}, u_{s+t+2} \rangle$

(Inducción sobre $n = \dim_{\mathbb{R}} V$)

$= \{u_1\}$ $0 \neq u \in V$, $\|u_1\| = 1$

$$B_1) = \lambda = \begin{cases} I_1 \\ -I_1 \end{cases} \qquad \lambda = \pm 1$$

ucción teorema cierto para dimensión $< n$

$1 \in \sigma(\phi) \Rightarrow \exists u_1 \in V_{\phi,1}$, $u \neq 0$, $\|u_1\| = 1 \Rightarrow \langle u_1 \rangle$ ϕ-invariant

$$u_1) \overset{\phi\text{-ortogonal}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \langle u_1 \rangle^\perp \ \phi\text{-invariante y } V = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_1 \rangle^\perp, \dim \langle u_1 \rangle^\perp = n-1 < n \\ \phi|_{\langle u_1 \rangle^\perp} \in O(\langle u_1 \rangle^\perp) \Rightarrow \exists \{u_2, \ldots, u_n\} \text{ base ortonorm} \end{cases}$$

$\rangle^\perp$ con $M_{\phi|\langle u_1 \rangle^\perp}(\{u_2, \ldots, u_n\}) = I_{s'} \oplus (-I_t) \oplus M_{\sigma_1} \oplus \cdots \oplus M_{\sigma_k}$

17/4/2015

$_1, \dots, u_n \}) = I_{s'+1} \oplus (-I_t) \oplus M_{\theta_1} \oplus \dots \oplus M_{\theta_k}$

$1 \in \sigma(\phi) \Rightarrow \exists\, u_1 \in V_{\phi,1}\,,\ u \neq 0\,,\ \|u_1\| = 1 \Rightarrow \langle u_1 \rangle\ \phi$-invariante

$$u_1) \xRightarrow{\phi\text{-ortogonal}} \begin{cases} \langle u_1 \rangle^{\perp}\ \phi\text{-invariante y } V = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_1 \rangle^{\perp}\,,\ \dim \langle u_1 \rangle^{\perp} = n-1 < n \\ \phi|_{\langle u_1 \rangle^{\perp}} \in O(\langle u_1 \rangle^{\perp}) \Rightarrow \exists \{u_2, \dots, u_n\} \text{ base ortonormal de } \phi_{|\langle u_1 \rangle^{\perp}} \end{cases}$$

$\{u_2, \dots, u_s, u_1, u_{s+1}, \dots u_{s+t'}, u_{s+t'}, u_{s+t'+1}, \dots, u_n\}) =$

$I_s \oplus (-I_{t'+1}) \oplus M_{\theta_1} \oplus \dots \oplus M_{\theta_k}$

$(\phi) = \phi \Longrightarrow q_\phi \in \mathbb{R}[x]$ sin raíces reales de grado 2 $\Rightarrow$

$f_1^{a_1} \circ \dots \circ f_m^{a_m}$, $f_i \in \mathbb{R}[x]$ irreducibles distintos 2 a 2 de

, $a_1 \dots a_m > 0$

$\ker f_1(\phi)^{a_1} \oplus \dots \oplus \ker f_m(\phi)^{a_m}$, $\ker f_i(\phi)^{a_i}$ ϕ-invariantes

$er\, f_i(\phi)^{a_i} \in O(\ker f_i(\phi)^{a_i})$

$1: \ker f_i(\phi) \neq 0 \quad \forall\, i = 1, \dots m$

stración

ngamos que $\ker f_i(\phi) = 0$, algún $i \Rightarrow \ker f_i(\phi)^{a_i} = 0$

$\ker f_i(\phi)^{a_i} \longrightarrow 0 = f_i(\phi)^{a_i}(u) = f_i(\phi)\left(f_i(\phi)^{a_i - 1}(u)\right)$

$\Rightarrow f_i(\phi)^{a_i - 1}(u) = 0 \Longrightarrow 0 = f_i(\phi)^{a_i - 1}(u) = f_i(\phi)\left(f_i(\phi)^{a_i - 2}(u)\right) =$

$\Rightarrow f_i(u) = 0 \Longrightarrow u = 0$

Si $\ker f_i(\phi)^{a_i} = 0 \Longrightarrow f_1^{a_1} \dots f_{i-1}^{a_{i-1}} f_{i+1}^{a_{i+1}} \dots f_m^{a_m}(\phi) = 0$

y esto es una contradicción

nces $\ker f_i(\phi)$ es ϕ-invariante.

: $\exists \langle u_1 , u_2 \rangle$ ϕ-invariante $\dim\langle u_1 , u_2\rangle = 2$

: $ax + b \in \mathbb{R}[x]$

$\phi) \neq \{0\} \Longrightarrow \exists \underset{\overset{\neq}{0}}{u} \in V$ tal que $f_1(\phi)(u) = 0$, $f_1(\phi) = (\phi^2 + a\phi + b\,id)(u)$

decir que $\phi^2(u) + a\phi(u) + bu = 0$

$u_1 = u$, $u_2 = \phi(u)$

$u_1 , u_2 \rangle$ ϕ - invariante

$\phi(u_1) = u_2 \in \langle u_1 , u_2 \rangle$

$\phi(u_2) = \phi(\phi(u_1)) = \phi^2(u) = -a\phi(u) - bu_1 = -a u_2 - bu_1 \in \langle u_1, u_2\rangle$

$\mathrm{im}_{\mathbb{R}} \langle u_1 , u_2 \rangle = 2$, ya que $\sigma(\phi) = \emptyset$

$= \phi \Rightarrow \exists \langle u_1 , u_2 \rangle \subset V$ ϕ - invariante , $\dim_{\mathbb{R}} \langle u_1 , u_2 \rangle = 2$

$= \underbrace{\langle u_1 , u_2 \rangle}_{\text{ortonormal}} \oplus \langle u_1, u_2 \rangle^{\perp}$ como ϕ es ortogonal $\Rightarrow \langle u_1 , u_2 \rangle^{\perp}$ es

invariante.

$|_{\langle u_1 , u_2 \rangle} (\{v_1 , v_2\}) \underset{\uparrow\ \sigma(\phi) = \emptyset}{=} \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\sigma & \cos\theta \end{pmatrix}$."

$\phi \,|\, \langle u_1 , u_2 \rangle^{\perp} (\{v_3 , \dots , v_n\}) \underset{\uparrow\ HI}{=} M_{\sigma_1} \oplus \dots \oplus M_{\sigma_{k-1}}$

21/4/2015

E nal autoadjunto

sea V un espacio vectorial euclídeo, con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$

$\longrightarrow V$ un endomorfismo, es autoadjunto si $f(\phi(u), v) = f(u, \phi(v))$

/

Ok Sea ϕ ortogonal y autoadjunto $\iff \phi^2(v) = v$, ϕ^2 id_V $\iff$

etría ortogonal $\forall u, v \in \mathbb{R}$

$) = f(\phi(u), \phi(v)) = f(u, \phi^2(v))$

$- \phi^2(v)) = 0 \quad \forall u, v \in V$

$^2(v) \in \ker f_i = \{0\}$ (f_i producto escalar)

ea B una base ortonormal de V, $\phi : V \longrightarrow V$ un endomorfismo

ntes:

s autoadjunta

(B) es simétrica $(A = A^t)$

ea $B = \{u_1, \dots u_n\}$ $M_\phi(B) = (a_{ij})$

$u_i), (u_j)) = f\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k u_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} f(u_k, u_j) =$

$_1 a_{ki} \delta_{kj} = a_{ji}$

$u_i, \phi(u_j)) = a_{ij}$ (mediante el mismo procedimiento)

#

pectral Exam.

utoadjunto entonces existe B base ortonormal de V

vectores propios de ϕ.

$$, P^t A P = P^{-1} A P = D = \text{diagonal} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P^t \ , \ A = M_\phi(B_0) \ , \{\lambda_1 \dots \lambda_n\} = \sigma(\phi)$$

ón

$$\mathbb{R}[x] \Rightarrow (x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_t)^{a_t} f_1^{b_1} \dots f_s^{b_s}$$

irreducible grado 2

$$\phi - \lambda_1 id_V)^{a_1} \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda_t id_V)^{a_t} \oplus \underbrace{\ker f_1(\phi)^{b_1}}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} \oplus \dots \oplus \ker f_s(\psi)^{b_s}$$

$$\dots \ker f_s(\phi) \neq \{0\}$$

$$er \ f_1(\phi) = \{0\} \Longrightarrow \ker f_1(\phi)^{b_1} = \{0\} \Rightarrow \frac{q_\phi}{f_1^{b_1}}(\phi) = 0$$

$\in \ker f_1(\phi)$, $f_1 = x^2 + a_1 x + a_0$ $\forall a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$, \Phi(u)\rangle = 2$

$\mu \phi(u) \Longrightarrow \phi(u) = (\mu^{-1}\lambda) u$

$\in \mathbb{R}$ si $\mu^{-1}, \lambda \in \sigma(\phi)_{\langle u,v \rangle} = \{\emptyset\}$

vacío

$(u)\rangle$ es ϕ invariante

$\langle u, \phi(u) \rangle$

$) = \phi^2(u) + a_1 \phi(u_1) + a_0(u) = 0$

$(\phi(u)) = -a_0 u - a_1 \phi(u) \in \langle u, \phi(u) \rangle$

$\longrightarrow$ Π autoadjunto.

$, u_2\}$ base ortonormal de Π

$$\{u_1, u_2\}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

21/4/2015

demostración

$(u_1, \Phi(u)\}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$

$-a_1$

$c \underbrace{- b^2}\ + b^2 = a_0 + b^2$

et $(\phi|_{\Pi})$

íces de $x^2 + a_1 x + a_0 + b^2$

$- 4a_0 - 4b^2 = \underbrace{(a_1^2 - 4a_2)}_{\wedge 0} \underbrace{- 4b^2}_{\wedge 0}$

mpone completamente en $\mathbb{R}[x] \Rightarrow q_\phi = (x - \lambda_1)^{a_1 = 2} \dots (x - \lambda_t)^{a_t = 1}$

> 0.

2° $\phi - \lambda_1 id_V)^{a_1} \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda_t id_V)^{at} =$

$- \lambda_i\ id_V) \oplus \dots \oplus \ker(\Phi - \lambda_t\ id_V)$

$\phi - \lambda_i\ id_V) \underline{=} \ker(\phi - \lambda_i d_V) \quad \forall\ \lambda = \lambda_1 \dots \lambda_t$

$\in \ker(\phi - \lambda_i id_V)^2 \overset{?}{\Longrightarrow} u \in \ker(\phi - \lambda id_V)$

$id_V)(u) = 0?$ ¿ $\| \phi - \lambda id_V (u) \| = 0$?

$\lambda id_V)(u), (\phi - \lambda id_V)(u)\Big) = f(u, (\phi - \lambda id_V)^2(u)\Big) =$

ϕ autoadjunto $\Rightarrow \phi - \lambda id_V$ autoadjunto

$f(u, 0) = 0$

Como f es bilineal

$= \ker(\phi - \lambda_1\ id_V) \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda_t id_V)$ existe una base

ada por vectores propios de ϕ (queda por ver que esa base puede ser ortonormal)

23/4/2015

emostración

mostrado

descompone completamente en $\mathbb{R}[x]$, $q_\phi = (x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda t)^{a_t}$

$_i > 0$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

$a_1 = \dots = a_t = 1$,, $q_\phi = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_t)$ $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$\text{cer}\,\underset{\overset{\parallel}{V_{\phi,\lambda_1}}}{(\phi-\lambda_i\, id_V)} \oplus \dots \oplus \underset{\overset{\parallel}{V_{\phi,\lambda_t}}}{\ker(\phi-\lambda_i\, id_V)}$$

es $\exists$ base de V formada por vectores propios de ϕ

$\phi,\lambda_i = e_i$ $\quad B = \underset{\overset{\parallel}{B_1}}{\{v_{11}, \dots, v_{1e_1}\}} \cup \dots \cup \underset{\overset{\parallel}{B_t}}{\{v_t, \dots, v_{te_t}\}}$

ortonormal

$\{u_{i1}, \dots, u_{ie_i}\}$ base ortonormal de V_{ϕ,λ_i}

λ, $v \in V_{\phi,\mu}$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow f(u,v) = 0$?

que tenemos $u \in V_{\phi,\lambda}$, $v \in V_{\phi,\mu}$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow f(u,v) = 0$

$$) = f(\lambda u, v) = f(\phi(u), v) \underset{\overset{\uparrow}{\phi \text{ autoadjunta}}}{=} f(u, \phi(v)) = f(u, \mu v) = \mu f(u,v$$

$\lambda \neq \mu \Rightarrow f(u,v) = 0$

#

secuencia Teorema)

matriz real simétrica $\Rightarrow \exists$ P ortogonal tal que $P^t A P = P^{-1} A P =$

$0 \quad \lambda_n \Big)$, $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\} = \sigma(A)$

c) $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow \phi$ autoadjunto $\Rightarrow$ ya se puede

teorema espectral

27/4/2015

utoadjuntas :

f es un producto escalar sobre V, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y $\phi \in End_{\mathbb{R}} V$

$\in End_{\mathbb{R}} V$ (endomorfismo adjunto) tal que $f(\phi(u), v) = f(u, \psi(v))$

adjunta si $f(\phi(u), v) = f(u, \phi(v)) \ \forall \ u, v \in V \iff \phi$ es simétrica

ón

, base ortonormal, $M = M_f(B) = Id_n$, llamamos $A = M_\phi(B)$;

$l_\psi(B)$?

nos $u = (x_1 \dots x_n)_B \quad v = (y_1, \dots, y_n)_B$

$$\Big)\Big]^t \; I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \, I_n \cdot C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x_n) \, A^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \, C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = C$$

#

$l_{B^*}(\phi^*)$ $\qquad \phi : \underset{B_1}{V_1} \xrightarrow[A]{} \underset{B_2}{V_2} \Rightarrow \phi^* : \underset{B_2^*}{V_2^*} \xrightarrow[A^t]{} \underset{B_1^*}{V_1^*}$

matriz base dual.

#

$\longrightarrow V$ tq $M_\psi(B) = A^t$

Nota:

ormal, ϕ si es autoadjunta $\Rightarrow A = A^t \Rightarrow$ simétrica

27/4/2015

) EUCLÍDEO.

afín euclídeo es un espacio afín A real , tal que el espacio sociado V es euclídeo.

f producto escalar sobre V y el cuerpo es sobre reales ,

dim A = n)

$\mathbb{R}^n$, f producto escalar usual.

ndamental)

o distancia de los puntos como $d(p,q) = \| \vec{pq} \| \ \forall p,q \in A$

B} sistema de referencia $\begin{cases} \text{afín euclídeo} \\ \text{cartesiano} \\ \text{ortonormal} \end{cases}$ si B es base ortonormal

2 ptos.

, ... $a_n)_{\mathbb{R}}$ y $q = (b_1 \dots b_n)_{\mathbb{R}}$ sistema de referencia ortonormal de f

$,q) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2}$

Proposición)

o afín euclídeo, $\forall p,q,r$, se cumple:

$q) \geq 0$ y $d(p,q) = 0 \iff p = q$

$q) = d(q,p)$

$q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

Espacio métrico

$q) \geq |d(p,r) - d(r,q)|$

$.q) = d(p,r) + d(r,q) \iff \vec{pr} = \lambda \vec{pq}$ con $0 \leq \lambda \leq 1$

son demostraciones triviales con las propiedades ya vistas.

demostración

3ª multiplicada por (-1)

$p,q) \leq d(p,r) - d(r,q) \leq d(p,q$

Consecuencia de iii, ii

28/4/2015

$, \overrightarrow{pq}$ linealmente dependiente $\Rightarrow \overrightarrow{pr} = \lambda \overrightarrow{pq}$,, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \leq 1 \Rightarrow d(p,r) + d(r,q) = \| \overrightarrow{pr} \| + \| \overrightarrow{rq} \| = \| \lambda \overrightarrow{pq} \| + \| (1-\lambda) \overrightarrow{pq} \| =$

$|\lambda| \| \overrightarrow{pq} \| + |1-\lambda| \| \overrightarrow{pq} \| \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \leq \lambda \leq 1}}{=} (\lambda + 1 - \lambda) \| \overrightarrow{pq} \| = \| \overrightarrow{pq} \| = d(p,q)$

$\overrightarrow{rq} = \overrightarrow{pq} - \overrightarrow{rp} = \overrightarrow{pq} - \lambda \overrightarrow{pq} = (1-\lambda) \overrightarrow{pq}$

$> 1 \Rightarrow d(p,r) = \| \overrightarrow{pr} \| = |\lambda| \| \overrightarrow{pq} \| > \| \overrightarrow{pq} \| = d(p,q) \Longrightarrow$

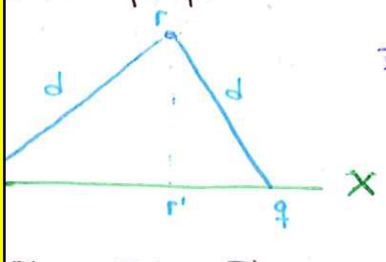
$\Rightarrow d(p,r) + d(r,q) > d(p,q)$.

$< 0 \Rightarrow d(r,q) = |1-\lambda| \| \overrightarrow{pq} \| > \| \overrightarrow{pq} \| = d(p,q) \Rightarrow d(p,r) + d(r,q) >$

$d(p,q)$

$\overrightarrow{pq}$ linealmente independiente $\Rightarrow d(p,r) + d(r,q) > d(p,q)$

$\not{}\ A(p,q) = X$



$\bar{x} \oplus \bar{x}^{\perp}$

$\vec{X}$, $\overrightarrow{r'r} \in \vec{X}^{\perp}$ ortogonal

$) + d(r,q) > d(p,r') + d(r',q) \geq d(p,q)$

$+ \vec{X} \quad \vec{X} = \{ \overrightarrow{pq} \,;\, p,q \in X \}$

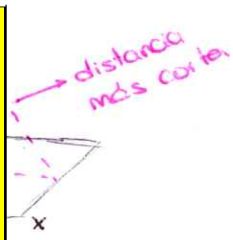
28/4/2015

$= \inf \{ d(p,q) : q \in X \}$

, único $q \in X$ tal que $d(p,X) = d(p,q)$

$= 0 \iff p \in X$

$p) \in X$



$a \in X \Rightarrow \vec{qa} \in \vec{X}$, $\vec{pq} \in \vec{X}^{\perp} \Longrightarrow$

th Pitág

$\Longrightarrow d(p,a) > d(p,q) \Rightarrow \inf \{ d(p,a) : a \in X \} \geq$

$\geq d(p,q) \geq d(p,X) \Rightarrow d(p,X) = d(p,q)$

pongamos que X es un hiperplano:

$\dots + a_n x_n + b = 0$

$x_n)_R = q \in X$

$, \dots, \alpha_n)_R$

$x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

$< (a_1, \dots, a_n)_B >$

$$\frac{\dots + a_n \alpha_n + b |}{\dots + a_n^2} \rightsquigarrow d(p,X)$$

$n)_B \in \vec{X}$

$, a_n)_B (x_1 \dots x_n)_B) = f (\sum a_i u_j , \sum x_i u_j) = \sum_{ij} a_i x_j \cdot \underset{\delta_{ij}}{\underset{\shortparallel}{f(u_i, u_j)}} =$

$x_i = 0$ ⟶ valor de $\vec{x}$

$(p) = p + \lambda (a_1 \dots a_n)$ $\qquad d(p,q) = \| \vec{pq} \| = \| \lambda (a_1, \dots, a_n) \|$

$(\qquad n + \lambda_n)$

100

$p \in X\ ,\ q \in Y$ tal que $d(p,q) = d(X,Y)$

ición

$' = \phi$

$\text{}\in X\ ,\ q \in X$ tal que $\vec{pq} \in \bar{X}^{\perp} \cap \bar{Y}^{\perp}$?

$a + \bar{X}$

$b + \bar{Y}$

efinimos $Z \doteq b + \bar{X} + \bar{Y}$ y $a' \doteq \pi_Z(a) \in Z \cap (a + \bar{Z}^{\perp}) \Rightarrow$

$\vec{aa'} \in \bar{Z}^{\perp} = (\bar{X} + \bar{Y})^{\perp} = \bar{X}^{\perp} \cap \bar{Y}^{\perp}$

$\doteq a' + \bar{X}$

$= a + \bar{X}$ Se cortan $(\vec{a'b} \in \bar{Z} = \bar{X} + \bar{Y})$

$= b + \bar{Y}$

cortan $\Leftrightarrow X \cap Y \neq \phi \Leftrightarrow \vec{ab} \in \bar{X} + \bar{Y}$, $a \in X$
$b \in Y$

$X' \cap Y$,, $p \doteq q + \vec{a'a}$

) $\vec{pq} = \vec{aa'} \in \bar{X}^{\perp} \cap \bar{Y}^{\perp}$

) $q \in Y$

) ¿$p \in X$? $[\ \vec{pq} = \vec{aa'} \Rightarrow \vec{pa} = \vec{qa'} \in \bar{X'} = \bar{X} \Rightarrow p \in a + \bar{X} = X\ ]$

ecial

$_{\mathbb{R}}\ \bar{V} = 3$

$= a_1 + \langle u_1 \rangle$
$= a_2 + \langle u_2 \rangle$ } Se cruzan

$$\text{}_1, r_2) = \frac{|\det(u_1, u_2, \vec{a_1a_2})|}{\| u_1 \wedge u_2 \|}$$

4/5/2015

aso especial

$= d(p_1, p_2)$, siendo $p_1 \in r_1$, $p_2 \in r_2$ y $\overrightarrow{p_1p_2} \in \bar{r}_1^{\perp} \cap \bar{r}_2^{\perp} = \langle u_1 \rangle^{\perp} \cap \langle u_2 \rangle^{\perp}$

$u_1 \wedge u_2) \Rightarrow d(r_1, r_2) = \| \overrightarrow{p_1p_2} \| = \| \lambda(u_1 \wedge u_2) \| = |\lambda| \, \| u_1 \wedge u_2 \|$

mos a ver el valor de λ

$, u_1 \wedge u_2) = f(\lambda(u_1 \wedge u_2), u_1 \wedge u_2) = \lambda \| u_1 \wedge u_2 \|^2$

$$\lambda = \frac{f(\overrightarrow{p_1p_2}, u_1 \wedge u_2)}{\| u_1 \wedge u_2 \|^2}$$

$$d(r_1, r_2) = |\lambda| \, \| u_1 \wedge u_2 \| = \frac{|f(\overrightarrow{p_1p_2}, u_1 \wedge u_2)|}{\| u_1 \wedge u_2 \|} \underset{\uparrow}{=}$$

definición de "$\wedge$"

$$\frac{\overrightarrow{p_1p_2}, u_1, u_2)|}{u_1 \wedge u_2 \|}$$

e ya casi tendríamos demostrada la distancias entre dos rectas

a que es válido tanto para $\overrightarrow{p_1p_2}$ como para $\overrightarrow{a_1a_2}$

$\underset{\in \bar{r}_1}{\overrightarrow{p_1}} + \overrightarrow{p_1p_2} + \underset{\in \bar{r}_2}{\overrightarrow{p_2a_2}} = \mu_1 u_1 + \overrightarrow{p_1p_2} + \mu_2 u_2$ siendo $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$

vamos como afecta al determinante partiendo de $\overrightarrow{a_1a_2}$ en $\overrightarrow{p_1p_2}$.

$$_2, u_1, u_2) = \underbrace{\det(\mu_1 u_1, u_1, u_2)}_{0} + \det(\overrightarrow{p_1p_2}; u_1, u_2) +$$

$$\underbrace{et(\mu_2 u_2, u_1, u_2)}_{0}$$; entonces queda demostrado

$V_1 \,,\, f_1 \quad n_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_1 \quad$ y $d_1(p,q_1) = \sqrt{f_1(\overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_1q_1})} = \|\overrightarrow{pq_1}\|_1$

$, f_2 \quad n_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_2$

e a $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ como $\phi(\overrightarrow{pq}) \overset{def}{=} \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$

entes:

servan distancias $(d_2(\phi(p)\phi(q)) = d_1(p,q) \;\forall\, p,q \in A_1)$

onserva el producto escalar

$(\bar{\phi}(u), \bar{\phi}(v)) = f_1(u,v) \;\forall\, u,v \in V_1)$

afín y $\vec{\phi}$ conserva el producto escalar

es biyectiva)

ación

i) Trivial

i)

$(p,q)^2 = \|\overrightarrow{pq}\|_1^2 = f_1(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}) = f_2(\vec{\phi}(\overrightarrow{pq}), \vec{\phi}(\overrightarrow{pq})) =$

$\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}, \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}) = \|\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}\|_1^2 =$

$d_2(\phi(p), \phi(q))$

ii) $d_1(p,q)^2 = f_1(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}) = f_1(\overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq}, \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq}) =$

$d(p,r)^2 + d_1(r,q)^2 + 2f_1(\overrightarrow{rq}, \overrightarrow{pr})$

$p,q)^2 \overset{i)}{=} d_2(\phi(p), \phi(q))^2 = \dots =$

$_2(\phi(p), \phi(r))^2 + d_2(\phi(r), \phi(q))^2 + 2f_2(\overrightarrow{\phi(r)\phi(q)}, \overrightarrow{\phi(p)\phi(r)})$

$p,q,r \in A_1$

$f_1(\underset{\overset{\shortparallel}{u}}{\overline{rq}}, \underset{\overset{\shortparallel}{v}}{\overline{pr}}) = f_2(\bar{\phi}(\overline{rq}), \bar{\phi}(\overline{pr}))$

4/5/2015

V, f el espacio afín euclídeo, con $n = \dim A$

ación $\phi : A \longrightarrow A$ es un movimiento (rígido) o desplazamiento

ría si conserva distancia

nientos de A, forma un grupo con la $\circ$. Siendo un grupo infinito.

n movimiento $\Longleftrightarrow$ $\vec{\phi} \in O(V)$

u $\Rightarrow \phi(q) = \phi(p_0) + \vec{\phi}(u)$

$\{p ; B\}$ B es ortonormal.

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \,..\, 0 \\ \hline u_1 & \\ \vdots & M_{\vec{\phi}}(B) \\ u_n & \end{array} \right) \qquad \phi(p) = (b_1, \ldots, b_n)_R$$

Mov. rígidos planos)

1

$\{u, v\}$

$$(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & \pm 1 \end{array} \right) = \begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) & \phi = id_A \quad (A_\phi = A) \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & 1 \end{array} \right) & (a \neq 0) \,,\, \phi = \tau_{au_1} \,(A_\phi = \emptyset) \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & -1 \end{array} \right) & \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right) = M_\phi(q ; B) \end{cases}$$

$a - 2x = 0$

Simetría central
respecto $A_\phi = q$
$\{q\} = A_\phi \neq \emptyset$

m_R V , $\phi : V \longrightarrow V$ la aplicación lineal biyectiva

$M_\phi(B) = M(\phi(B, B))$

B' bases de V, tienen la misma orientación si $\det \underbrace{M(B,B')}_{\text{matriz paso}} > 0$

$\Rightarrow \det \phi > 0 = \det M_\phi(B) = \det M(\phi(B), B)$

5/5/2015

del plano afín euclídeo

$= 2 = \dim_{\mathbb{R}} V$, $\phi : A \longrightarrow A$ movimiento $\Leftrightarrow \vec{\phi} : V \longrightarrow V$ ortogonal

1) Si , $\det \phi = 1 \ (>0)$

$B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_\phi(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

ntonces ϕ es una traslación de vector $b_1 u_1 + b_2 u_2$

$B) = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}$, $0 < \sigma < 2\pi \Rightarrow A_\phi = \{p\} \Rightarrow$

$M_\phi(\{p, B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{array}\right)$

nces ϕ es un giro de centro p y ángulo σ.

$\sigma = \pi$, ϕ simetría central respecto de p.

2 (V), $\det \phi = -1 \ (<0) \Rightarrow \sigma(\vec{\phi}) = \{1, -1\}$

$\in V_{\vec{\phi},1}$, y $u_2 \in V_{\vec{\phi},-1}$ y $B = \{u_1, u_2\}$ entonces:

$\phi \neq \emptyset \Rightarrow p \in A_\phi = p + V_{\vec{\phi},1} \Rightarrow$

$M_\phi(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \phi$ simetría de eje A_ϕ

$\phi = \emptyset \Rightarrow M_\phi(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \phi = \tau \circ \psi$

endo ψ = la simetría axial $A_\psi = \langle u_1 \rangle$ y $\tau = \tau_{b_1 u_1}$ = traslació

5/5/2015

cula la simetría de $\mathbb{R}^2$ respecto de su recta $x+y-1=0$

$\to \mathbb{R}^2$

de eje $x+y-1=0$

$-1=0$

$,1 \quad : x+y=0$

$,-1)$ $\qquad p=(1,0)$

$.1) \in V_{\bar{\phi},1} \qquad R=\{p;B\}$

$$(R)=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$M(R,R_c)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)M(R_c,R)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$

$1,0).$

$$(0,0) \xmapsto{\phi} (1,1)$$

$$e_1 \xmapsto{\vec{\phi}} \cdot e_2$$

$$e_2 \longmapsto -e_1$$

---

alcula la ecuación generada de un giro de ángulo $\pi/2$ y

$x+y=1$. Utilita eso para hallar el lugar geométrico del

)

$\to \mathbb{R}^2$ giro de ángulo $\pi/2$ y centro en $x+y=1$

.. $\}$

$.1) : \phi \in S\} = \{\phi_a(1,1) \quad a \in \mathbb{R}\} = \{(-1,1)\}$

$R_a = \{(a,1-a);B_c\}$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Consideremos el plano afín usual cuyas ecuaciones son:

a , $y' = x + b$ con $\mathcal{R}$ (ortonormal)

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ϕ es un movimiento

ca sus movimientos

$$(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

imiento $\Leftrightarrow$ $\vec{\phi} \in O_2 \underset{B=\text{ortonormal}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ortogonal

± 1

$$A_\phi(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \vec{\phi} = -1 \,..$$

$$\begin{matrix} a - x + y = 0 \\ b + x - y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \Rightarrow A\phi : a - x + y = 0 \text{ (simetría)} \\ b \neq -a \Rightarrow A\phi = \emptyset \Rightarrow \phi \text{ simetría con desplazamiento.} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos \pi/2 & -\operatorname{sen} \pi/2 \\ b & \operatorname{sen} \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi \text{ giro de ángulo } \pi/2$$

$$\begin{cases} a - y - x = 0 \\ b + x - y = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} y = \frac{a+b}{2} \\ x = \frac{a-b}{2} \end{matrix} \right\} \quad \text{y centro } \left(\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2} \right).$$

7/5/2015

del espacio afín euclídeo (tridimensional)

$/, f \quad , \phi : A \longrightarrow A$ movimiento $\bar{\phi} : V \longrightarrow V \quad \bar{\phi} \in O(V)$,

ϕ

Si $\quad 1 \notin \sigma(\bar{\phi})$

$\sigma(\vec{\phi}) \Longleftrightarrow A_\phi = \{p\} \Longrightarrow \phi = \begin{cases} -id_A & 1. \\ \sigma \circ P \end{cases}$ con $R = \{p; B\}$

$$(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = -id_A$$

$\cdot P$

$$\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{array}\right) =$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\sigma_{\langle u_1 \rangle^\perp}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & \in \end{array}\right)}_{P_{p+\langle u_1 \rangle, \sigma}} \quad \bar{\phi} \in O^-(V)$$

Si $1 \in \sigma(\vec{\phi})$:

Si $\vec{\phi} \in O^{+}(V)$ entonces :

a) $A_\phi \neq \emptyset \Longrightarrow \phi = \begin{cases} id_A \\ \rho_{p+\langle u_1 \rangle, \sigma} \end{cases}$ con $R = \{p ; B\}$

$p \in A_\phi$ siendo $p \in A_\phi$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{array}\right)$$

b) $A_\phi = \emptyset \Longrightarrow \phi = \begin{cases} \tau_u \\ \tau_u \rho \ , \ u \in \overrightarrow{A_p} = \langle u_1 \rangle \end{cases}$ Movimiento helicoidal

con $R = \{p ; B\}$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c & -s \\ b_3 & 0 & s & c \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c & -s \\ b_3 & 0 & s & c \end{array}\right) \quad A_p : \begin{cases} 0 = 0 \\ b_2 + (c-1)y - sz = 0 \\ b_3 + sy + (c-1)z \ 0 \end{cases}$$

$\shortparallel$

$\tau_{b_1 u_1}$

$\shortparallel$

$M_{\tau_u}(R)$

$u = b_1 u_1$

$\shortparallel$

$M_\rho(R)$

ρ giro ángulo σ

y eje $q + \langle u_1 \rangle$

7/5/2015

$$(\{q ; B\}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{array}\right)$$

$\in O^-(V)$ entonces:

$p \in A\phi \neq \emptyset \Longrightarrow \phi = \sigma_{p + \langle u_1, u_2 \rangle = A\phi}$ $\boxed{\text{Simetría}}$

con $R = \{p ; B\}$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Simetría respecto del plano $\langle u_1, u_2 \rangle$

$= \emptyset \Longrightarrow \phi = \tau_u \circ \sigma \,, \quad u \in \vec{A\sigma}$

Simetría con desplazamiento (o con traslación)

con $R = \{p ; B\}$

$$\phi(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{traslación}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Simetría.}}$$

$A\sigma : \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ b_3 - 2z = 0 \end{cases}$ $\qquad \sigma ; \; A\phi : z = b_3/2$

$\vec{A\phi} = \langle u_1, u_2 \rangle$

Para conseguir los movimientos del espacio basta con las metrías y su composición

Resumen Apuntes

para

Exámenes

2° Semestre

* GA = grupo afín biyectivo

gonal $\Leftrightarrow$ B ortonormal $\Rightarrow$ $\phi(B_o)$ es ortonorma

$M_\phi(B, B_c) \cdot M_\phi(B) M_\phi(B_c, B)$

$\left(\quad '' \quad \right)^{e_1}_{\vdots}$ $\quad$ $\overset{''}{M_\phi(B, B_c)^{-1}} \overset{\text{si es ortonormal}}{=} M_\phi(B, B_c)^t$

$\phi(u_1)\phi\ldots$

o depende de la base $\Rightarrow$ $tr\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 2\cos\theta = tr\, A = x$

$\Leftrightarrow \bar{\Phi} \in O_n \Leftrightarrow \bar{\Phi}$ es ortogonal

$\phi \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\,0\,0 \\ \hline b_1 & \\ b_2 & M_{\bar{\Phi}}(B) \\ \vdots & \end{array}\right)$

es semejanza $\Rightarrow$ $\bar{\Phi}$ conserva ortogonalidad

: Producto homotecias es otra homotecia

ismo centro $\Rightarrow$ c es centro

stinto centro $\begin{cases} c \cdot c' \neq 1 \Rightarrow \text{nuevo centro} \\ c \cdot c' = 1 \Rightarrow \text{traslación} \end{cases}$

$\Rightarrow$ rotación $\quad V_{\phi,1} = A_\phi$

$\Rightarrow$ simetría $\quad V_{\phi,1} = A_\phi$

* proyección $\quad V_{\phi,1}, V_{\phi,0}$

* lar = inversible

* cleos. Si diagonaliza mínimo exponente

* $(\underbrace{H, L}_{\text{subespacios propios}}) = \dim H \cdot \dim L$

* son ϕ-inv. si la Imagen = hiperplano

* $N_1 \subset N_2 \subset N_{③} \Longrightarrow q(x) = (x-\lambda)^{③}$

$\begin{cases} \circ \quad \circ \quad \circ \,] \text{ caja } 3\times 3 \\ \circ \quad \circ \,] \text{ caja } 2\times 2 \\ \circ \,] \text{ caja } 1\times 1 \end{cases}$

* $A = PDP^{-1}$
$D = P^{-1}AP$

* ropo forma cuadrática $f(u, u) = 0$

* coge vector, aplica formula y sale otro, repetir proceso para el 3º

único ϕ-inv. $\Rightarrow$ P_ϕ irreducible

ortogonales si $\begin{matrix} u \in W \\ v \in W' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(v_1, u_1) = 0 \\ f(v_2, u_2) = 0 \\ \vdots \end{matrix}$

, ortogonal u sobre H

$: (\quad)$ $H = \langle (\ ), (\ ), (\ ) \rangle$

$_H(u) = h$ $u = h + h'$ $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + h'$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = f(u - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2, v_1) \\ 0 = f(\underbrace{u - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2}_{h'}, v_2) \end{array}\right\} \lambda_1 \text{ y } \lambda_2 ?$$

$^\perp : 0 = f(x,y)\underset{\in H}{(\quad)} = (x,y) A \underset{\in H}{\left(\quad\right)} = \text{Resultado} \in H^\perp$

étricas $H_n(k) = \{A \in Mat_n(k) : A = -A^t\}$

orfismo $\Longleftrightarrow \exists \ \psi : W \longrightarrow V$ k-lineal : $\psi \circ \phi = id_V$

rfismo $\Longleftrightarrow \exists \ \psi : W \longrightarrow V$ k-lineal : $\phi \circ \psi = id_V$

ección $\Longleftrightarrow V = W_1 \oplus W_2 \quad \pi(u) = u_1$

mía $\Longleftrightarrow V = W_1 \oplus W_2 \quad \sigma(u) = u_1 - u_2 \qquad u = \underset{\in W_1}{u_1} + \underset{\in W_2}{u_2}$

Base = $\ker(id - \phi) = W_1$

Dirección = $\ker(id + \phi) = W_2$ diagonaliza si $W_1 \oplus W_2 = k^n$

$\phi^2 = id \qquad \phi \circ \phi = id$

$\phi^2 = \phi \qquad \phi \circ \phi = \phi \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Base} = W_1 = Im\,\phi \\ \text{Dirección} = W_2 = \ker \phi \end{array} \right.$

za si son autovectores los vectores de los subespacios

$= \lambda v$ — autovalor — ovector $\qquad M \cdot v_1 = \lambda v_1$

$(-1)^n x^n + (-1)^{n-1} t(\phi) x^{n-1} + \ldots + \det(\phi)$

gular $\Rightarrow$ matriz invertible

es iguales $\Rightarrow$ Hiperplanos invariantes

potencia = exponente $q(\phi)$ = nº núcleos para el autovalor

dice marca cuantos autovalores hay en la caja

res x Núcleo en la linea son el orden de la caja

ctiva $M_\phi \Longleftrightarrow \det M_\phi \neq 0$

ompañera

$= P_\phi$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \square \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & \square \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \square \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ — x \\ — x^2 \\ \\ — x^{n-1} \end{matrix}$

$x^{n-1} \ldots + k$

Jordan

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$$

narias $\Rightarrow$ no mismo plano $\Rightarrow |A| \neq 0$

arias $\Rightarrow$ mismo plano $\Rightarrow |A| = 0$

endomorfismo

$a x_1 x_2 + x_1 R + x_2 S + T$

/cuadrica

Clasificar afín

Autov. $A_0 \Rightarrow P_0$ $\qquad D = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P_0^t \end{array}\right) A \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P_0 \end{array}\right)$

$= C'$ conica afinmente euclidea $\Rightarrow \phi$ mov 1 autov. $= \pm 1$

$\phi_1 : A \to A : \quad \phi_1(C) = C'$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & p^t \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$C' = \ldots \overset{\text{aplicamos}}{\underset{\downarrow}{=}}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

$= \lambda \sqcup + \lambda_{\sqcup} + \ldots$

1380

cio afín euclídeo.

imiento $\Longleftrightarrow$ $\bar{\Phi}$ es ortogonal

$\Longleftrightarrow A \cdot A^t = I$

$\Longleftrightarrow A^2 = I$ * Simetría axial $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\perp = -1$ $\in$ plano $= 1$

, $\Longleftrightarrow A^2 = A$

en canónica $\begin{pmatrix} \overset{1}{\underset{u}{\boxed{}}} & Id \end{pmatrix} = T_u$

a $D = P^t A P$

a $D = P^{-1} A P$ * Si es Jordan, no diagonaliza por semejanza

escalar $\Longleftrightarrow$ 1) $f(u,v) = f(v,u)$ y $f(\lambda u, v) = \lambda f(u,v) = f(u, \lambda v)$

2) $f(u,u) > 0$ $u \neq 0$ (definida positiva)

si son matrices todos los menores det > 0

erada $\Longleftrightarrow$ rg f = dim ($\Longrightarrow$ ker $= \phi$)

ropo $\Rightarrow f(u,u) = 0$, en matriz $(x,y)\, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

junto $\Longleftrightarrow$ simétrica. $(f(u,v) = 0)$ $(\langle u, f(v)\rangle = \langle f(u), v\rangle)$

djunto $\Longrightarrow M\phi(B_c) = M\phi(B_c)^t = M\phi(B_c)^{-1} \Longrightarrow \phi^2 = Id$.

ortogonal $0 = f((x,y,z), \underset{\in W}{u}) = f((x,y,z), w_{\in W})$

dt (sacar base ortogonal - ortonormal)

$$v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\frac{\quad e_2)}{\quad)\|} = v_2 = \lambda_1 v_1 + e_2 \Rightarrow 0 = f(\lambda v_1 + e_2, v_1) = \lambda_1 + \underset{\underset{e_2 \cdot M \cdot v_1}{\parallel}}{f(e_2, v_1)}$$

ar no uscal $\Rightarrow$ $u_1 M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, $u_2 M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ $\Big\}$ $(x, y, z) \perp u_1$ y u_2

λr $\perp$

= una rotación ($\det \phi = 1$ $\phi \in O^+$)

$1 + 2\cos\theta = tr\, A = tr\, A' = tr\, \phi$

$_2) = \cos\theta\, u_2 + sen\theta\, u_3$

$\boxed{\cdot\ u_2}$

ortogonal $u = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}_{\in H} + \underbrace{h'}_{\in H^\perp}$

$(\underbrace{u - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2}_{h'}, v_1) = 0$

$(\underbrace{u - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2}_{h'}, v_2) = 0$

* Proy. ortogonal

$\Pi_H(u) = h$

$u = h + h'$

ortogonal $\sigma_L(u) = v'_{\in L} - v_{\in L^\perp}$

$\cdot u$ = Imagen $f(u) = 0 \Rightarrow \ker f$ $A \cdot u = 0$

centro = c razón = r $M_\phi(R_c) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & r & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \\ b_n & 0 & \ddots & r \end{array}\right)$

$\left(\frac{b_1}{1-r}, \ldots, \frac{b_n}{1-r} \right)$ $c = p + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\phi(p)}$

ia $\bar{h} = \lambda id$ $\rightsquigarrow$ único $A\phi$ = centro

n $\bar{\tau} = Id$

a $\phi^2 = Id$

sía general $\sigma = \{1, \lambda\}$

ón $\phi^2 = \phi$

ESPACIOS AFINES

terna (A, V, φ) , A es un conjunto, V es K-espacio vectorial

$A \longrightarrow V$ es una aplicación tal que

$p \in A$ $\varphi_p : A \longrightarrow V$ dada por $\varphi_p(q) = \varphi(p,q)$ es biyectiva

$p, q, r \in A \Longrightarrow \varphi(p,q) + \varphi(q,r) = \varphi(p,r)$ Chasles

$= \overline{pq} = u \in V$

$\dim_K V = 0 \Longrightarrow V = \{0\} \Longrightarrow A = \{p\}$

$A \times V \longrightarrow A$

$(p, u) \longmapsto p+u = p + \overline{pq} = q \quad q \in A$

$\overline{q}$

$\Longleftrightarrow p = q$ • $\overline{qp} = -\overline{pq}$ • $\overline{pq} = \overline{rs} \Longleftrightarrow \overline{pr} = \overline{qs}$

ín $R = \{\sigma, B\}$, σ (centro) = punto del espacio afín (A)

$B = \{u_1, \dots u_n\}$ base espacio afín

)

n canónica $R = \{\sigma = (0,0 \dots 0) ; Bc = \{e_1, \dots, e_n\}$

Se $x_n) \in K^n$

$= (x_1 \dots x_n)_{Bc} \Longrightarrow p = (x_1 \dots x_n)_{Rc}$

afines. Matiz de paso. $R = \{\sigma ; B = \{u_1, \dots u_n\}\}$, $S = \{\sigma' ; B = \{v_1, \dots v_n\}\}$
↳ referencia afín

eferencia de A.

$p = (x_1 \dots x_n)_R \Longleftrightarrow \overline{\sigma p} = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

$p = (y_1 \dots y_n)_S \Longleftrightarrow \overrightarrow{\sigma' p} = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$\sigma\sigma' = \{(b_1 \dots b_n)_B \Longleftrightarrow \sigma\sigma' = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$

$5'\ \overline{p} \Rightarrow x_1u_1 + \dots + x_nu_n = b_1u_1 + \dots + b_nu_n + y_1v_1 + \dots + y_nv_n \Rightarrow$

$+ \dots + b_nu_n + y_1(\underbrace{\underbrace{a_{11}}u_1 + \dots + \underbrace{a_{n1}}u_n}_{v_1}) + \dots + y_n(a_{1n}u_1 + \dots + a_{nn}u_n)$

$a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n$

$+a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = M(B'B) : \text{matriz de paso}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M(B'B) \\ b_n & \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

halla matriz R_c y $R = \{p(1,0,1);\ B = \{\overset{u_1}{(1,1,1)},\ \overset{u_2}{(1,1,0)}\overset{u_3}{(1,0,0)}\}$

$$R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b_1 & \\ b_2 & M(Bc,B) \\ b_3 & \end{array}\right)$$

$)_R = O = (0,0,0)$ $\quad$ O centro canónico $(0,0.0)$

p centro $R = (1.0,1)$

$0,.1)$

$$) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad Bc = \{\overset{e_1}{(1,0,0)}, \overset{e_2}{(0,1,0)}, \overset{e_3}{(0,0,1)}\}$$

$) = e_1 = a_{11}(1,1,1) + a_{21}(1,1,0) + a_{31}(1,0,0)$

$a_{11} = 0 \quad a_{21} = 0 \quad a_{31} = 1$

$0) = e_2 = a_{12}(1,1,1) + a_{22}(1,1,0) + a_{32}(1,0,0)$

$a_{12} = 0 \quad a_{22} = 1 \quad a_{32} = -1$

$) = e_3 = a_{13}(1,1,1) + a_{23}(1,1,0) + a_{33}(1,0,0)$

$a_{13} = 1 \quad a_{23} = -1 \quad a_{33} = 0$

II

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$)_R = M(B_c, B) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{fo} = (-1, 1, -1)$$

$$) = M(B, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} \underbrace{1}_{u_1} & \overset{u_2}{1} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \underbrace{0}_{u_3} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$, B) \Big\} \Rightarrow$$ y hacendo lo mismo para $b_1 b_2 b_3$

$$M(R_c, R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Matriz} = \frac{Adj(M^t)}{\det M}$$

$$= M(R, R_c)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad Adj(M^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

, $W < V$

$= \{p + u : u \in W\}$ siendo X una subvariedad afín de A que pasa

dimensión W

de A $X \subset A \Rightarrow \vec{X} = \{\overline{pq} : p, q \in X\}$

$p + W \Rightarrow \bar{X} = W$; $p \in X \in W$.

imensión

m $W = \dim_K W$

p 0 $\Rightarrow$ puntos afines

$p = 1 \Rightarrow$ rectas afines

$p = 2 \Rightarrow$ planos afines

$p = n - 1 \Rightarrow$ hiperplanos afines

aramétricas y cartesianas de subvariedad afín

W $p = (b_1, b_n)_R$ $R = \{O, B\}$

s

$m \leq n$ $W : \begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{n-m1} x_1 + \cdots + a_{n-mn} x_n = 0 \end{cases}$

n'ecuaciones

cción

S , $X = P_0 + W = p + w$; $X' = P_0' + W' = p' + w'$; entonces:

ϕ

$) \in X \cap X' \Rightarrow X \cap X' = p + W \cap W'$ $W = \vec{X}$, $W' = \vec{X}'$

ssmann

$= \dim \overrightarrow{X \cap X'} = \dim W \cap W' = \dim W + \dim W' - \dim (W + W')$

$X + \dim X' - \dim (W + W')$

III

I

a

$_0 + W \subset A$ y $X' = P_0' + W' \subset A$

$P_0 + W + W' + < \overrightarrow{P_0 P_0'}$

Suma (Fmla Grassmann)

$\cap X' \neq \emptyset$, $P_0 = P_0'$

$(X + X') = \dim X + \dim X' - \dim X \cap X'$

$\cap X' = \emptyset \quad P_0 \neq P_0'$

$(X + X') = \dim X + \dim X' - \dim W \cap W' + \underbrace{1}_{P_0 \neq P_0'}$

$, X' \subset A$

$X' \neq \emptyset$ (secantes)

$\overline{X'}$ ó $\overline{X}' \subset \overline{X}$ (paralelos)

ni 2 $\Rightarrow$ se cruzan

dependiente

$\dots P_m \in A \qquad \dim A = \dim_K V = n \qquad \overset{m+1}{P_0, P_1 \dots P_m}$ afinmente indep.

$\dots , \overline{P_0 P_m}$ son linealmente independientes en V

ente independientes $\Rightarrow R = \{P_0 ; \{\overline{P_0 P_1} , \dots \overline{P_0 P_m}\}\}$ es referencia

$< P_0 ; \{\overline{P_0 P_1} , \dots \overline{P_0 P_n}\} >$ es referencia cartesiana

afines Sean A y A' espacios afines , A , V $\dim A = \dim_K V = n$

$A' = \dim_K V' = n'$

$\longrightarrow A'$ es una aplicación afín si $\exists \ p_0 \in A$:

: $V \longrightarrow V'$ dada por

$(\overline{p_0 p}) = \overline{\phi(p_0) \phi(p)} \quad \forall p \in A$ es K-lineal.

$ho(\overline{p_0 p}) = \overrightarrow{\phi(p_0)\phi(p)}$ lineal $\Longrightarrow h_1(\overline{p_1 p}) = \overrightarrow{\phi(p_1)\phi(p)}$

y $h_0 = h_1$.

la aplicación $M_{\overline{\phi}}(B,B') \in Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$

$$\Big) = M_{\overline{\phi}}(B,B')\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + M_{\overline{\phi}}(B,B')\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ldots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M_{\overline{\phi}}(B,B') \\ b_m & \end{array}\right)}_{M_\phi(R,R')}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Mat_{(n+1)\times(m+1)}(K)$$

del vector u_0

ón son aplicaciones afines $\phi : A \longrightarrow A$ cuya aplicación lineal asociad

ad

$$z = M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ldots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & I_n \\ b_n & \end{array}\right) \qquad (b_1 \ldots b_n)_R = u$$

.

ación siempre es biyectiva $\Longrightarrow \phi = \tau_u \Longrightarrow \exists\, \phi^{-1} = \tau_{-u}$

o es u el invariante (pto invariante)

slaciones

$p) = (p+u) + v = p + (u+v) = \tau_{u+v}$

traslaciones es un grupo conmutativo $(T(A), \circ) \cong (V, +)$

$$\tau_u \longmapsto u$$

aplicación afín.

$\longrightarrow A$ aplicación afín

$: A : \phi(p) = p \} \subseteq A$ (ptos fijos de la aplicación afín)

$\Rightarrow A\phi = p + V_{\bar{\varphi},1}$: $V_{\bar{\varphi},1} = 0$

$\Rightarrow A\phi = p + V_{\bar{\phi},1}$, siendo $p \in A\phi$

es la dirección del punto. = subespacio propio para el autovalor 1

$\longrightarrow A$ afín, es homotecia (de ratón $r \neq 0, 1$) Si $\phi = r \cdot id_V$

$$\text{homotecia} = M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & 0 & & r \end{array}\right)$$

matriz correspondiente. no cambia.

tro - fijo.

$\ldots x_n)_R \in A\phi$ (punto fijo) entonces:

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & 0 & & r \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{b_1}{1-r} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n}{1-r} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$C = p + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\phi(p)}$$

punto R

(punto fijo) $c = \left(\dfrac{b_1}{1-r}, \ldots, \dfrac{b_n}{1-r}\right)_R \in A\phi$

cación biyectiva

$$\{c ; B\} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & r \end{array}\right)$$

porque $\overrightarrow{c\phi(c)}$ está en función de B. $\Rightarrow \overrightarrow{c\phi(c)} = \{0\}$

notecia

homotecia = homotecia

cación homotecias = $\boxed{\text{homotecia}}$ si / no.

$p\phi(p) \in \langle u \rangle$

$c = p + \lambda u \in$ rectas invariantes

$h_{a,\lambda} \circ h_{a,\mu} = h_{a,\lambda\mu}$

$\phi^2 = \phi \Longrightarrow \phi \circ \phi = \phi$

ión es lineal y vectorial con base $V_{\bar\phi,1}$ y dirección
$V_{\bar\phi,0}$.

$\oplus \ \mathrm{Ker}\ \phi$

ión afín con base $\underbrace{Im\,\phi}_{\text{variedad afín}}$ y dirección $\underbrace{\ker\bar\phi}_{\text{subespacio vectorial}}$

a que $A_\phi \neq \emptyset \Rightarrow A_\phi = p + V_{\phi,1} \quad p \in Im\,\phi$

$= Im\,\phi \cap (q + \ker\bar\phi)$

chua

$$M_\phi(\{p_i;B\}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ \dots \ 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} 1 \overset{r}{\ddots} 1 & \\ \hline & 0 \overset{n-r}{\ddots} 0 \end{array} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$$

$p \in A\phi$

$B = \{u \dots u\}$ $\in$ Base
$\in$ Dirección.

$\longrightarrow A$ una aplicación afín en $X(K) \neq 2$ es simetría $\Leftrightarrow \phi^2 = id_A$

$\longrightarrow V$ simetría vectorial base $V_{\bar\phi,1}$ dirección $V_{\bar\phi,-1}$

$_{,1} \oplus V_{\bar\phi,-1}$

$A\phi = p + V_{\bar\phi,1} = A\phi = \phi - (x,y,z) = M\phi - Id = 0$

simetría con base $Im\,\phi$ y dirección $V_{\bar\phi,0} = \ker\bar\phi$

son biyectivos.

$= A\phi \cap (q + V_{\phi,-1}) = q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}$

$B\}$ $B \in A\phi$ $B = \{\underbrace{u_1 \dots u_r}_{V_{\bar\phi,1}}, \underbrace{u_{r+1}, \dots u_n}_{V_{\phi,-1}}\}$

$= M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ \dots \ 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} I_r & \\ \hline & -I_{n-r} \end{array} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$

ción asociada

$\longrightarrow \mathbb{R}^n$

$,z) \underset{\text{promedio}}{=} \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$

hay entre una aplicación afín y una lineal Φ aplic. afín $\vec{\Phi}: V_1 \longrightarrow V_2$

yectiva $\Longleftrightarrow \vec{\Phi}$ inyectiva

ayectiva $\Longleftrightarrow \vec{\Phi}$ suprayectiva

ectiva $\Longleftrightarrow \vec{\Phi}$ biyectiva

plicaciones afines

φ aplicaciones afines: $A_1 \xrightarrow{\Phi} A_2 \xrightarrow{\varphi} A_3$ y $V_1 \xrightarrow{\vec{\Phi}} V_2 \xrightarrow{\vec{\varphi}} V_3$

fines, se verifica que

es afín

$= \vec{\varphi} \circ \vec{\Phi}$

yectiva $A_1 \xrightarrow{\Phi} A_2$, $\Longrightarrow \Phi^{-1}: A_2 \longrightarrow A_1$ es afín y $\overrightarrow{\Phi^{-1}} = \vec{\Phi}^{-1}$

spacios afines $A_1 \simeq A_2$ si $\exists$ $\Phi: A_1 \longrightarrow A_2$ afín biyectiva

$, V_1, \varphi_1)$, (A_2, V_2, φ_2) espacios afines, $\dim A_1 = n_1$ y $\dim A_2 = n_2$

lentes:

$\simeq A_2$

$\simeq V_2$

$u_1 = u_2$

o.

vectorial sobre K $\Longrightarrow GL(V) = \{\phi: V \longrightarrow V \mid \phi$ lineal y biyectiva $\}$

$)$ es grupo isomorfo $(\simeq)$ $(Mat_n(K), \cdot) = GL_n(K)$

afín $\Rightarrow GA(A) = \{\phi: A \to A \mid \phi$ afín biyectiva$\}$

po afín del espacio afín

$)$ grupo invariante del espacio

$_2 \Longrightarrow GA(A_1) \simeq GA(A_2)$

ción

$\xrightarrow{\phi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3$ se verifica

$\quad\quad R_2 \quad\quad\quad R_3$

$R_1, R_3) = M_\psi(R_1, R_3) = M_\psi(R_2, R_3)\, M_\phi\,(R_1 R_2$

n ϕ verifica :

$) = \phi(p) + \bar{\phi}(w)$

es variedad

erva el paralelismo $(x \parallel y \;;\; \overrightarrow{\phi(x)} = \bar{\phi}(\bar{x}))$

erva alineación

A una aplicación afín, $X \subset A$ la variedad

nvariante si $\phi(X) \subset X$, es decir, $\phi_{|X} : X \longrightarrow X$ afín

$= p + W$, X es ϕ-invariante $\Longleftrightarrow \overrightarrow{p\phi(p)} \in W$, $\bar{\phi}(W) \subseteq W$

(aplicaciones afines)

$\longrightarrow A$ afín , $\dim A = 2$, $R = \{p ; B = \{u_1, u_2\}\}$.

$\xrightarrow{\Phi} (x', y')_R$

en el que el valor propio es 1

$1 \in \sigma(\bar{\Phi})$

$\dim_K V_{\bar{\Phi},1}$	A_Φ punto fijos	Nombre	Ecuaciones
2	$\neq \emptyset$	id_A.	$x' = x \quad y' = y$
2	$= \emptyset$	traslación	$x' = 1 + x$, $y' = y$
1	$\neq \emptyset$	homología especial de eje A_Φ	$x' = x$, $y' = x + y$
1	$= \emptyset$	Homología eje seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + x + y$
1	$\neq \emptyset$	Proyeccion de base A_Φ y dirección u_2	$x' = x$, $y' = 0$ λ = razón $\langle u_2 \rangle$ $\downarrow$ dirección eje $A_\Phi = p + \langle u \rangle$
1	$= \emptyset$	Proyección seguida de traslacion	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2$
1	$\neq \emptyset$	Homología general	$x' = x$, $y' = xy$ eje $A_\Phi = p + \langle u_1 \rangle$
1	$= \emptyset$ (no tiene pto fijo)	Homología general seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + \lambda \cdot y$

3/3/2015

$$\phi(p+u) = \phi(p) + \vec{\phi}(u) \in \phi(p) + \vec{\phi}(w)$$

$$\underbrace{\phi(p) + \vec{\phi}(u)}_{\shortparallel} \in \phi(p) + \vec{\phi}(w)$$

$$\phi(p+u) \in \phi(p+w)$$

*

5/3/2015

→ A la aplicación afín, con dim A = 1 , siendo V el espacio vectorial

$R = \{p ; B = \{u_1\}\}$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & \lambda \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \qquad \lambda = M_{\vec{\phi}}(B)$$

constante , $\phi \equiv (b)_R$

$$\vec{\phi} = \lambda id_V \Longrightarrow \begin{cases} \phi \text{ traslación} & \lambda = 1 \\ \phi \text{ homotecia} & \lambda \neq 1 \neq 0 \end{cases}$$

→ A una aplicación afín

$\Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \text{el sistema} \left\{ \begin{array}{l} b_1 + (a_{11} - 1)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - 1)x_n = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{única} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow P_{\vec{\phi}}(1) \neq 0 \Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$$

\#

VII

5/3/2015

$.) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $(p \in A_\phi)$

$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $(b_1, b_2) \neq (0,0)$

$B = \{p ; \{u, u_2\}\}$

u_1 = vector de la traslación

$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M_\phi(R)$

M_ϕ $\left.\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right)$

$u_1 \in V_{\bar\phi, 1}$

$u_2 \in V_{\bar\phi, 0}$

M $\left.\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right)$

$u_2 \longmapsto p + a\lambda u_2$ recta invariante, punto fijo cambia?

$\left.\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \\ 0 & & \lambda \end{array}\right)$

5/3/2015

$1 \notin \sigma(\bar{\phi}) \iff A_\phi = \{p\}$

$\dim_k V_{\bar{\phi},\lambda}$	Ecuaciones
—	$x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_2 y$
2	$\phi \equiv cte$, $\lambda = 0$ $x' = \lambda x$, $y' = \lambda \cdot y$ Homotecia centro p y razón λ
1	$x' = \lambda x$, $y' = x + \lambda y$
	$x' = -a_0 y$, $y' = x - a_1 y$ no hay recta invariante afín ya que $\nexists P_\phi$

$$R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

educible en $k[x] \Rightarrow \sigma(\bar{\Phi}) = \emptyset$

$= x^2 + a_1 x + a_0$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{array}\right) \qquad R = \{p ; \{u_1, \bar{\Phi}(u_1)\}\} \ \exists\, u_1 \in V$$

I

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

$f(u+v,w) = f(u,w)+f(v,w)$

$f(u,v+w) = f(u,v)+f(u,w)$

$f(\lambda u, v) = \lambda f(u,v)$

$f(u,\lambda v) = \lambda f(u,v)$

Formas

ilineales y Cuadràticas

.. trabajamos en $\chi(K) \neq 2$

$\ldots \times V_m \longrightarrow V$ k-multilineal si

$, au_i + a'u_i', u_{i+1}, \ldots, u_m) = a f(u_1 \ldots u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_m) + a' f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i', u_{i+1} \ldots u_m)$

neal $f: V \times V \longrightarrow K \quad \forall\, u,v \in V$

$v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v) \underset{\uparrow}{=} f(u,u) + f(v,v)$

$(v,v)) = f(u,u) + f(v,v)$ $\quad f(u,v) + f(v,u) = 0 \Rightarrow f(v,u) = -f(u,v)$

neal

$\longrightarrow k$ bilineal : $f(u,v) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_i$

(B) = matriz bilineal $= f(u_i, v_j) \in Mat_n(K) = A$

DETERMINANTE ES UNA FORMA MULTILINEAL

$P \quad , A' = M_f(B') \quad , A = M_f(B)$

$$(x_1 \ldots x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1' \ldots x_n')\, \underbrace{P^t A P}_{A'} \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

si: $A' = P^t A P \quad P \in GL_n(K)$

$A'(P^t)^{-1} = A \quad \Rightarrow (P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$

formas bilineales

ca $f(u,v) = f(v,u)$ $S_K(V) = \{ f \in Bil_K(V) : f$ simétrica $\}$

métrica $f(u,v) = -f(v,u)$ $A_K(V) = \{ f \in Bil_K(V) : f$ antisimétrica $\}$

. $Bil_K(V) = \{ f : V \times V \longrightarrow K \mid f$ forma K-bilineal $\}$ y

$, \cdot)$ K-espacio vectorial.

$g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v)$

$)(u,v) = a f(u,v)$

$$il_K(V) \longrightarrow Mat_n(K)$$

$$f \longmapsto M_f(B)$$

$\dim_n Bil_K(V) = n^2$

$$_K(V) = S_K(V) \oplus A_K(V)$$

$f(u_i, u_i)) = f(u_j, u_i)$

f simetrica $\Longleftrightarrow M_f(B)$ simétrica

$$) = \dim_K \{ A \in Mat_n(K) : A = A^t \} = n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$) = \frac{n^2 - n}{2}$$

$; B, B'$ bases f

$$\left.\begin{array}{l} A' = M_f(B') \quad A = M_f(B) \end{array}\right\} \Rightarrow A' = P^t A P \quad , P \in Gl_n(K)$$

$' = (\det P)^2 \det A$ $(\det A' \neq \det A)$

$= rg\ A'$

$= rg\ A$, $A = M_f(B)$

degenerado si $rg\ f = \dim_K V$

al.

$= rg\ M_f(B)$; $f: V \times V \longrightarrow k$ bilineal B base de V

$\rightarrow V^* = \{ W: v \longrightarrow k \mid w$ lineal $\}$

$\rightarrow f_i(u)(v) = f(u,v)$

$\Longleftrightarrow f_i$ es lineal

$. = (f(u_i, u_j)) \Longrightarrow M_{f_i}(B, B^*) = A^t$

$. V^* :$

f Bilineal $\Longleftrightarrow f_d$ es lineal

$f_d(u)(v) = f(v,u)$

$A = f(u_i; u_j) \Rightarrow M_{f_d}(B, B^*) = A$

A simétrica , f es simétrica

Isomorfismos

generada $\Longleftrightarrow f_i, f_d : V \longrightarrow V^*$ son isomorfismos

erada $\Longleftrightarrow rg < 2$

$f \in Bil_k(V)$,, $u \in V$ es isótropo si $f(u,u) = 0$

$\neq 0 \Rightarrow$ no isótropo = antisótropos

ada $\Rightarrow \exists\, u \in V,\ u \neq 0$

étrica $\Longleftrightarrow \forall\, u \in V$, u es isótropo

ntisimétrico $\Rightarrow \exists\, u$, u no es isótropo

$: V \longrightarrow k$ siendo $q(u) = f(u,u)$

$\longrightarrow Q_k(V)$

$q(u+v) = q(u) + q(v) + f(u,v) + f(v,u) = q(u) + q(v) + 2f(u,v)$

$\longrightarrow q_f$

$\Rightarrow f(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v) \right)$

. $f = f_s + f_a \rightarrow q_f(u) = f(u,u) = f_s(u,u) + \underset{-f_a(u,u)=0}{\underset{\shortparallel}{f_a(u,u)}} = f_s(u,u) = q_{f_s}(u)$

ratica $M_q(B) = M_f(B) = A = (a_{ij})$

$) = \sum a_{ij}\, x_i y_j \qquad q(u) = f(u,u) = \sum a_{ij}\, x_i x_j$

$Bil_k(V)$ „ $W^{\perp f} = \{u \in V : f(u,v) = 0,\ \forall v \in W\}$

$u,v) = 0 = f_i(u)(v) = \pm f(v,u) = f_d(u)(v)$

V

- $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$
- $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$
- $W^{\perp\perp} > W$

$^{\perp} \geq n - \dim W$

$W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$

o es degenerada $\Rightarrow$ las propiedades ii, v, vi son igualdades

as

$f \in S_k(V) \Rightarrow f$ no antisimétrica $\Rightarrow \exists\ u$ no isótropo $(u \neq 0)$ cumple:

$^{\perp} = n-1$

$\rangle \oplus \langle u \rangle^{\perp}$

$S_k(V) \Longleftrightarrow M_f(B)$ diagonal, para B de V (base ortogonal respecto f)

$(V) \Longleftrightarrow M_f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{r/2} \oplus O_{n-r}$, para B de V siendo $r = rg(f)$

congruentes si $\exists\ P$ $B = P^t A P$ Si A es simétrica
B también

III

$A \in Mat_n(K)$ A simétrica $\Longleftrightarrow \exists\, P \in GL_n(K) : \boxed{P^t} A P$ diagonal

congruencia.

$u_1, u_2 \in V : f(u_1, u_2) \neq 0$

u_2 linealmente independiente. $\dim_K \langle u_1, u_2 \rangle = 2$

$\langle u_1, u_2 \rangle^{\perp} = n-2$,, $V \in \langle u_1, u_2 \rangle^{\perp}$

$\langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_1, u_2 \rangle^{\perp}$

ester (ley inercia Sylvester) $k = \mathbb{R}$

(V) simétrica $\in Bil_{\mathbb{R}}(V) \Longrightarrow \exists\, B$ base de $V : M_f(B) = I_s \oplus (-I_t) \oplus O_{n-r}$

base : $M_f(B') = I_{s'} \oplus (-I_{t'}) \oplus O_{n-r} \Longrightarrow s = s', t = t'$ s y t únicas

l.

$(V) \Longleftrightarrow M_f(B)$ diagonal

tica $\Longrightarrow M_q(B)$ diagonal

$_n(K)$ simétrica $\Longleftrightarrow \exists\, P \in GL_n(K) : P^t A P$ = mat. diagonal.

cuadrática.

rica $\Longrightarrow f(u_i, u_i) = 0$,, $f(u_j, u_i) = -f(u_i, u_j)$

$v) = \sum a_{ij} x_i y_i \quad a_{ij} = f(u_i\, u_j)$

$(u, u) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j \Longrightarrow q(u) = \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j = 0$

$: V \longrightarrow K \qquad u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

$= a x_1 x_2 + x_1 R + x_2 S + T = \underbrace{a\left(x_1 + \frac{S}{a}\right)\left(x_2 + \frac{R}{a}\right)}_{\frac{a}{4}(x_1'^2 - x_2'^2)} - \underbrace{\frac{RS}{a} + T}_{q'(x_3 \dots x_n)}$

$= x_1 + x_2 + \frac{S}{a} + \frac{R}{a}$

$= x_1 - x_2 + \frac{S}{a} - \frac{R}{a}$

$(FAF^t)^t = F^t A^t F^{tt} = F A^t F^t = F A F^t$ si A es simétrica

rece un cero en 1º posición a_{00} mismas operaciones x fila y columna para que sea distinto de 0 es como

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{12} & \dots \\ _{12} & 0 & \dots \\ & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & . \end{pmatrix} = T_{12} A T_{12}^t$$

agonal con ceros

$$A = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & \cdots \\ a_{12} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_{12} & a_{12} & \cdots \\ a_{12} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \qquad C_1 + C_2 \neq 0.$$

Espacio vect. Euclideo.

ur

$\mathbb{R}$ V y $f \in S_{\mathbb{R}}(V)$, f es producto escalar si es definida positiva

$q(u) > 0 \quad \forall u \neq 0)$

) ⇒ Tma Sylvester, $\mathcal{E}(f) = (s, t)$, $r = s+t$ ⇒ f prod. escalar $\mathcal{E}(f) = (n, 0)$

$f \doteq x_1 y + \dots + x_n y_n$

$q : x_1^2 + \dots + x_n^2$

$M_f(B) = I_n$

. escalar, matriz simétrica : B (base otonormal) $M_f(B) = f(u_i u_j) = I_n$

retados $f \doteq x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

calar sobre V, $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$: $\|u\| = \sqrt{f(u,u)} = \sqrt{q(u)} \geq 0$

$\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_n)(y_1 \dots y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \implies \|(x_1 \dots x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$u) = 1 \implies \|u\| = 1$ (vector unitario).

ial **euclideo** es un espacio vectorial V que tiene un producto escalar d

nita. En el siempre ∃ base otonormal del Espacio Euclideo (E)

$f \in S_{\mathbb{R}}(V)$ y B base de V, $A = M_f(B) = (a_{ij})$. Son equivalentes

prod escalar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall_{i \leq n}$$

la norma f prod. escalar sobre V $\dim_{\mathbb{R}} V = n \Rightarrow \|u\| = \sqrt{q(u)} = \sqrt{f(u,\ldots}$

itico $\overset{v,}{0}$

0 , $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \quad \forall u \in V$

$= |\lambda| \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u \in V$

$\in V \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Longleftrightarrow f(u,v) = 0 \Rightarrow u \perp v$ Pitágoras

$v \in V \quad |f(u,v)| \leq \|u\| \|v\|$ Desigualdad Schwarz

$,v$ son l. dep. $\Longleftrightarrow \|f(u,v)\| = \|u\| \|v\|$

$\in V \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ Desigualdad triangular.

a $u, v \in V$ $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, f prod. escalar sobre V

$| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

$f(\lambda v, u - \lambda v) = 0 \qquad \lambda = \frac{f(u,v)}{\|v\|^2} \qquad \lambda > 0$

$) = \frac{\|\lambda v\|}{\|u\|} = \frac{|\lambda| \|v\|}{\|u\|} = \frac{f(u,v) \cdot \|v\|}{\|v\|^2 \cdot \|u\|} = \frac{f(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$

$\cos(u,v) \|u\| \|v\| \quad ; \|u\|, \|v\| \neq 0 \Rightarrow f(u,v) = 0 \Rightarrow \cos(u,v) = $

$\frac{f(u,v)}{\|u\| \|v\|}$

Sea $W \subset V$, se verifica

$W^{\perp} = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} W \; (= n - \dim_{\mathbb{R}} W)$, siendo $n = \dim_{\mathbb{R}} V$

$= W$

$\oplus W^{\perp}$

ea $\pi_W : \underset{W \oplus W^{\perp}}{\overset{}{V}} \longrightarrow V$ proyección ortogonal de V con base W

$= \pi_W(\underbrace{w + w'}_{\text{único}}) = w$

no biyectiva, no conserva ni ortogonalidad ni producto escalar

II

ea $\sigma_W : V \longrightarrow V$ simetría ortogonal de V con base W

$\sigma_W(u) = w - w'$

ría es una biyección, la cual conserva el producto escalar

$ang(\langle u_1 \rangle, \langle u_2 \rangle) \overset{\circ}{=} ang(u_1, u_2)$

las: $ang(W_1, W_2) \doteq ang(W_1^\perp, W_2^\perp)$

$\dim W_1 = \dim W_2 = n-1$

Sean W_1, W_2, ortogonales respecto de f si $W_1 \subset W_2^\perp$ ó

$W_1^\perp$.

onal

$\mathbb{R}^3 \Longrightarrow u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ prod. escalar con $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

base ortonormal relativo a f de $\mathbb{R}^3$

$= f_d$. $f_i : \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{3*}$ y $f_i(\alpha) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\alpha \longmapsto f_i(\alpha)$ $\beta \longmapsto f_i(\alpha)(\beta) =$

$= f(\alpha, \beta)$

d. escalar $\Rightarrow$ f no degenerada $\Rightarrow rg\, f_i = rg\, f_d = rg\, f$.

enerado $\Rightarrow f_i$ es isomorfismo

$\longrightarrow \mathbb{R}$

$\longrightarrow det_B(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Rightarrow u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$

fijamos B, base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (relativo a f) $\Rightarrow$ base canónica

al.

$\mathbb{R}^3$ tenemos forma lineal

$(u, v, w + w') = det_B(u, v, w) + det_B(u, v, w')$

$(u, v, \lambda w) = \lambda\, det_B(u, v, w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

rismo $\Rightarrow \exists! \; \alpha \in \mathbb{R}^3 : f_i(\alpha) = \omega_{u,v}$, siendo $f_i(\alpha) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

^{3} : $\forall w \in \mathbb{R}^3 \; f_i(\alpha)(w) = \omega_{u,v}(w) = f(\alpha, w) = \det_B(u, v, w)$

v (prod. vectorial),

(prod. escalar) Sea $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ forma bilineal simétrica

$\wedge v , u) = f(u \wedge v, v) = 0$, prod. vectorial es ortogonal con esos vectores

$= -(v \wedge u)$ Antisimétrica.

$') \wedge v = (u \wedge v) + (u' \wedge v)$

$\wedge v = \lambda(u \wedge v)$; $u \wedge (\lambda v) = \lambda(u \wedge v)$

$= 0 \Longleftrightarrow \{u, v\}$ linealmente dependiente

togonal.

ectorial euclídeo $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. $\phi : V \to V$ es

ortogonal si

ndomorfismo

$\phi(u), \phi(v)) = f(u, v) \quad \forall u, v \in V$

al verifica :

va la $\| \;\|$ (norma) * $\sigma(\phi) \subseteq \{1, -1\}$

rva la ortogonalidad * $W < V$, $W \; \phi$ - invariante $\Rightarrow W^{\perp} \; \phi$ - invariante

biyectiva

rva prod. escalar.

III

son equivalentes

ua f

togonal

no , son equivalentes:

ser ua norma

ortogonal

no ortogonalidad

$\lambda \varphi$, $\lambda \in \mathbb{R}$, φ ortogonal

ϕ ortogonal y

y $A = M_\phi(B)$, $A' = M_\phi(B) \Rightarrow A' = P' A P$ $\quad P = M(B', B)$

$\det A = \det A' = \det \phi \Rightarrow \phi$ ortogonal $\Rightarrow A$ es inversible $\Rightarrow$

t $\phi \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$

$< O^-(V) \Rightarrow O(V) = \{\phi : \phi$ es ortogonal $\} = O^+(V) \dot{\cup} O^-(V)$

(V) conservan orientación. Es subgrupo, conserva ortogonalidad

(V) invierte la orientación. No es subgrupo no conserva ortogonalidad

ϕ . B base ortonormal de V , son equivalentes

gonal

base ortonormal

B) ortogonal $(A^t = A^{-1})$

$\phi(B)$, B) es ortogonal $\quad M\phi(B) = M(\phi(B), B)$

$\Rightarrow \det \phi = \pm 1$, entonces $M\phi(B)$ es ortogonal , B ortonormal

$M\phi(B)^t = I_n$

$) \cdot \det M\phi(B)^t = 1$, $(\det M\phi(B))^2 = 1$.

$V = \mathbb{R}^n$, es estructura usual

$= O(n)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\sim", "\eta"'] & \mathbb{R}^n \\ V \arrow[u, "\phi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "\eta^{-1}"'] \arrow[u, "\eta \circ \phi \circ \eta^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$O(V) \simeq O(n)$

pacio

$O_3(V) \ni \phi$ grupo $\rho_\phi = 3$

$x], \sigma(\phi) \subseteq \{1, -1\} \Rightarrow \sigma(\phi) \neq \phi$

$\phi)$

(ϕ) } ortogonales $\Rightarrow \exists\, u \neq 0$, $u \in V$, $\phi(u) = \lambda u$

$\frac{u_1}{\|u_1\|}$, $\dim_{\mathbb{R}} \langle u_1 \rangle^\perp = 2$, elegimos

$= \langle u_2, u_3 \rangle$, $\{u_2, u_3\}$ base ortonormal de $\langle u_1 \rangle^\perp$

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$

$> \oplus \langle u_1 \rangle^\perp$ $\langle u_1 \rangle^\perp, \langle u_1 \rangle$ ϕ - invariante $\Leftarrow$

$$(B) = \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & \\ \hline & M_{\phi\,|\langle u_2, u_3 \rangle}(\{u_2, u_3\}) \end{array}\right) \Rightarrow$$

posit. = rotaciones

neg = matrices que se pueden permutar.

ón del espacio euclídeo dimensional que conserva el prod. escalar

ener como una rotación, una simetría respecto de un plano o

de rectas

ón en un giro hay que calcular el ángulo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} \phi$

$\phi(u_2) = \cos\theta\, u_2 + \text{sen}\,\theta\, u_3$

$\phi \in O(V)$ $\exists$ B ortonormal :

$B) = I_s \oplus (-I_t) \oplus M_{\sigma_1} \oplus \ldots \oplus M_{\sigma_k}$ donde

$\sigma = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\text{sen}\,\sigma \\ \text{sen}\,\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}$

$$) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & -1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 & & \\ \hline & & & & c_1 & -s_1 \\ \multicolumn{2}{c}{0} & & & s_1 & c_1 \end{array}\right)$$

$\underbrace{u_1 \ldots u_s}\ \underbrace{u_{s+1} \ldots u_{s+t}}\ \underbrace{u_{s+t+1}\ \ u_{s+t+2}}$

al euclídeo autoadjunto

vectorial euclídeo, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y $\phi : V \longrightarrow V$ un endomorfismo

unto si $f(\phi(u), v) = f(u, \phi(v))$ $\forall\, u, v \in V$

onormal de V , $\phi : V \longrightarrow V$ endomorfismo. Son equivalentes

oadjunta

B) es simétrica $(A = A^t)$

al

autoadjunto $\Longrightarrow \exists$ B base ortonormal de V formada por vectores

e ϕ. , es decir

$P^{-1} A P = D = \text{diagonal} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ siendo $P^{-1} = P^t$

o (B_0) , $\{\lambda_1 \ldots \lambda_n\} = \sigma(\phi)$

Tma Espectral

$Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica $\Rightarrow \exists\, P$ ortogonal : $P^t A P = P^{-1} A P = D$

$\ddots \begin{matrix} 0 \\ \lambda_n \end{matrix}\Big)$, $\{\lambda_1 \ldots \lambda_n\} = \sigma(A)$

) $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow \phi$ autoadjunto $\Rightarrow$ ya se puede aplicar

espectral.

autoadjuntos

escalar sobre V, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, $\phi \in End_{\mathbb{R}} V \Rightarrow \exists!\, \psi \in$

V (endomorfismo adjunto) : $f(\phi(u), v) = f(u, \psi(v))$

djunta si $f(\phi(v), v) = f(u, \phi(v))\ \forall\, u, v \in V \Leftrightarrow \phi$ simétrica

se ortonormal ϕ si es autoadjunto $\Rightarrow A = A^t \Rightarrow$ simétrica

Espacio Afín Euclídeo

euclídeo es un espacio afín A real, tal que el espacio
sociado V es euclídeo.

producto escalar sobre V y el cuerpo es sobre reales.

m A = n.

e define la distancia de los puntos como $d(p,q) = \|\overline{pq}\| \ \forall \ p,q \in A$

: B} sistema de referencia si B es bar ortonormal

$\ldots a_n)_{\mathbb{R}}$ y $q = (b_1 \ldots b_n)_{\mathbb{R}}$ sist. referencia $\Longrightarrow$

$$q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

euclídeo, cumple

$q) \geq 0$ y $d(p,q) = 0 \iff p = q$

$) = d(,q,p)$

$q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

$,q) \geq |d(p,r) - d(r,q)|$

$q) = d(p,r) + d(r,q) \iff \overline{pr} = \lambda \overline{pq}$ con $0 \leq \lambda \leq 1$

$(p,x) = \inf \{ d(p,q) : q \in X \}$

X : $d(p,X) = d(p,q)$

$) = 0 \iff p \in X$

$d(X,Y) = \inf\{d(p,q) : p \in X, q \in Y\} \geq 0$

$\neq 0 \iff d(X,Y) = 0$

$) = d(p, \Pi_X(p)) = d(p,q)$

$\in Y$

$= d(X,Y) \iff \overline{pq} \in \bar{X}^{\perp} \cap \bar{Y}^{\perp}$

$, q \in Y : d(p,q) = d(X,Y)$

n euclídeo

$. f_1 \quad n_1 = \dim_{\mathbb{R}} V \;,\; d_1(p_1 q_1) = \sqrt{f_1(\overline{p_1 q_1}, \overline{p_1 q_1})} = \|\overline{p_1 q_1}\|_1$

$. f_2 \quad n_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_2$

a $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ como $\phi(\overline{pq}) \doteq \overline{\phi(p)\,\phi(q)}$

entes:

servan distancias

$(\phi(p)\,\phi(q)) = d_1(p,q) \quad \forall\, p,q \in A_1$

serva el producto escalar

$_2(\bar{\Phi}(u), \bar{\Phi}(v)) = f_1(u,v) \quad \forall\, u,v \in V_1$

afín y $\bar{\Phi}$ conserva el producto escalar

ϕ es biyectiva

gido / desplazamiento / isometría

el espacio afín euclídeo, $n = \dim A$

$\phi : A \longrightarrow A$ si conserva la distancia es mov. (rígido), o desplazamie.

entos de A, forman un grupo con la O. Siendo un grupo infinito movimiento

movimiento $\Longleftrightarrow \bar{\Phi} \in O(V)$

$\Rightarrow \phi(q) = \phi(p_0) + \bar{\phi}(u)$

;B} B es ortonormal.

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline u_1 & & & \\ \vdots & & M\bar{\phi}(B) & \\ u_n & & & \end{array}\right)$$

$$\phi(p) = (b_1, \dots, b_n)_R$$

ientos rígidos planos

. $R = \{p; \{u_1\}\}$

$$) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & \pm 1 \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \quad \phi = id_A \quad (A\phi = A) \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & 1 \end{array}\right) \quad (a \neq 0) \text{ ,, } \phi = \tau_{au_1} \; (A\phi = \emptyset) \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & 1 \end{array}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)}_{} = M\phi(q; B) \end{array}\right.$$

Simetría central respecto

$A\phi = q \quad \{q\} = A\phi \neq \emptyset$

$\phi : V \longrightarrow V$ aplicación lineal biyectiva

$B) = M(\phi(B, B))$

bases de V, tienen la misma orientación si $\det M(B, B') > 0$

$^+(V) \Rightarrow \det \phi > 0 = \det M_\phi(B) = \det M(\phi(B), B)$

del plano afín euclídeo $\dim A = 2 = \dim_{\mathbb{R}} V$

A movimiento $\Leftrightarrow \bar{\Phi} : V \longrightarrow V$ ortogonal

$O^+(V)$, $\det \phi = 1 \, (>0)$

* $M_{\bar{\Phi}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_\phi(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

ϕ es traslación de vector $b_1 u_1 + b_2 u_2$

* $M_{\bar{\Phi}}(B) = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}$ $0 < \sigma < 2\pi \Rightarrow A_\phi = \{p\}$

$\Rightarrow M_\phi(\{p, B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{array}\right)$

ϕ giro de centro p y ángulo σ Si $\sigma = \pi$, simetría central resp. de p.

$A\phi \Rightarrow (x, y) = c$

$O^-(V)$, $\det \phi = -1 \, (<0) \Rightarrow \sigma(\bar{\Phi}) = \{1, -1\}$

$\bar{\Phi}, 1$ $u_2 \in V_{\bar{\Phi}, -1}$ $B = \{u_1, u_2\}$ entonces:

* $A\phi \neq \emptyset \Rightarrow p \in A\phi = p + V_{\Phi, 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_\phi(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \phi$ simetría de eje $A\phi$

* $A\phi = \emptyset \Rightarrow M_\phi(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \phi = \tau \circ \varphi$ simetría con desplazamiento

Siendo $\varphi \equiv$ Simetría axial $A_\varphi = \langle u_1 \rangle$ $\tau \equiv \tau_{b_1 u_1} =$ traslació

homotecia $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{array}\right)$ b = razón
centro p.

(aplicaciones afines)

$\longrightarrow A$ afín , $\dim A = 2$, $R = \{p ; B = \{u_1, u_2\}\}$

$\xrightarrow{\Phi} (x', y')_R$

en el que el valor propio es 1

$1 \in \sigma(\bar{\Phi})$

$\dim_K V_{\bar{\Phi},1}$	A_Φ punto fijos	Nombre	Ecuaciones
2	$\neq \emptyset$	id_A	$x' = x \quad y' = y$
2	$= \emptyset$	traslación	$x' = 1 + x$, $y' = y$
1	$\neq \emptyset$	homología especial de eje A_Φ	$x' = x$, $y' = x + y$
1	$= \emptyset$	Homología eje seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + x + y$
1	$\neq \emptyset$	Proyección de base A_Φ y dirección u_2	$x' = x$, $y' = 0$ $\lambda =$ razón $\langle u_2 \rangle$ ↓ dirección eje $A_\Phi = p + \langle u \rangle$
1	$= \emptyset$	Proyección seguida de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2$
1	$\neq \emptyset$	Homología general	$x' = x$, $y' = xy$ eje $A_\Phi = p + \langle u_1 \rangle$
1	$= \emptyset$ (no tiene pto fijo)	Homología general seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + \lambda \cdot y$

3/3/2015

" $\phi(p+u) = \phi(p) + \bar{\phi}(u) \in \phi(p) + \bar{\phi}(W)$

' $\underbrace{\phi(p) + \bar{\phi}(u)}_{\shortparallel} \in \phi(p) + \bar{\phi}(W)$

$\phi(p+u) \in \phi(p+W)$

*

5/3/2015

$\longrightarrow$ A la aplicación afín, con $\dim A = 1$, siendo V el espacio vectorial

$R = \{p ; B = \{u_1\}\}$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & \lambda \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \qquad \lambda = M_{\bar{\phi}}(B)$$

constante, $\phi \equiv (b)_R$

$$\bar{\phi} = \lambda id_V \Longrightarrow \begin{cases} \phi \text{ traslación} & \lambda = 1 \\ \phi \text{ homotecia} & \lambda \neq 1 \neq 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ A una aplicación afín

$\Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\bar{\phi})$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \text{el sistema} \left\{ \begin{array}{l} b_1 + (a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-1)x_n = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{única} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-1 & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow P_{\bar{\phi}}(1) \neq 0 \Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\bar{\phi})$$

\#

$) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $(p \in A_\phi)$

$\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\Big)$ $(b_1, b_2) \neq (0,0)$

$B = \{p ; \{u, u_2\}\}$

u_1 = vector de la traslación

$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

i

$\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\Big) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M_\phi (R)$

M_ϕ $\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\Big)$ $u_1 \in V_{\bar{\phi}, 1}$

$u_2 \in V_{\bar{\phi}, 0}$

M $\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\Big)$

$_2 \longmapsto p + a\lambda u_2$ recta invariante, punto fijo cambia?

5/3/2015

$1 \notin \sigma(\bar{\Phi}) \iff A_\phi = \{p\}$

$\dim_K V_{\bar{\Phi},\lambda}$	Ecuaciones
—	$x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_2 y$
2	$\phi \equiv cte$, $\lambda = 0$ Homotecia centro p y razón λ $x' = \lambda x$, $y' = \lambda \cdot y$
1	$x' = \lambda x$, $y' = x + \lambda y$
	$x' = -a_0 y$, $y' = x - a_1 y$ no hay recta invariante afín ya que $\nexists$ P_ϕ

$$R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

educible en $k[x] \Rightarrow \sigma(\bar{\Phi}) = \emptyset$

$= x^2 + a_1 x + a_0$

$$\left.\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{array}\right)$$

$R = \{p ; \{u_1, \bar{\Phi}(u_1)\}\}$ $\exists$ $u_1 \in V$

V

7/5/2015

del espacio afín euclídeo (tridimensional)

, f , $\phi : A \longrightarrow A$ movimiento $\bar{\phi} : V \longrightarrow V$ $\bar{\phi} \in O(V)$,

Si $1 \notin \sigma(\bar{\phi})$

$\sigma(\vec{\phi}) \Longleftrightarrow A_\phi = \{p\} \Longrightarrow \phi = \begin{cases} -id_A \; 1. \\ \sigma \circ \rho \end{cases}$ con $R = \{p; B\}$

$$(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = -id_A$$

traslación

ρ

$$(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{array}\right) =$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{= \, \sigma_{\langle u_1 \rangle^\perp}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{array}\right)}_{= \, \rho_{p+\langle u_1 \rangle, \sigma}} \qquad \bar{\phi} \in O^-(V)$$

simetría con rotación

Si $1 \in \sigma(\vec{\phi})$:

si $\vec{\phi} \in O^+(V)$ entonces:

a) $A_\phi \neq \emptyset \Longrightarrow \phi = \begin{cases} id_A \\ \rho_p + \langle u_1 \rangle, \sigma \end{cases}$ con $R = \{p ; B\}$ siendo $p \in A_\phi$

$p \in A_\phi$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sigma & -\text{sen}\sigma \\ 0 & 0 & \text{sen}\sigma & \cos\sigma \end{array}\right)$$

giro centro p
ángulo σ

b) $A_\phi = \emptyset \Longrightarrow \phi = \begin{cases} \tau_u \\ \tau_u \rho \text{ , } u \in \overrightarrow{A_\rho} = \langle u_1 \rangle \end{cases}$

Movimiento helicoidad

↑ eje de giro

con $R = \{p ; B\}$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c & -s \\ b_3 & 0 & s & c \end{array}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\substack{\| \\ \tau_{b_1 u_1} \\ \| \\ M_{\tau_u}(R) \\ u = b_1 u_1}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c & -s \\ b_3 & 0 & s & c \end{array}\right)}_{\substack{\| \\ M_\rho(R) \\ \rho \text{ giro ángulo } \sigma \\ \text{y eje } q + \langle u_1 \rangle}}$$

$A_p : \begin{cases} 0 = 0 \\ b_2 + (c-1)y - sz = c \\ b_3 + sy + (c-1)z = c \end{cases}$

traslación con rotación

VI

7/5/2015

$$, (\{q ; B\}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{array}\right)$$

$\in O^-(V)$ entonces:

$p \in A_\phi \neq \emptyset \Longrightarrow \phi : \sigma_{p+\langle u_1, u_2\rangle} = A_\phi$ $\boxed{\text{Simetría}}$

con $R = \{p ; B\}$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Simetría respecto del plano $\langle u_1, u_2 \rangle$

$= \emptyset \Longrightarrow \phi = \tau_u \circ \sigma \, , \quad u \in \vec{A_\sigma}$

Simetría con desplazamiento (o con traslación)

con $R = \{p ; B\}$

$$\phi(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underset{\text{traslación}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}} \underset{\text{Simetría.}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

$$A_\sigma : \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ b_3 - 2z = 0 \end{cases}$$

σ ; $A_\phi : z = b_3/2$

$\vec{A_\phi} = \langle u_1, u_2 \rangle$

Para conseguir los movimientos del espacio basta con las metrías y su composición

Cónicas Cuádricas.

sado en el teorema espectral)

fín real, la cónica se define como

$, x_2) \in A : a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{01} x_1 + 2a_{02} x_2 + a_{00} = 0 \}$

$\in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right) \in Mat_3(\mathbb{R}) \text{ simétrica}$$

$$\overset{\|}{A_0} \in Mat_2(\mathbb{R}) \text{ simétrica.}$$

$$\overset{\|}{M(q)}$$

valentes

$GA(A)$ (grupo afín de A) : $\phi(C) = C'$. C y C' son afinmente

ción equivalencia

ociente es $\{\text{cónicas}\}/\sim$, siendo $\{\text{cónicas}\}$ familia de cónicas

fín A

$\{\text{cónicas}\}/\sim) = 7$ (clases) es

polinomio real no constante posee alguna raíz compleja

polinomio complejo no constante posee alguna raíz compleja

algebraicamente cerrado (todo $\mathbb{C}[x]$ se descompone completamente)

olinomio real es producto de $P[x] \in \mathbb{R}$ de grado ≤ 2

K cuerpo conmutativo $f \in K[x]$ no constante , mónico .

conmutativo y $\alpha_1 \dots \alpha_n \in F$:

es subcuerpo de F

$(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$

Girard - Newton ⤳ Apuntes clase

12/5/2015

II

nica de A es afínmente equivalente a una de las siguientes:

$+ y_2^2 - 1 = 0$	Elipse
$+ y_2^2 = 0$	Elipse degenerada
$- y_2^2 - 1 = 0$	Hipérbola
$- y_2^2 = 0$	Hipérbola degenerada
$^2 - 1 = 0$	Parábola simplemente degenerada
$^2 = 0$	Parábola doblemente degenerada cada pto contado 2 veces.
$- y_2 = 0$	Parábola

P

14/5/2015

ónica, vamos a ver ahora la forma de llegar a su forma para clasificarla.

$$+ 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{01} + 2a_{02} x_2 + a_{00} = (1, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix} \Big)$ es una matriz real simétrica, entonces por el

ectral $\exists\ P \in Mat_2(\mathbb{R})$ ortogonal $(\Leftrightarrow P^t = P^{-1})$ tal que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P .$$

matriz $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ teniendo en cuenta

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$, es igual a $\begin{pmatrix} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & \lambda_1 & 0 \\ a'_{02} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow C' = \phi_1(C)$, siendo $\phi_1 \in GA(A)$ ϕ_1 es movimiento

afín-euclídeo A

2) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ $\bar{\phi}_1$ es movimiento si R es ortonormal

nto $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

l sistema de la cónica $(1, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

es igual a

$) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & \\ 0 & & \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P^t & \\ 0 & & \end{pmatrix}}_{\text{simétrico sin necesidad de que P lo sea también}} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} =$

$, x_2') \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & \lambda_1 & 0 \\ a_{02}' & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

14/5/2015 II

se $PA_0P^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con los distintos casos $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ o $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$

; $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, det $(A_0') = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.

os que estamos en el caso $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & \lambda_1 & 0 \\ a_{02}' & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$_2 \neq 0$

una matriz afín con traslación $M\phi_2(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{01}' \lambda_1^{-1} & 1 & 0 \\ a_{02}' \lambda_2^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 \neq 0$ ya que sino no podríamos hallar

a

oimiento si R es ortonormal.

con $M\phi_2(R)$ llegamos a $\begin{pmatrix} a_{00}' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con la cónica de antes

aso 1

ando $a_{00}' \neq 0$?

$$M\phi_3(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_1 / a_{00}'|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2 / a_{00}'|} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

- Cuando $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ Cónica es una elipse

- Cuando $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ Cónica es una hipérbola

2

$_{0}' = 0 \Rightarrow \quad M\phi_3 (R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_1|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$

Si $\lambda_1 , \lambda_2 > 0$

$y_1^2 + y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una elipse degenerada

Si $\lambda_1 > 0 , \lambda_2 < 0$

$y_1^2 - y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una hipérbole degenerada

caso 1 si $\det(A_0) = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{elipse} \\ \text{hipérbole} \\ \text{elipse degenerada} \\ \text{hipérbole degenerada} \end{cases}$

C

poniendo que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$

n el caso $\begin{pmatrix} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & \underset{=\lambda_1}{0} & 0 \\ a'_{02} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$

una matriz afín con traslación $M\phi_2 (R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a'_{02} \cdot \lambda_2^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

miento si R es ortonormal entonces

(R) llegamos a $\begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & 0 \\ a'_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

IV

14/5/2015

si $a'_{01} = 0$

$$\begin{matrix} {}_{00}' & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & \lambda_2 \end{matrix}\Bigg)$$

-caso 1.1 $a'_{00} \neq 0$, aplicando $M_{\phi_3}(R) = \Bigg($

ϕ_3 movimiento con traslación

$y_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ La cónica es una parábola simplemente degenerada

caso 1.2 $a'_{00} = 0$, aplicando $M_{\phi_3} f R) = \Bigg($

ϕ_3 movimiento con traslación si R es ortonormal.

$y_2^2 = 0 \Rightarrow$ La cónica es una parábola doblemente degenerada

si $a'_{01} \neq 0$

o $M_{\phi_3}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a'_{00}}{2a'_{01}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se obtiene

$$\begin{matrix} a'_{01} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}\Bigg)$$ que siendo $\lambda_2 > 0$ y $M_{\phi_4}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a'_{01} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$

$${}_4(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a'_{01} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$$

ene la cónica $y_1^2 - y_2 = 0$ que es una parábola.

le la Casificación

tinment equivalente a:

$\Leftrightarrow \det(A_0) > 0$, $\det(A) \neq 0$, $\delta(A) = 1 \begin{cases} a_{11} > 0 & |A| < 0 \\ a_{11} < 0 & |A| > 0 \end{cases}$

degenerada $\Leftrightarrow \det(A_0) > 0$.., $\det(A) = 0$

la $\Leftrightarrow \det(A_0) < 0$, $\det(A) \neq 0$

ola degenerada $\Leftrightarrow \det(A_0) < 0$, $\det(A) = 0$ dos rectas que se cruzan

la $\Leftrightarrow \det(A_0) = 0$, $\det(A) \neq .0$

la simplemente degenerada $\Leftrightarrow \det(A_0) = 0$, $rg(A) = 2 \Rightarrow \det(A) = 0$

y $\delta(A) = 0$

la doblemente degenerada $\Leftrightarrow rg(A) = 1$.

B canónica $M^t A M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & & \\ b_2 & & \end{pmatrix}$

a matriz real simétrica, entonces $A = I_s \oplus (-I_t) \oplus 0$

$s - t \,|\, (\neq 3$ si no no hay cónica..en $n = 3)$

autov. posit - nº autov neg

IV$_B$.

sificación afínmente equivalente

$\lvert A \rvert$	Rg A	$S(A)^*$	Nombre	Ec. reducida
$\neq 0$		-1	Elipse no degenerada	$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$
$= 0$			Elipse degenerada	$y_1^2 + y_2^2 = 0$
$\neq 0$			Hipérbola no degenerada	$y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0$
$= 0$			Hipérbola degenerada o (dos rectas se cruzan)	$y_1^2 - y_2^2 = 0$
$\neq 0$			Parábola no degenerada	$y_1^2 - y_2 = 0$
$= 0$	2	0	Parábola simplemente degenerada	$y_2 - 1 = 0$
$= 0$	1		Parábola doblemente degenerada	$y_2^2 = 0$

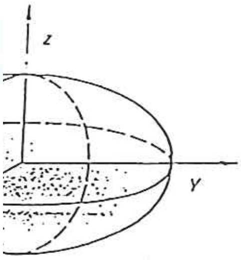
ost - autov reg l

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11} < 0 & \lvert A \rvert > 0 \\ a_{11} > 0 & \lvert A \rvert < 0 \end{array}\right\} \quad S(A) = 1$$

$a_{11} \lvert A \rvert$

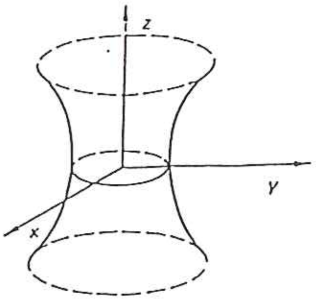
Cónicas espacio afín-euclídeo.

V



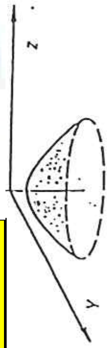
LIPSOIDE:

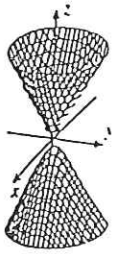
$$\frac{\ ^2}{\ ^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$



(2) HIPERBOLOIDE HIPERBOLICO

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$





(4) CONO IMAGINARIO (un único punto real):

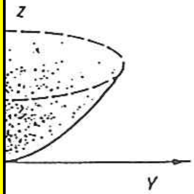
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0$$

OIDE ELIPTICO

$$\frac{Z^2}{c^2} = 1$$

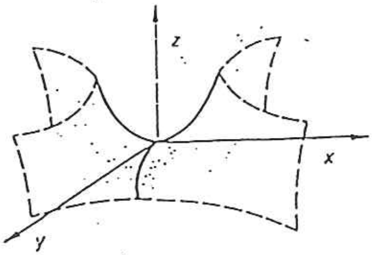
(5) CONO REAL:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$$



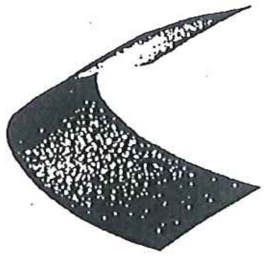
(6) PARABOLOIDE ELIPTICO:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 2Z$$



(7) PARABOLOIDE HIPERBOLICO

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 2Z.$$



RO ELIPTICO:

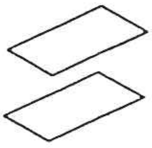
$$\frac{\ ^2}{\ ^2} = 1$$

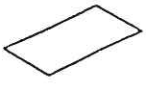
(9) CILINDRO HIPERBOLICO:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

(10) CILINDRO PARABOLICO:

$$X^2 - 2aY = 0.$$





(11) SECANTES:

(12) PAR DE PLANOS PARALELOS:

$$X^2 = a^2.$$

(13) PLANO DOBLE:

$$X^2 = 0.$$

PLANOS IMAGINARIOS CONJUGADOS $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0.$

VI

16/5/2015

sificación afín-euclídea

$_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{01} x_1 + 2a_{02} x_2 + a_{00} = 0$

$x_2)_R$, R es el sistema de referencia ortonormal del

euclídeo A.

euclídeamente equivalente a una y solo una de los siguientes:

$\frac{y_2^2}{b^2} = 1$ $(a \geq b > 0)$ Elipse.

so particular

i $a = b \neq 1 \Rightarrow$ Circunferencia

$\frac{y_2^2}{b^2} = 0$ $(a \geq b > 0)$ Elipse degenerada

$\frac{y_2^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ Hipérbola

so particular

$a = b \neq 1 \Rightarrow$ Hipérbola equilátera

$\frac{^2}{b^2} = 0$ $(a, b > 0)$ Hipérbola degenerada

$p y_2 = 0$ $(p > 0)$ Parábola

$= 0$ $(a > 0)$ Parábola simplemente degenerada

Parábola doblemente degenerada

21/5/2015

ricas

pacio afín real de dimensión 3. y R el sistema de referencia.

$, x_2, x_3)_R$, entonces la cuadrática es

$$x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{01} x_1 + 2a_{02} x_2 +$$

$$+ a_{00} = 0 \quad , \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

a matriz simétrica de la cuádrica.

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & & & \\ a_{02} & & A_0 & \\ a_{03} & & & \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$_n(\mathbb{R})$ simétricas

$\delta \qquad \delta(A_0) = \delta_0$ son invariantes

$y - 1$

$r(A) = r \quad , \quad r(A_0) = r_0$

variantes $(r, \delta, r_0, \delta_0)$

C y C' son afínmente equivalentes si $\exists\ \phi \in GA(A) : \phi(C) = C'$

afín-euclídeas , $\exists\ \phi$ - movimiento tal que $\phi(C) = C'$

as clases en el espacio afín.

VII

21/5/2015

...sificación cuádricas afín-euclídea

...a C del espacio afín real tridimensional es afínmente

...a una y solo una de las siguientes ecuaciones reducidas

	...reducida en afín-euclídea	Nombre	rango, signatura $(\underline{r}, \delta, r_0, \underline{\delta_0})$
1	$+ y_3^2 - 1 = 0$	Elipsoide	$(4, \underset{\overset{\shortparallel}{4}}{2}, 3, 3)$
2.	$+ y_3^2 = 0$	(un punto) Cono imaginario	$(3, 3, 3, 3)$
3.	$y_3^2 - 1 = 0$	hiperboloide de una hoja Hiperbólico	$(4, 0, 3, 1)$
4.	$- y_3^2 - 1 = 0$	hiperboloide de dos hojas Elíptico	$(4, 2, 3, 1)$
5.	$- y_3^2 = 0$	Cono Real	$(3, \underset{2}{1}, 3, 1)$
6.	$- y_3 = 0$	Paraboloide elíptico	$(4, 2, 2, 2)$
7.	$^2 - y_3 = 0$	Paraboloide hiperbólico	$(4, 0, 2, 0)$
8.	$^2 - 1 = 0$	Cilindro elíptico	$(3, 1, 2, 2)$
9.	$_2 - 1 = 0$	Cilindro hiperbólico	$(3, 1, 2, 0)$
10.	$_3 = 0$	Cilindro parabólico	$(3, 1, 1, 1)$
11	$y_2^2 = 0$	Par de planos secantes	$(2, 0, 2, 0)$
12.	$y_2^2 = 0$	recta: Par de rectas imaginarias conjugadas	$(2, 2, 2, 2)$
13.	$= 0$	Par planos paralelos	$(2, 0, 1, 1)$
14.		Plano doble	$(1, 1, 1, 1)$

* para saber cuáles.

imeras cc. reducidas, cuádricas se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} & a'_{03} \\ \lambda'_{01} & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda'_{02} & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda'_{03} & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

6, 7, 8, 9, 10, 12 (*) tienen dos autovalores no nulos

ntes

olinomio real no constante posee alguna raíz compleja.

polinomio complejo no constante posee alguna raíz compleja

es algebraicamente cerrado (todo polinomio complejo

one completamente en $\mathbb{C}[x]$)

polinomio real es producto de polinomios reales de grado ≤ 2

ón

$[x]$, $g = \sum a_i x^i \quad a_i \in \mathbb{C}$

inomio complejo conjugado, $\bar{g} \overset{\cdot}{=} \sum \bar{a}_i x^i$

definimos

$= g \cdot \bar{g} = \sum a_i x^i \cdot \sum \overline{a_j} x^j = \underset{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i,j \leq m}}{\sum \sum} (a_i \overline{a_j}) x^{i+j}$ $\in \mathbb{R}$

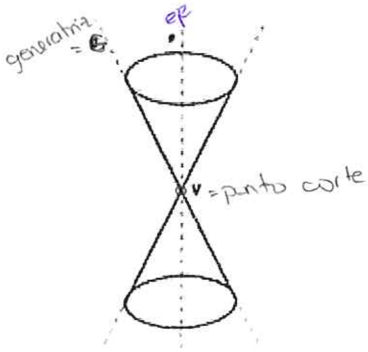
$\overline{}_j = \sum \overline{a_i} \overline{\overline{a_j}} = \sum \overline{a_i} a_j$

$f(\alpha) = 0 = (g\bar{g})(\alpha) \Rightarrow 0 = g(\alpha)\bar{g}(\alpha) = (g\bar{g})(\alpha)$

$) = 0 \Rightarrow g(\bar{\alpha}) = \bar{0} = 0$

CURVAS EN EL PLANO: CIRCUNFERENCIAS, ELIPSES, HIPÉRBOLAS Y PARÁBOLAS

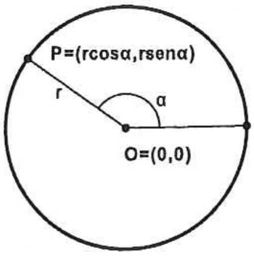
pacio, si dos rectas se cortan en un punto V y una recta gira en torno a la otra, se
ına superficie cónica. La recta que gira recibe el nombre de **generatriz** y la otra se
a **eje** de giro. El punto de intersección de ambas rectas se llama **vértice**.



ección de una superficie cónica con un plano que **no** pasa por su vértice, da lugar a
s llamadas **cónicas**. Las **circunferencias** son las curvas que se obtienen cortando
rficie cónica con un plano perpendicular al eje. Las **elipses** son las curvas que se
cortando una superficie cónica con un plano que no es paralelo a ninguna de sus
ces. Las **hipérbolas** son las curvas que se obtiene al cortar una superficie cónica
lano que es paralelo a dos de sus generatrices. Las **parábolas** son las curvas que se
al cortar una superficie cónica con un plano paralelo a una sola generatriz.
tros vamos a estudiar estas curvas como **lugares geométricos**.

CUNFERENCIA de **centro** O y **radio** $r > 0$ es el lugar geométrico de los puntos
, P, tales que la distancia a O es r. Es decir, $d(P,O) = r$.
centro es $O = (0,0)$ y el radio es $r > 0$ la ecuación cartesiana de la circunferencia
$^2 = r^2$, mientras que las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in [0, 2\pi]$$



neral, si el centro es $O = (a,b)$ y el radio es $r > 0$ su ecuación cartesiana es
+ $(y-b)^2 = r^2$, mientras que las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in [0, 2\pi]$$

la la ecuación de la circunferencia de centro $(-3, 0)$ y que pasa por $(3, -8)$.

la la ecuación de la circunferencia que pasa por $(3, 0)$, $(-1, 0)$ y $(0, 3)$.

la los valores de k para que la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0$ represente:
ına circunferencia, **b)** un punto, **c)** ninguna línea. $= \phi$

considera la circunferencia $C : x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$. Determina los valores de ıra que la recta $y = 2x + k$ sea:
ːxterior a C, **b)** tangente a C, **c)** secante a C.

la las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2+4x+6y-12 = 0$ os puntos de abscisa 2.

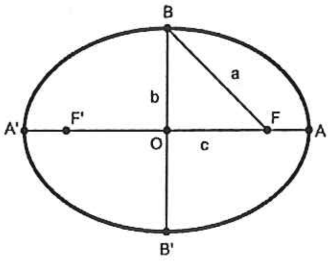
uentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1, -2)$ y $(3, 2)$ centro está en la recta $y = -2x$.

a la ecuación de la circunferencia de centro $(1, 2)$ y tangente a la recta $4x+3y = 35$. a el punto de contacto.

a las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ trazadas le el punto $(2, 0)$.

a los puntos de intersección de las dos circunferencias. $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$, $y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$, y la longitud de la cuerda común.

SE es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la **suma** de las a dos puntos fijos F y F', llamados **focos**, es constante. Si llamamos $2a$ a esa los puntos P cumplen $d(P, F) + d(P, F') = 2a$.



eremos la recta que une los focos F y F' y O su punto medio. En O situamos le coordenadas y en la recta que une los focos el eje OX. A los puntos A y A', n de la elipse con la recta que pasa por F y F', se les llama **vértices** de la elipse. ue $OA = a$, ya que $d(A, F) + d(A, F') = 2a$. También se llama **vértices** a los y B' que son intersección de la mediatriz del segmento FF' con la elipse. Como unto de la elipse $BF' + BF = 2a$ y, como $BF' = BF$, se tiene que $BF = a$. b a OB y c a la mitad de la distancia entre los focos, se tiene que $a^2 = b^2 + c^2$. **xcentricidad** al cociente $e = \frac{c}{a}$. En la elipse $e < 1$. La ecuación reducida de la ecto de sus ejes es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in [0, 2\pi]$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

da la elipse $4x^2+9y^2 = 900$, encuentra la longitud de los semiejes y su excentricidad.

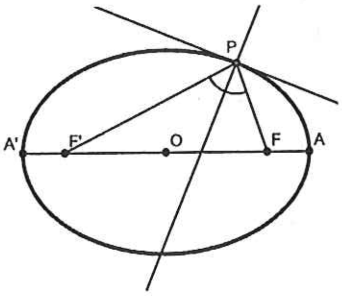
cribe un rectángulo de lados paralelos a los ejes y perímetro 12 en la elipse $x^2+2y^2 =$

da la elipse $3x^2+2y^2 = 21$, halla los valores de n para los cuales la recta $x-2y-n = 0$

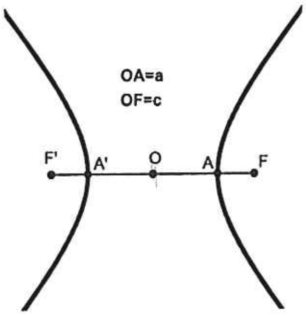
secante a la elipse, b) tangente a la elipse, c) exterior a la elipse.

lla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16} = 1$, el punto de abscisa 1 situado en el primer cuadrante.

da la elipse $x^2+4y^2 = 100$ y uno de sus puntos $(6,4)$, comprueba la propiedad ›métrica siguiente (válida en cada punto): la tangente y la normal en ese punto son bisectrices de los ángulos formados por los radios vectores del punto. [Observación: $\overline{27 \pm 60\sqrt{3}} = 10 \pm 3\sqrt{3}$].



ÉRBOLA es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la **diferencia** stancias a dos puntos fijos F y F', llamados **focos**, es constante. Si llamamos $2a$ a ante, son los puntos P tales que $|d(P,F)-d(P,F')| = 2a$.



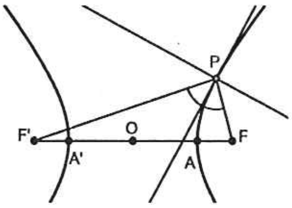
untos A y A' se llaman **vértices** de la hipérbola. Consideremos el segmento que F' y sea O su punto medio. En O situamos el origen de coordenadas y en la recta los focos el eje OX: es decir para cierto $c > 0$, $F = (c,0)$, $F' = (-c,0)$. Se llama **cidad** al cociente $e = \frac{c}{a} > 1$. Si, además, para $b > 0$ se cumple que $a^2+b^2 = c^2$, la reducida de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ se llaman **asíntotas** érbola.

do $a = b$, la hipérbola se dice que es equilátera y su ecuación reducida es $x^2-y^2 =$ En este caso, las asíntotas son las rectas $y = \pm x$ y la ecuación de la hipérbola a referida a sus asíntotas es $xy = k$, siendo k una constante.

cuentra los vértices y los focos de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

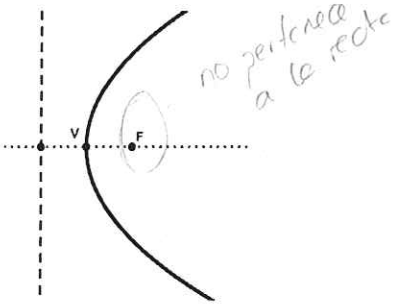
cribe un triángulo equilátero en la hipérbola $x^2 - 7y^2 = 4$, que tenga un vértice en vértice de la hipérbola.

la la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 36$ y uno de sus puntos $(10, 4)$, comprueba la propiedad métrica siguiente (válida en cada punto): la tangente y la normal en este punto son bisectrices de los ángulos formados por los radios vectores del punto. [Observación: $\overline{61 \pm 60\sqrt{5}} = 5\sqrt{5} \pm 6$].



resenta la familia de hipérbolas equiláteras definida por la ecuación $xy = k$, para valores de $k > 0$. Compárala con la familia $xy = k'$, con $k' < 0$.

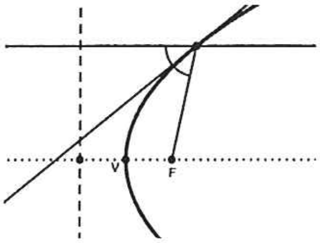
ÁBOLA es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto nado **foco**, y de una recta fija r, llamada **directriz**. Se llama **eje** de la parábola a erpendicular a la directriz trazada desde el foco. Se llama **vértice** de la parábola ntersección de ésta con el eje. Si la directriz es la recta $x = \frac{-p}{2}$ y el foco es el punto), la ecuación de la parábola es $y^2 = 2px$. La excentricidad de una parábola siempre



uentra la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x = 5$ y el foco l punto $F = (-4, 0)$

a las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $y^2 = 8x$ en los puntos bscisa $x = 2$.

a la parábola $y^2 = 4x$, y uno de sus puntos $P = (4, 4)$, comprueba la propiedad nétrica (válida en cada punto): la tangente a la parábola en P es la bisectriz del ılo formado por la recta PF y la perpendicular por P a la directriz.



AL 2015

1)

$r = |(-6,8)| = \sqrt{36+64} = 10$

$(y-0)^2 = 10^2 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 10^2$

2)

$(-1,0)$ y $(0,3)$

$+ (y-b)^2 = r^2$

$+ Ax + By + C = 0$

$C = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

$r^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$

$$\left.\begin{array}{l} 9 + 3A + C = 0 \\ 1 - A + C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 9 + 3A + C = 0 \\ 3 - 3A + 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow 12 + 4C = 0 \quad \boxed{C = -3} \quad \boxed{A = -2}$$

$9 + 3B + C = 0 \Rightarrow 6 = -3B \; \boxed{B = -2}$

$C = (1, 1)$

[illegible]

$^2 + (y-1)^2 = 5.$

conjugados = ortogonales respecto un plano

super 0 = orthogonal = el avobador =

12/5/2015

plano afín

$+4xy+y^2-20x-12y+a=0 \quad a\in\mathbb{R} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\shortparallel$

$x^2+(2x+y)^2-12(2x+y)+4x+a$

${}^2+y'^2-12y'+4x'+a$

$\shortparallel$

$-(x'-2)^2+(y'-6)^2+4-36+a$

$x''^2+y''^2+a-32$

$\Rightarrow -x''^2+y''^2=0$

$-y'')(x''+y'')=0 \begin{cases} x''-y''=0 \\ x''+y''=0 \end{cases}$ Cónica degenerada

$) -x''^2+y''^2+5=0$

$\shortparallel$

$-\left(\frac{x''}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{y''}{\sqrt{5}}\right)^2+1=0$

$x'''^2-y'''^2-1=0 \Longrightarrow$ hipérbola

$) -x''^2+y''^2-2$

$-x'''^2+y'''^2-1=0 \Rightarrow$ hipérbola

$\Longrightarrow y_1^2-y_2^2-1=0 \Rightarrow$ hipérbola.

— $\mathbb{R}^2$ afín

$= C: y_1^2-y_2^2-1=0 \qquad \begin{cases} x'=x \\ y'=2x+y \end{cases}$

$\neq 32$

— $\mathbb{R}^2$ afín

$Rc)=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ aplicación afín no movimiento ya que la parte lineal no es ortogonal

$\longrightarrow \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' - 6 \end{cases}$, $M\phi_2(R_c) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$

ica) . se basa en el teorema espectral

ano afín real , la cónica se define como:

$(x_1 , x_2) \in A : a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{01} x_1 + 2a_{02} x_2 + a_{00} = 0 \}$

$\in \mathbb{R}$

$\begin{matrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \Bigg) \in Mat_3(\mathbb{R})$, simetrica.

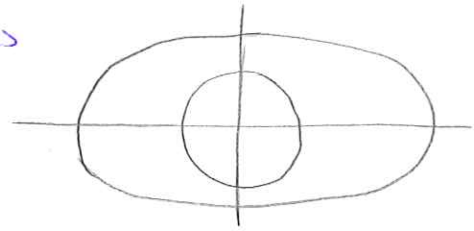
$\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix} \Bigg) \in Mat_2(\mathbb{R})$ simétrica

$\shortparallel$

$M(q)$

$\phi \in GA(A)$ (grupo afín de A) tal que $\phi(C) = C'$, se dirá

C' son afínmente equivalentes



$\sim C'$ relación de equivalencia

o cociente es $\{cónicas\}/\sim$, siendo $\{cónicas\}$ la familia

as del plano afín A.

nicas$\}/\sim$) = 7 (clases).

12/5/2015

ónica de A es afínmente equivalente a una de las siguientes:

$+ y_2^2 - 1 = 0$	Elipse
$+ y_2^2 = 0$	Elipse degenerada
$- y_2^2 - 1 = 0$	Hipérbola
$- y_2^2 = 0$	Hipérbola degenerada
$^2 - 1 = 0$	Parábola simplemente degenerada
$^2 = 0$	Parábola doblemente degenerada cada pto contado 2 veces.
$^2 - y_2 = 0$	Parábola

14/5/2015

ónica, vamos a ver ahora la forma de llegar a su forma para clasificarla.

$$+ 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{01} + 2a_{02} x_2 + a_{00} = (1, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}\Big)$ es una matriz real simétrica, entonces por el

pectral $\exists\ P \in Mat_2(\mathbb{R})$ ortogonal $(\Leftrightarrow P^t = P^{-1})$ tal que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P.$$

matriz $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ teniendo en cuenta

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{P} \\ 0 & & \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \text{, es igual a } \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & \lambda_1 & 0 \\ a_{02}' & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow C' = \phi_1(C)$, siendo $\phi_1 \in GA(A)$ ϕ_1 es movimiento afín-euclídeo A

$(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{P} \\ 0 & & \end{array}\right)$ $\bar{\phi}_1$ es movimiento si R es ortonormal

nto $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{P} \\ 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

el sistema de la cónica $(1, x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

es igual a

$$)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{P} \\ 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{P^t} \\ 0 & & \end{pmatrix}}_{\text{simétrica sin necesidad de que } P \text{ lo sea también}}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} =$$

$$, x_2')\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & \lambda_1 & 0 \\ a_{02}' & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

14/5/2015

ue $PA_0P^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con los distintos casos

$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ o $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$

si λ_1, $\lambda_2 \neq 0$, $\det(A_0) = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$

nos que estamos en el caso $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & \lambda_1 & 0 \\ a_{02}' & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 \neq 0$

una matriz afín con traslación $H\phi_2(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{01}'\lambda_1^{-1} & 1 & 0 \\ a_{02}'\lambda_2^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 \neq 0$ ya que sino no podríamos hallar

sa

ovimiento si R es ortonormal.

con $H\phi_2(R)$ llegamos a $\begin{pmatrix} a_{00}' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con la cónica de antes

caso 1

anda $a_{00}' \neq 0$?

$$H\phi_3(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_1/a_{00}'|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2/a_{00}'|} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

- Cuando $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ Cónica es una elipse

- Cuando $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ Cónica es una hipérbola

2

$o' = 0 \Rightarrow \quad M\phi_3(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_1|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$

Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$y_1^2 + y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una elipse degenerada

Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

$y_1^2 - y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una hipérbole degenerad

$\boxed{\text{caso 1}}$ si $\det(A_0) = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{elipse} \\ \text{hipérbole} \\ \text{elipse degenerada} \\ \text{hipérbole degenerada} \end{cases}$

uponiendo que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$

n el caso $\begin{pmatrix} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & \underset{=\lambda_1}{0} & 0 \\ a'_{02} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$

una matriz afín con traslación $M\phi_2(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a'_{02} \cdot \lambda_2^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

miento si R es ortonormal entonces

(R) llegamos a $\begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & 0 \\ a'_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

14/5/2015

si $a'_{01} = 0$

$$\begin{matrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{matrix}\Bigg)$$

-caso 1.1 $a'_{00} \neq 0$, aplicando $M_{\phi_3}(R) = \Big($

ϕ_3 movimiento con traslación

$y_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ La cónica es una parábola simplemente degenerada

caso 1.2 $a'_{00} = 0$, aplicando $M_{\phi_3}(R) = \Big($

ϕ_3 movimiento con traslación si R es ortonormal.

$y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una parábola doblemente degenerada

si $a'_{01} \neq 0$

do $M_{\phi_3}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a'_{00}}{2a'_{01}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se obtiene

$$\begin{matrix} a'_{01} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}\Bigg)$$ que siendo $\lambda_2 > 0$ y $M_{\phi_4}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a'_{01} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$

$\phi_4(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a'_{01} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$

ene la cónica $y_1^2 - y_2 = 0$ que es una parábola.

e la Casificación

tinment equivalente a:

$\iff \det(A_0) > 0$, $\det(A) \neq 0$, $\delta(A) = 1$

degenerada $\iff \det(\underbrace{A_0}_{\text{parte cuadrática}}) > 0$, $\det(\underbrace{A}_{\text{matriz real.}}) = 0$

ola $\iff \det(A_0) < 0$, $\det(A) \neq 0$

ola degenerada $\iff \det(A_0) < 0$, $\det(A) = 0$

la $\iff \det(A_0) = 0$, $\det(A) \neq 0$

la simplemente degenerada $\iff \det(A_0) = 0$, $rg(A) = 2 \Rightarrow \det(A) = 0$

y $\delta(A) = 0$

la doblemente degenerada $\iff rg(A) = 1$.

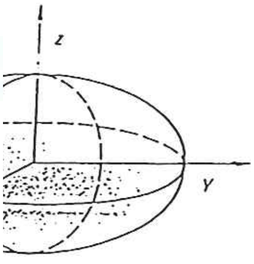
B canónica $M^t A M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & & \\ b_2 & & \end{pmatrix}$

B_0

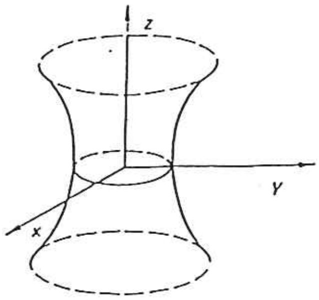
a matriz real simétrica, entonces $A = I_s \oplus (-I_t) \oplus 0$

$s - t| (\neq 3$ si no no hay cónicas en $n = 3)$

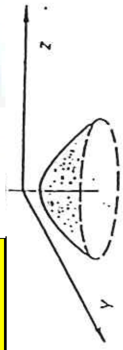
Cónicas espacio afín-euclídeo.



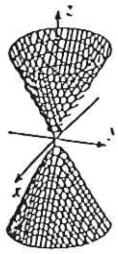
ELIPSOIDE:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$



(2) HIPERBOLOIDE HIPERBOLICO
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

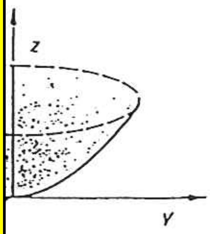


(4) CONO IMAGINARIO (un único punto real):
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$$

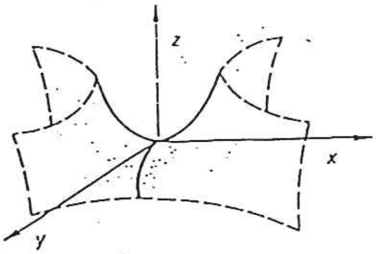


LOIDE ELIPTICO
$$-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

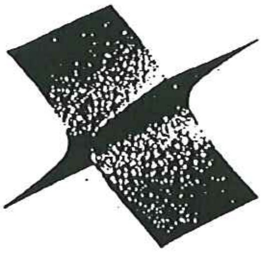
(5) CONO REAL:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$

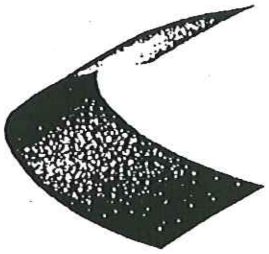


(6) PARABOLOIDE ELIPTICO:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$$



(7) PARABOLOIDE HIPERBOLICO
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z.$$

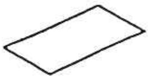




DRO ELIPTICO:
$$\frac{Y^2}{b^2}=1$$

(9) CILINDRO HIPERBOLICO:
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

(10) CILINDRO PARABOLICO:
$$X^2-2aY=0.$$

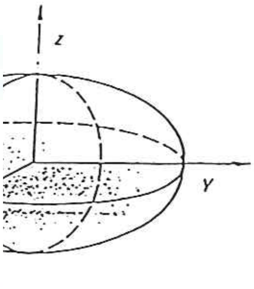


(11) S SECANTES:

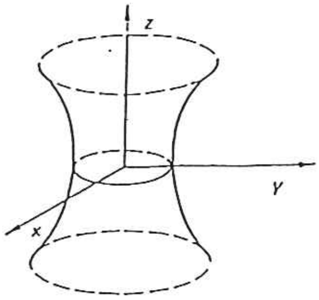
(12) PAR DE PLANOS PARALELOS:
$$X^2=a^2.$$

(13) PLANO DOBLE:
$$X^2=0.$$

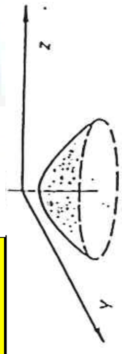
PLANOS IMAGINARIOS CONJUGADOS $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0.$



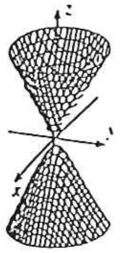
ELIPSOIDE:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$



(2) HIPERBOLOIDE HIPERBOLICO
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

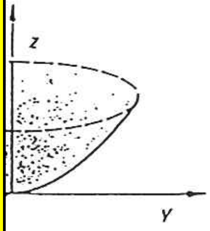


(4) CONO IMAGINARIO (un único punto real):
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$$

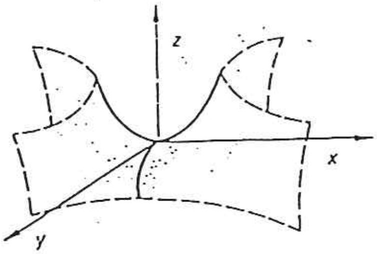


LOIDE ELIPTICO
$$-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

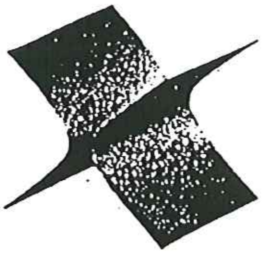
(5) CONO REAL:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$

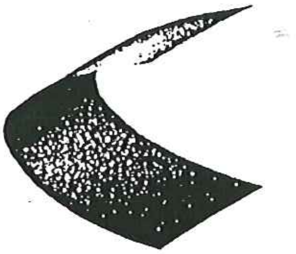


(6) PARABOLOIDE ELIPTICO:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$$



(7) PARABOLOIDE HIPERBOLICO
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z.$$

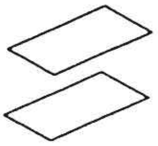


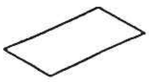


DRO ELIPTICO:
$$\frac{Y^2}{b^2}=1$$

(9) CILINDRO HIPERBOLICO:
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

(10) CILINDRO PARABOLICO:
$$X^2-2aY=0.$$





(11) S SECANTES:

(12) PAR DE PLANOS PARALELOS:
$$X^2=a^2.$$

(13) PLANO DOBLE:
$$X^2=0.$$

PLANOS IMAGINARIOS CONJUGADOS $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0.$

18/5/2015

isificación afín-euclídea

$x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{01} x_1 + 2a_{02} x_2 + a_{00} = 0$

$, x_2)_R$, R es el sistema de referencia ortonormal del

euclídeo A.

, euclídeamente equivalente a una y solo una de los siguientes:

$+ \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ $(a \geq b > 0)$ Elipse.

aso particular

Si $a = b \neq 1 \Rightarrow$ Circunferencia

$\frac{y_2^2}{b^2} = 0$ $(a \geq b > 0)$ Elipse degenerada

$\frac{y_2^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ Hiperbola

aso particular

$a = b \neq 1 \Rightarrow$ Hiperbola equilatera

$\frac{y_2^2}{b^2} = 0$ $(a, b > 0)$ Hiperbola degenerada

$p y_2 = 0$ $(p > 0)$ Parábola

$^2 = 0$ $(a > 0)$ Parábola simplemente degenerada

Parábola doblemente degenerada

21/5/2015

ricas

pacio afín real de dimensión 3, y R el sistema de referencia.

$, x_2, x_3)_R$, entonces la cuadrática es

$$x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 +$$

$$+ a_{00} = 0 \quad , \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

a matriz simétrica de la cuádrica.

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & & & \\ a_{02} & & A_0 & \\ a_{03} & & & \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$_n(\mathbb{R})$ simétricas

δ $\delta(A_0) = \delta_0$ son invariantes

l y -1

$r(A) = r$, $r(A_0) = r_0$

uariantes $(r, \delta, r_0, \delta_0)$

s C y C' son afinmente equivalentes si $\exists\ \phi \in GA(A) : \phi(C) = C'$

afín - euclideas , $\exists\ \phi$ - movimiento tal que $\phi(C) = C'$

as clases en el espacio afín.

21/5/2015

sificación cuádricas afín-euclídea

a C del espacio afín real tridimensional es afínmente a una y solo una de las siguientes ecuaciones reducidas

*para saber cuál es.

	reducido en afín-euclídeo	Nombre	(r, δ, r_0, δ)
1	$+ y_3^2 - 1 = 0$	Elipsoide	(4, 2, 3, 3)
2	$+ y_3^2 = 0$	(un punto) Cono imaginario	(3, 3, 3, 3)
3	$- y_3^2 - 1 = 0$	hiperboloide de una hoja Hiperbólico	(4, 0, 3, 1)
4.	$- y_3^2 - 1 = 0$	hiperboloide de dos hojas Elíptico	(4, 2, 3, 1)
5	$- y_3^2 = 0$	Cono Real	(3, 1, 3, 1)
6	$^2 - y_3 = 0$	Paraboloide elíptico	(4, 2, 2, 2)
7	$y_2^2 - y_3 = 0$	Paraboloide hiperbólico	(4, 0, 2, 0)
8	$_2^2 - 1 = 0$	Cilindro elíptico	(3, 1, 2, 2)
9	$_2^2 - 1 = 0$	Cilindro hiperbólico	(3, 1, 2, 0)
10	$y_3 = 0$	Cilindro parabólico	(3, 1, 1, 1)
11	$y_2^2 = 0$	Par de planos secantes	(2, 0, 2, 0)
12	$y_2^2 = 0$	recta: Par de rectas imaginarias conjugadas	(2, 2, 2, 2)
13	$= 0$	Par planos paralelos	(2, 0, 1, 1)
14	0	Plano doble	(1, 1, 1, 1)

imeras cc. reducidas, cuádricas se obtiene

$$\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} & a'_{03} \\ \hline \lambda'_{01} & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda'_{02} & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda'_{03} & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \Bigg) \simeq \left(\begin{array}{c|ccc} a'_{00} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

6, 7, 8, 9, 10, 12 (*) tienen dos autovalores no nulos

ntes

olinomio real no constante posee alguna raíz compleja.

polinomio complejo no constante posee alguna raíz compleja

es algebraicamente cerrado (todo polinomio complejo

one completamente en $\mathbb{C}[x]$)

polinomio real es producto de polinomios reales de grado ≤ 2

ón

$[x]$, $g = \sum a_i x^i$ $a_i \in \mathbb{C}$

inomio complejo conjugado , $\bar{g} \overset{\cdot}{=} \sum \bar{a}_i x^i$
definimos

$$f = g \cdot \bar{g} = \sum a_i x^i \cdot \sum \bar{a_j} x^j = \boxed{\sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i,j \leq m}} \sum (a_i \bar{a_j}) x^{i+j}} \in \mathbb{R}$$

$$\overline{\quad_j} = \sum \bar{a}_i \bar{\bar{a_j}} = \sum \bar{a}_i a_j$$

$$f(\alpha) = 0 = (g\bar{g})(\alpha) \implies 0 = g(\alpha)\bar{g}(\alpha) = (g\bar{g})(\alpha)$$

$$) = 0 \implies g(\bar{\alpha}) = \bar{0} = 0$$

$$) = \sum \bar{a}_j \alpha^j \implies \bar{0} = \sum a_i \bar{\alpha}^i = g(\bar{\alpha})$$

21/5/2015

(continuación)

$\mathbb{R}[x] \Longrightarrow f \in \mathbb{C}[x] \xrightarrow{\exists_!} f = (x-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n) \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$

mónico

$\infty \quad \alpha_1 \in \mathbb{C}, \ \alpha_1 \notin \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha_2 = \bar{\alpha}_1$ conjugados

$-\alpha_1)(x-\alpha_2) \in \mathbb{R}[x]$

escomponer aparecen raíces de grado ≥ 2 hay alguna raíz

22/5/2015

erpo conmutativo $f \in k[x]$ no constante, mónico. Existe F

nutativo y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tal que:

es un subcuerpo de F

$= (x-\alpha_1) \ldots (x-\alpha_n)$

de Girard - Newton.

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad , \ a_i \in k \ ; \ f = (x-\alpha_1) \ldots (x-\alpha_n) \ \alpha_i \in F$

$\alpha_1 \ldots \alpha_n$

${}^{-1} (\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_2 \ldots \alpha_n) \ldots a_{n-1} = -(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) =$

${}^{n-1)} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$

$= (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} \quad , \ k = 0, \ldots, n$

$= 0 \qquad \alpha_1 \ , \alpha_2 \ , \alpha_3$

${}^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad ,, \ \beta_i = \alpha_i + 1$

$\beta_2 \beta_3 = -(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) =$

$_3 - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$

$+ \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 = \dots = \dots 0$

$+ \beta_2 + \beta_3) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3) = -3$

$)^k \sum_{\leq i_1 \leq \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} \quad k = 1, \dots n$ (anillo unitario)

$.\, x_n] = k[x_1 \dots x_{n-1}][x_n]$ (anillo)

$\dots i_n \underbrace{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}}_{\text{monomio}} \quad , + , \cdot$

$\dots i_n \in k \quad ; \; i_1, \dots, i_n \geq 0$

na indeterminación no se cumplen todas las propiedades de

No se puede dividir por un $k[x]$ con cociente y resto.

po conmutativo $k \subset R$, R anillo conmutativo y unitario

$x_1 \dots x_n]\ \alpha_1 \dots \alpha_n \in R$

$\alpha_n) \underset{\text{defin.}}{=} \sum_{\text{en } R} a_{i_1 \dots i_n} \underbrace{\alpha_1^{i_n} \dots \alpha_n^{i_n}}_{\text{en } R} \in R$

$\dots \alpha_n) = f(\alpha_1 \dots \alpha_n) + g(\alpha_1 \dots \alpha_n)$

ewton

$(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} = (-1)^k \Big(\underbrace{\sum x_{i_1} \dots x_{i_k}}_{\substack{\text{polinomio simétrico} \\ \text{elemental} = S_k}} \Big)(\alpha_1 \dots \alpha_n) =$

$S_k(\alpha_1 \dots \alpha_n)$

$[x_1 \dots x_n]$

22/5/2015

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$$

, $\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 \\ S_2 = x_1 x_2 \end{cases}$ $\quad x_1 \longrightarrow x_1 \quad x_2 \longrightarrow x_2 \quad \| \quad x_1 \longmapsto x_2 \quad x_2 \longmapsto x_1$

, $\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ S_3 = x_1 x_2 x_3 \end{cases}$ $\quad x_1 \longrightarrow x_2 \quad x_2 \longrightarrow x_1 \quad x_3 \longrightarrow x_3$

aciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$

lementos $= n!$ $\quad \sigma \in S_n \quad \sigma(i) \cdot 1 \leq i \leq n$

$, \dots x_n]$ es simétrico si

$) = F(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \ \forall \sigma \in S_n$

$^2 \qquad x + y = S_1 \qquad xy = S_2$

$x = xy(x+y) = S_2 S_1 = (z_1 - z_2) \qquad (S_2 S_1) \rightarrow$ simetrica

simétri

$y^2 = (x+y)^2 - 3xy = F(S_1 S_2)$

$(z_1 z_2) = z^2_1 - 3z_2$

25/5/2015

ente

$\dots x_n]$ simétrico si $F(x_1 \dots x_n) = F(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) \ \forall \sigma \in S_n$

$k[x_1 \dots x_n] \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{ik}$ (polinomio simétrico elemental)

$)^k S_k(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ Identidad Girard - Newton

undamental de polinomios simétricos

$[x_1, \dots x_n]$ es simétrico, entonces existe $G \in k[x_1, \dots, x_n]$ tal qu

$\dots, S_n)$

ción

$= \sum a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ $(i_1, \dots i_n) \in \mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ siendo

o ordenado.

que $(i_1, \dots, i_n) > (j_1 \dots j_n)$ por orden lexicográfico

$j_1 \dots i_k = j_k, i_{k+1} > j_{k+1}$

n

$= \max_{lex} \{(i_1 \dots, i_n) : a_{i_1 \dots i_n} \neq 0\}$

$\partial(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \equiv (1, 0, \dots, 0)$

$1, 0 \dots 0) > (0, 1 \dots 0) > \dots > (0, \dots 0, 1)$

siendo s_1

$\partial(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) \equiv (1, 1, 0, \dots, 0)$

$(1, 1, 0, \dots, 0)$ $(1, 0, 1, 0 \dots 0)$ $(0, \dots, 0, 1, 1)$

siendo s_2

$(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, \underbrace{0 \dots 0}_{n-k})$

una indetermiación si F es simétrico.

$\dots, i_n)$, $\partial(F_2) = (j_1, \dots, j_n) \Rightarrow \partial(F_1 F_2) = (i_1 + j_1, \dots, i_n + j_n)$

$F_1 + F_2$ es la suma de los dos

$x^{i_1} \dots x^{i_n} b$

co, $\partial F = (j_1 \dots j_n) \Rightarrow j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n$

$x_n) = \underset{\neq 0}{a} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} + (\text{términos})$

imet.

$), \dots, x_{\sigma(n)}) = a \quad \forall \sigma \in S_n$

25/5/2015

$j_1 < j_2$ (imposible)

2

$\sigma(j)\ j\ \forall\ j \neq 1, 2$

1

$\dots x_{\sigma(n)}) = a x_2^{j_1} x_1^{j_2} \dots x_n^{j_n} + \boxed{\text{términos puntuales}}$

$, j_3 \dots j_n) \Rightarrow \partial F (j_1, j^2, \dots)$

$j_1, j_2 \dots)$

$_n) \Rightarrow F = \underset{\neq 0}{a} x_1^{i_1 \dots} x^{i_n} + \boxed{\text{términos de menor grado}}$

$\underbrace{a s_1^{i_1 - i_2} S_2^{i_2 - i_3} \dots S_{n-1}^{i_{n-1} - i_n}, S_n^{i_n})}_{\text{simétrico.}} + a S_1^{i_1 - i_2} \dots S_{n-1}^{i_{n-1} - i_n}$

$(F - a S_1^{i_1 - i_2} S_2^{i_2 - i_3} \dots S_{n-1}^{i_{n-1} - i_n}, S_n^{i_n}) < \partial F$

$_{i_2} S_2^{i_2 - i_3} \dots S_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} S_n^{i_n}) = \partial (S_1^{i_1 - i_2} S_2^{i_2 - i_3} \dots S_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} S_n^{i_n}) =$

$\overset{\shortparallel}{\partial F}$

$\underbrace{_1 - \cancel{i_2} + \cancel{i_2} - \cancel{i_3} + \cancel{\dots} + \cancel{i_{n-1}} - \cancel{i_n} + \cancel{i_n}}_{\overset{\shortparallel}{i_1}}, \underbrace{i_2 - \cancel{i_3} + \cancel{i_3} - \cancel{i_4} + \cancel{\dots} + \cancel{i_{n-1}} - \cancel{i_n} + i_n}_{\overset{\shortparallel}{i_2}})$

inducción

$F - a S_1^{i_1 - i_2} S_2^{i_2 - i_3} \dots S_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} S_n^{i_n}) + a S_1^{i_1 - i_2} S_2^{i_2 - i_3} \underset{\overset{\uparrow}{HI}}{=}$

$\dots S_n) + (a x_1^{i_1 - i_2} \dots x_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} x_n^{i_n}) =$

$\underbrace{\dots x_n)}_{\text{Pol. G.}} + a x_1^{i_1 - i_2} \dots x_n^{i_n})(S_1 \dots S_n)$

ración T.F.P.S

$[x_1, \dots x_n]$

$G_n \in k[y_1 \dots y_m] \quad k \subset k^* \qquad \beta_1 \dots \beta_m \in k^*$

$\dots G_n)(\beta_1 \dots \beta_m)] = F(G_1(\beta_1 \dots \beta_m), \dots, G_n(\beta_1, \dots, \beta_m))$

$k \Rightarrow b = b$

$\Rightarrow G_i(\beta_1 \dots \beta_m) = G_1(\beta_1 \dots \beta_m)$

ndamental del Álgebra 1801 Gauss.

nomio real tiene raíces complejas"

$[x]$ es no constante entonces $f(\alpha) = 0$, para algún $\alpha \in \mathbb{C}$

ón

$f = n = 2^e n_0$ idución sobre e $e \geq 0$, n_0 impar.

26/5/2015

n_0, $e \geq 0$ n_0 impar

sóbre e.

Tma Bolzano.

a f es impar, $f \in \mathbb{R}[x] \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ tq $f(\alpha) = 0$

I : "$g \in \mathbb{R}[x]$, $g^r g = m = 2^{e-1} m_0$, m_0 impar

$\mathbb{C} : g(\beta) = 0$"

$\subseteq \mathbb{C}[x] \Rightarrow \exists$ k - cuerpo conmutativo, $\alpha_1 \dots \alpha_n \in k$ tal que

$) \dots (x - \alpha_n)$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq k$, cuerpo conmutativo.

os $f = x^n a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$

$1)^k S_k(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ relaciones Girard - Newton

$1 \leq i < j \leq n \quad \alpha_{i,j,\lambda} = \alpha_i + \alpha_j + \lambda \alpha_i \alpha_j \in k$

$\prod_{j \leq n} (x - \alpha_{i,j,\lambda}) \in k[x]$ polinomio mónico.

26/5/2015

$$\overset{\uparrow}{=} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^e \cdot n_0 (2^e n_0 - 1)}{2} =$$

$j \leq n$

$$, \underbrace{(2^e n_0 - 1)}_{m_0} = 2^{e-1} m_0 \qquad , m_0 \text{ impar}$$

$, k \qquad (1 \leq k \leq m) \qquad ¿ b_k \in \mathbb{R}?$

β_{λ}, λ

$$(x - \beta_{k,\lambda}) = x^m + b_{m-1} X^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

et

$$\overset{\cdot}{=} \alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_j + \lambda \alpha_i \alpha_j = (\overbrace{x_i + x_j + \lambda x_i x_j}^{P_{ij} = P_k})(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$$

olinomio simétrico elemental

$$t_k(\beta_1 \ldots \beta_m) = (-1)^k t_k(P_1(\alpha_1 \ldots \alpha_n), \ldots, P_m(\alpha_1 \ldots \alpha_m)) =$$

$$\underbrace{t_k (P_1 \ldots P_m)]}_{\in \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n] \text{ simetrico}} (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \overset{\text{Tma T. pol. sim.}}{=} (-1)^k [g_k(s_1 \ldots s_n)](\alpha_1 \ldots \alpha_n)$$

$$g_k(s_1(\alpha_1 \ldots \alpha_n), \ldots, S_n(\alpha_1 \ldots \alpha_n)) \overset{G-N^a f.}{=} (-1)^k g_k(-a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots,$$

$$)^n a_0) \in \mathbb{R}$$

do a que todos los coeficientes b descomponen en R

$$\prod_{<j \leq n} (x - \alpha_{ij}\lambda) \in \mathbb{R}[x]$$

nos inducción $\qquad f_\lambda = g \in \mathbb{R}[x]$, sabemos $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \exists \underbrace{\beta_\lambda}_{\text{raíz}} \in \mathbb{C}$:

$$\beta_\lambda = \alpha_i + \alpha_j + \lambda \alpha_i \alpha_j \qquad \boxed{\text{Principio palomar}}$$

$$\lambda \neq \mu : \begin{array}{l} \alpha_i + \alpha_j + \lambda \alpha_i \alpha_j \in \mathbb{C} \\ \alpha_i + \alpha_j + \mu \alpha_i \alpha_j \in \mathbb{C} \end{array} \Bigg| \xrightarrow{\text{si restamos}} \Rightarrow (\lambda - \mu)\alpha_i \alpha_j \in \mathbb{C}$$

$i \Rightarrow \alpha_i \alpha_j \in \mathbb{C}$

$= C_0 \in \mathbb{C}$

$= C_1 \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \alpha_i \alpha_j$ raíces del polinomio

$i + C_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i, \alpha_j = \dfrac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_0}}{2} \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{C}$

28/5/2015

es.

$V = n \quad B = \{u_1, \dots u_n\}$ base

$\longrightarrow k$ es n-lineal alternada si f es lineal en cada variable

$\dots v_n) = 0$ cuando $v_i = v_j$, $i \neq j$

$\longrightarrow k$ es n-lineal antisimetrica si f es lineal en cada variable

$(v_1 \dots v_i , \dots , v_j \dots , v_n) = - f(v_1 \dots v_j \dots v_i \dots v_n)$, siendo $i \neq j$

-lineal alternada $\Rightarrow$ f n-lineal antisimétrica

$) \neq 2$ f n-lineal antisimétrica $\Rightarrow$ f n-lineal altenada

ón

$\neq j \quad f(v_1 \dots v_i + v_j , \dots , v_j + v_i , \dots , v_n) \underset{\text{por ser alternada}}{=} 0 = f(v_1 \dots v_i , \dots v_j , \dots v_n) +$

//

$, \underbrace{v_i}{} \dots \underbrace{v_i}{} \dots v_n) \underset{=0}{+} f(v_1 \dots \underbrace{v_j}{} \dots \underbrace{v_j}{} \dots v_n) \underset{=0}{+} f(v \dots v_j \dots v_i \dots v_n)$

$\dots v_j \dots v_i \dots v_n) = - f(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_n)$

*

$\neq 2 \Rightarrow f(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_n) = - f(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_n) \Rightarrow$

$(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_n) = 0$

$= \{\sigma : \sigma$ es una permutación de $\{1, \dots, n\}\}$

...o con la composición, grupo simétrico.

1 $n \longmapsto n$ $id_{\{1 \dots n\}} \in S_n$

$\Rightarrow \vec{\sigma} \in S_n$ o asociativo

1 $\Rightarrow |S_n| = 1 = \{id\}$

2 $\Rightarrow S_n = \{id, \sigma\}$ $\sigma\ (1 \to 2,\ 2 \to 1)$

$\Rightarrow S_n$ no conmutativo

a $(1 \to 2)$, los demás se quedan fijos

a $(3 \to 1)$, los demás se quedan fijos

$\sigma \circ \rho$	σ	ρ
$1 \longmapsto 3$	$1 \longrightarrow 2$	$1 \longrightarrow 3$
$2 \longmapsto 1$	$2 \longrightarrow 1$	$2 \longrightarrow 2$
$3 \longmapsto 2$	$3 \longrightarrow 3$	$3 \longrightarrow 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n \longmapsto n$	$n \longrightarrow n$	$n \longrightarrow n$

$|S_n| = n!$ $i \to j$ $j \to i$ $k \to k$ $\forall\ k \neq i,j$

$(i_1 \dots i_r) \in S_n$ $r \leq n$

$(i_1, i_r)(i_1, i_{r-1}) \dots (i_1, i_3)(i_1, i_2)$

$i_1 \to i_2 \longrightarrow i_2 \longrightarrow \dots \to i_2$

$i_2 \to i_1 \to i_3 \longrightarrow i_3 \longrightarrow \dots \to i_3$

clos se pueden expresar como producto finito de trasposición

as permutaciones son ciclos

$\sigma \in S_n$

$\xrightarrow{\sigma} i_3 \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} i_r$ $\qquad \sigma(r-1) = i_p = i_2 = \sigma_j$

ta tal que $\underset{\substack{\shortparallel \\ i_1}}{\sigma(i_r)} = i_1 \dots i_{r-1}$ $\qquad r = n \quad r < n$

$(i_1 \dots i_r)^{-1} \cdot \sigma \in S_{n-r}$ $\qquad i \dots i_r$ identidad

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad n = 6$$

$$\begin{array}{ccc} (1, & 2, & 5) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} (3, & 4) \\ \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 \end{array}$$

$r = 3 \qquad r = 2$

n $\sigma = \tau_1 \dots \tau_m$ (trasposiciones)

a.

$$= \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \quad (\text{sigma de } \sigma)$$

$$) = \frac{\sigma(1) - \sigma(2)}{1 - 2} \cdot \frac{\sigma(1) - \sigma(3)}{1 - 3} \cdot \dots \cdot \frac{\sigma(1) - \sigma(n)}{1 - n} \cdot$$

$$\frac{(2) - \sigma(3)}{2 - 3} \cdot \dots \cdot \frac{\sigma(2) - \sigma(n)}{2 - n} \cdot \boxed{\prod_{3 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}} = 1.$$

$$\frac{2-1}{1-2}\Big) \cdot \left(\frac{2-3}{1-3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{2-n}{1-n}\right) \cdot \left(\frac{1-3}{2-3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1-n}{2-n}\right) \cdot (-1) = -1$$

$i_1, i_2) = -1$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(p(i)) - \sigma(p(j))}{i-j} = \prod \frac{\sigma(p(i)) - \sigma(p(j))}{p(i) - p(j)} \prod \frac{p(i) - p(j)}{i-j} =$$

$\sigma)\, \varepsilon(\rho)$

$= 1$

$$\left(\prod \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i-j}\right)^2 = \prod_{i\neq j} \overline{\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i-j}}^{\,n^2-n} = 1$$

$$\varepsilon(\tau_1, \ldots, \tau_m) = \varepsilon(\tau_1) \ldots \varepsilon(\tau_m) = (-1)^m$$

n-lineal autisimétrica $\Rightarrow f(v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(m)}) = \varepsilon(\sigma)\, f(v_1 \ldots v_n)$

S_n

$$\ldots i_r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ impar} \\ -1 & \text{si } r \text{ par} \end{cases}$$

$i_1, i_2, i_3) = (i_1, i_3)\,(i_1, i_2)$

al determinant como la forma bilineal alternada, $f \in \mathrm{Alt}_K V$ $B=\{u_1, u_2\}$

$_2) = f(a_{11}u_1 + a_{12}u_2, a_{21}u_1 + a_{22}u_2) = a_{11}a_{21}\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(u_1, u_1)} + a_{11}a_{22} f(u_1, u_2) +$

$_2 a_{21} \underset{\overset{\shortparallel}{-f(u_1,u_2)}}{f(u_2, u_1)} + a_{12}a_{22} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(u_2, u_2)} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) f(u_1, u_2) =$

$$\begin{matrix} {}_{11} & a_{21} \\ {}_{12} & a_{22} \end{matrix}\right|$$

tos $\Rightarrow 2^2$ mantienen 2

os $\Rightarrow 3^3$ mantienen $3! = 6$ $\Rightarrow$ (escalar) $\underset{\overset{\shortparallel}{|\quad|_{3\times3}}}{f(u_1, u_2, u_3)}$.

$u_1 \dots u_n\}$ base V $\forall \lambda \in k$ $\exists!$ $f \in \mathrm{Alt}_K V : f(u_1 \dots u_n) = \lambda$

ón

$\mathrm{lt}_K V$, $f(u_1 \dots u_n) = \lambda$

$\dots v_n) = f\Big(\underset{i=\sigma(1)}{\sum_{i=1}^{n} a_{1i} u_i} \dots, \underset{i=\sigma(n)}{\sum_{i=1}^{n} a_{ni} u_i}\Big) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} f(u_{\sigma(1)}, \dots$

$\boxed{n^{\circ} \text{ sumandos}}$

$\dots u_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \varepsilon(\sigma) f(u_1 \dots u_n) =$

$$\boxed{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \cdot \lambda}$$

$. v_n) \doteq \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \lambda \Rightarrow f \in \mathrm{Alt}_K V$, $f(u_1, \dots, u_n) = \lambda$

omorfismo

$f(u_1 .. u_n)$

$_K \text{Alt}\, V = 1 \implies$ vectores proporcionales

de V , $B = \{u_1 \dots u_n\}$, $\det_B$ es la única:

$\in \text{Alt}_K V$

$(u_1 \dots u_n) = 1$

familia $(v_1 \dots v_n)$

$\dots v_n) \equiv$ determinante de la familia $\{v_1 \dots v_n\}$

$$\begin{matrix} \dots & a_{n1} \\ & \\ \dots & a_{nn} \end{matrix} \Bigg) \in \text{Mat}_n(K)$$

$$_{Bc}\left(\sum a_{1i} e_i \dots \sum a_{ni} e_i\right) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} .. a_{n\sigma(n)} \det_{Bc}(e_1 .. e_n) =$$

$e_n\} \in K^n$

$$(1) \dots a_{n\sigma(n)} = \det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma^{-1}(1)\,\sigma(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(n)\,\sigma(n)} =$$

$$\sigma^{-1}(1)\,1 \;, \dots, \; \sigma^{-1}(n)\,n = \det A^t$$

ces cuadradas

$t\ A \cdot \det B$

$= M_B(\phi\, M_B(\phi))$ $\quad \phi \in \text{End}_K V$, $f \in \text{Alt}_K V$

$v_n) = f(\phi(v_1) \dots \phi(v_n))$

$_K V$

29/5/2015

$\lambda_1' v_1', v_2 \dots v_n) = f(\phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_1' v_1'), \phi(v_2), \dots, \phi(v_n)) =$

$(v_1) + \lambda_1' \phi(v_1'), \phi(v_2) \dots \phi(v_n)) =$

$(v_1), \phi(v_2) \dots \phi(v_n)) + \lambda_1' f(\phi(v_1'), \phi(v_2), \dots \phi(v_n))$

s alternada

$, \dots v_n) = f(\phi(v_1), \phi(v_1), \phi(v_3) \dots \phi(v_n)) = 0$

$\Rightarrow \{f\}$ base $Alt_k(V) \simeq k$

$a \in k$

$_n) = f(\phi(u_1) \dots \phi(u_n)) = f(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} u_i, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} u_i) = \overbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}^{\det M_\phi(B)}$

$\cdot f(u_1 \dots u_n)$

$$\left. \begin{matrix} \dots & a_{n1} \\ & \vdots \\ \dots & a_{nn} \end{matrix} \right) = M_\phi(B), \quad B = \{u_1 \dots u_n\}$$

$_n) = \det M_\phi(B) f(u_1 \dots u_n) \Rightarrow f_\phi = \det M_\phi(B) \cdot f$ (independiente de la base)

$M_{\phi\psi}(B) f = \underbrace{\det(M_\phi(B) M_\psi(B))}_{\shortparallel} f$

$= \overbrace{\det \phi(B) \det \psi(B)} \cdot f$ f no es nula.

$M_\phi(B_c), \; B = M_\psi(B_c)$

riante por semejanza.

Resumen Apuntes

para

Exámenes

1er Semestre

nillos y cuerpos

$(a+b)+c = a+(b+c)$

neutro $0_R \in R$: $a + 0_R = 0_R + a = a \quad \forall a \in R$

opuesto $\forall a \in R \ \exists -a \in R$: $a + (-a) = (-a) + a = 0_R$

$\forall a, b \in R \quad a+b = b+a$

$(ab)c = a(bc) \ \forall a,b,c \in R$

a $a(b+c) = ab + ac$, $(a+b)c = ac+bc$

neutro $1_R \in R$: $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a \quad \forall a \in R$

R (Conmutativa) $ab = ba$

R $ab = 0_R$ (Elemento nulo) $a = 0_R$ o $b = 0_R$

$a \neq 0_R \ \exists a^{-1} \in R$ (Elemento opuesto): $a \cdot a^{-1} = a^{-1} a = 1_R$

nillo $\quad$ i - vi + ix ⇒ Sin divisores de cero

no tiene div de 0

llo unitario $\quad$ i - ix ⇒ Dominio de integridad (menos que cuerpo)

⇒ Anillo conmutativo $\quad$ i - vii + x ⇒ Cuerpo (no puede ser divisor de 0)

lo conmutativo unitario $\quad$ i - viii + x ⇒ CUERPO CONMUTATIVO /CAMPO

$*$)

3) $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

$a = a$ $\quad$ 4) $a * b = b * a$

entos / cardinal del conjunto $= \{\alpha \in S : f(\alpha) = 0\} \leq$ grado (f)

acteristica de R $= \begin{cases} 0 & \text{si } \{n>0 : n 1_R = 0_R\} = \emptyset \\ \min \{n>0 : n 1_R = 0_R\}, & \text{si } \{\dots\} \neq \emptyset \end{cases}$

al dividir el nº

r el de la caracteristica

toriales

nmutativo. V es k-ev si están definidas estas operaciones

$V \longrightarrow V$ $\quad$ $\cdot : K \times V \longrightarrow V$

$v) \longmapsto u+v$ $\quad$ $(a, u) \longmapsto a \cdot u$

as siguientes propiedades

Grupo abeliano

$K, +, \cdot \quad 0_K, 1_K, -a, a^{-1}$

$)u = au+bu \quad \forall a, b \in k$

$V, +, \cdot \quad a, b, c \in k$

$+v) = au+av \quad \forall u, v \in V$

$u, v, w \in V$

$= a(bu)$

$0_V, -u$

$= u$

$V < V$, W subespacio de V si $W \subseteq V$

$W \longrightarrow W \quad \cdot : K \times W \longrightarrow W$

V , V k-ev son equivalentes

$v \in W \quad \forall a \in k \Rightarrow u+v \in W , au \in W$

$F \subseteq E$ sub ev

1) $u, v \in F \Rightarrow u+v \in F$

2) $u \in F, \; K \in K \Rightarrow K u \in F$

$\Rightarrow Ku + \lambda v \in F$

$\phi : V \longrightarrow V'$ isomorfismo de k-ev si:

iva

$V \simeq V'$ isomorfo

$(\Leftrightarrow) \; \dim V = \dim V'$

$$\left.\begin{aligned} &) = \phi(u) + \phi(v) \\ &= a\phi(u) \end{aligned}\right\} \forall a \in k, \; \forall u, v \in V$$

Generadores $\forall u \in V \; \exists u_1, \ldots, u_m \in X \; \exists a_1, \ldots, a_m \in k :$

$u_1 + \cdots + a_m u_m$ Combinación lineal.

e independiente $\forall u_1, \ldots, u_m \in X \; \forall a_1, \ldots, a_m \in k$

$\ldots + a_m u_m = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_m = 0.$

si es Sist. generadores y linealmente independiente

res linealmente independientes).

Si e y Li (Maximal) $\Rightarrow$ X es SG minimal.

$\text{im}_K V = \# B$ (cardinal de B)

$, u_r \}$ l.i y $\{v_1, \dots, v_s\}$ SG $r \leq s$ $r \leq \dim_K V = n$

d Suma

, intersección vectores que estén en ambos espacios unimos ec implícitas

suma se suman todos los vectores unimos bases

assmann

$(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim_K W_1 \cap W_2$

V e.v , $V = W_1 \oplus W_2$ si

$+ W_2$

$\cap W_2 = \{0\}$ $\Big\}$ $\dim W_1 \oplus W_2 = \dim W_1 + \dim W_2$

ial cociente

$\triangleleft V$, $u, v \in V$ uRv si $u - v \in W$. R relación equivalencia:

$u - u = 0 \in W$

a $u - v \in W \Rightarrow v - u = -(u - v) \in W$

a $u - v \in W, v - w \in W \Rightarrow u - v + v - w = u - w \in W$

)

$V/_{\equiv W} = \{\bar{u} : u \in V\}$

$n - m$, $\dim V = n$, $\dim W = m$

A ales Sean V, W k-ev : $\phi : V \longrightarrow W$ k-lineal (k-homomorfismo) si:

$= \phi(u) + \phi(v)$

$= a\phi(u)$

$= \{\phi : \phi \text{ es } k\text{-lineal}\}$

al $\Rightarrow \phi(0) = 0$, $\phi(-u) = -\phi(u)$

$\xrightarrow{\psi} U$ ϕ, ψ son k-lineales $\Rightarrow V \xrightarrow{(\psi \circ \phi)} U$ es k-lineal.

eales $\phi, \varphi : V \longrightarrow W$ K-lineal $\Longrightarrow \varphi + \phi$ es K-lineal

$) = \phi(au) + \varphi(au) = a\phi(u) + a\varphi(u) = a(\phi(u) + \varphi(u)) =$

$)(u)$

gen

$\{u \in V : \phi(u) = 0\}$ = núcleo. < 0 $\rightsquigarrow$ $\dim \ker = n - \underline{rg A}$
Im

$\{\phi(u) : u \in V\}$ = imagen $< W$

$\ker \phi + \dim \operatorname{Im} \phi = \dim_K V = n$

orfismo $\Longleftrightarrow \ker \phi = \{0\}$

fismo $\Longleftrightarrow \operatorname{Img} \phi = W$

T nor fía

$V \Rightarrow W_1 + W_2 / W_1 \cong W_2 / W_1 \cap W_2$

$\to W \Longrightarrow V / \ker \phi \cong \operatorname{Im} \phi$

ap. lineal $\phi : k^n \longrightarrow k^m$

B_1 B_2

V_1 V_2

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{matrix} B_2 \\ \vdots \end{matrix} = M_\phi(B_1, B_2)$$

$\phi(B_1)\ldots$

$\left. M_\phi(B_1 B_2) \right) V_1$

$V_{B_V} \xrightarrow{\quad} W_{B_W}$

$(B_V, B_W) = M_\phi(B_V, B_W) + M_\varphi(B_V, B_W)$

lineal

$B_V, B_W) = \underbrace{a}_{} \cdot M_\phi(B_V, B_W)$

x todas
Las coordenadas

$\longrightarrow W_{B_W} \xrightarrow{\varphi} U_{B_U}$

$$\boxed{M_{\varphi \circ \phi}(B_V, B_U) = M_\varphi(B_W, B_U) \cdot M_\phi(B_V, B_W)}$$

$\xrightarrow{id} V_{B'} \xrightarrow{id} V_{B}$

$I_n = M(B'B) M(B, B')$

z A para sacar Im y ker

Pivotes (triangular inferior)

$$\left(I \,\middle|\, A^t_B \right) \rightsquigarrow \left(\boxed{B \ker f} \,\middle|\, \begin{matrix} \boxed{B\,\mathrm{Img}} \\ \boxed{0 \cdots 0} \end{matrix} \right) \quad \square \quad \square \ldots$$

---

inyectivo $\Longleftrightarrow \ker(f) = \bar{0}$

sobreyect $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f = V'$

} Isomorfismo

---

bio base

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & V' \\ {} \arrow[r, "m_f"'] & B_2 \arrow[d, "Q"'] \\ {} \arrow[r, "\tilde{m}_f"'] & B_4 \end{tikzcd}$$

P = matriz cambio B_3 a B_1

Q = matriz cambio B_2 a B_4

$$\tilde{m}_f = Q \cdot m_f \cdot P$$

Si alguno no tiene cambio $\Rightarrow$ se mult. x identi

$\phi \in Hom(V, W)$

$\Downarrow$

$\phi^* \in Hom(W^*, V^*)$

no $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$

$$\left.\begin{array}{l}(V, W) \longrightarrow Mat_{m\times n}(K) \simeq K^{m\cdot n} \\ \phi \longmapsto M_\phi(B_V, B_W)\end{array}\right\} K\text{-isomorfismo}$$

no natural

$, W) \simeq Mat_{m\times 1}(K) \simeq K^m \simeq W$ $\phi(u)(a) = a \cdot u$

$(u) \longleftrightarrow u$

$_K(V, K)$ Espacio dual

$V^* \simeq V$ (isomorfo)

$, \dots, u_m\}$ base V; $u_i^* \in V^* \iff u_i^*(u_j)$ $\forall j = 1, \dots, n$

$$^*(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \Longrightarrow B^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\} \text{ base } V^*$$

id_{V^*} ii) $(\varphi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \varphi^*$

(Matriz)

(V, W) , $\phi^* \in Hom_K(W^*, V^*) \Longrightarrow \boxed{M_{\phi^*}(B^*_W, B^*_V) = \underbrace{Mat_\phi(B_V, B_V)^t}_{M_{\phi^*} = (M_\phi)^t}}$

idad (dual sobre dual)

$)^* = Hom_K(V^*, K) = Hom_K(Hom_K(V, K), K)$

$\longrightarrow V^{**}$

$(w) \mapsto w(u)$ $u \in V$, $w \in V^*$

ónico

$\times V^* \longrightarrow K$

$, w\rangle = w(u) = \eta(u)(w)$ $u \in V$, $w \in V^*$

$w\rangle = \langle u_1, w\rangle + \langle u_2, w\rangle$ iii) $\langle u, w_1 + w_2\rangle = \langle u, w\rangle + \langle u, w_2\rangle$

$w\rangle = a\langle u, w\rangle$ iv) $\langle u, aw\rangle = a\langle u, w\rangle$

$$\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

onal

$W^{\perp} = \{ w \in V^* : \langle u, w \rangle = 0 \quad \forall\, u \in W \} =$

$\in V^* : \omega(u) = 0 \quad \forall\, u \in W \} \subseteq V^*$

$w \in V^* : w(0) = 0 \} = V^*$ 8) $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$

$\{ w \in V^* : w(u) = 0 \ \forall \ u \in V \} = \{0\}$

dad

$b(V) \longrightarrow \mathrm{Sub}(V^*$

$W \longmapsto W^{\perp}$ biyectiva

$W < V \ , \ \dim_K W = m \Rightarrow \dim_K W^{\perp} = n - m = \mathrm{codim}_K W$

$)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

3) $V = W_1 \oplus W_2 \Rightarrow V^* = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$

$_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

Im , ker .

$w^*, B_{V^*}) = M_{\phi} \ (B_V , B_W)^t$

$\dim_K \mathrm{Im}\, \phi$

$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^t$

$\dim_K \mathrm{Im}\, \phi^*$

$= (\mathrm{Im}\, \phi)^{\perp} \in \mathrm{Sub}\, W^*$ ⟶ $\dim \mathrm{Im}\, \phi = \dim \mathrm{Im}\, \phi^*$

$= (\ker \phi)^{\perp} \in \mathrm{sub}\, V^*$

Observación

ϕ diagonalizable / triangularizable $\Rightarrow \exists B' : M_\phi(B')$

$A' = P^{-1} A P$

$A \sim A$ (Diag / triang)

II

quivalentes

onalizable

scompone completamente $k[x]$ y $\boxed{f_i = e_i}$

la

izable (superior) si $\exists$ B base V : $M_\phi(B)$ es triangular (sup)

quivalentes

ularizable

scompone completamente $k[x]$

milton (Cayley - Hamilton)

nimo $\equiv q_\phi$

$k[x]$ $q_\phi \neq 0$ ii) $q_\phi(\phi) = 0$ iii) q_ϕ grado mínimo.

$\in k[x]$, $\phi \in End_k(V)$ $n = \dim_k V$ $\Rightarrow$

ii) $q_\phi \mid f \Leftrightarrow f(\phi) = 0$ iii) $q_\phi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P_\phi(\lambda) = 0$

posición $f = f_1 \cdots f_t$ $f_i \in k[x]$ $mcd(f_1, \ldots f_t) = 1$ $f(\phi) = 0$:

$f_i(\phi)$ subespacio V ϕ - invariante

$f_1(\phi) \oplus \cdots \oplus \ker f_t(\phi)$

e $\ker f_i(\phi) \Rightarrow B = B_1 \cup \ldots \cup B_t$ base V y se tiene

$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_t} \end{pmatrix}$ diagonaliza por cajas

$A_i = M_{\phi|_{\ker f_i(\phi)}}(B)$

a $\Rightarrow q_\phi$ descompone completamente $k[x]$ y separable

s $\phi \in End_k(V)$ $\quad dim_k V = n$

$\phi : V \longrightarrow V$

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base V

$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \\ \phi(u_1) & \phi(u_n) \end{pmatrix}$

Paso.

$B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$

$$\begin{tikzcd} \underset{B'}{V} \arrow[r, "id"] & \underset{B}{V} \arrow[r, "\phi"] & \underset{B}{V} \arrow[r, "id"] & \underset{B'}{V} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{= \underbrace{M(B,B')}_{\overset{\shortparallel}{M_{id}(B',B)^{-1}}} M_\phi(B)\, M_{id}(B',B) = P^{-1}AP}$$

atriz $\Longleftrightarrow$ $A' = P^{-1}AP \Rightarrow A \sim A'$

acterístico $P_\phi = P_A = |A - xI_n|$ Siendo $A = M_\phi(B)$ $n = dim_k V$

[x]

(grado)

iii) $P_\phi(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{t(\phi)}_{\text{traza de A suma diagonal}} x^{n-1} + \dots + \underbrace{det(\phi)}_{det\ A}$

diagonalizable si $\exists$ B base V : $M_\phi(B)$ diagonal

$\in V : \phi(u) = \lambda u\} \Rightarrow$ Subespacio propio de λ

propio ϕ si $V_{\phi,\lambda} \neq \{0\}$

ectro $\phi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ = Valores propios de ϕ.

$\lambda_t \in k$ autovalores distintos $u_i \in V_{\phi,\lambda_i}$; si $u_1 + \dots + u_t = 0 \Rightarrow$

$\dots = u_t = 0$

uivalentes:

izable

base vectores propios

multiplicidad algebraica $= e_{\phi,\lambda}$

multiplicidad λ como raíz P_ϕ

$\phi) \Leftrightarrow e_{\phi,\lambda} \geq 1 \Leftrightarrow P_\phi(\lambda) = 0$

es finito

$\underbrace{m\ V_{\phi,\lambda}}_{\shortparallel} \leq e_{\phi,\lambda} \leq n = dim\ \phi$

$\phi,\lambda \equiv$ dim Geométrica λ respecto ϕ

m. subespacio vectores propios λ

Anotación

1) $\sigma(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ $\quad t \leq n = dim\ \phi$

$t \leq f_1 + \dots + f_t \leq e_1 + \dots + e_t \leq n$

2) P_ϕ n raíces distintas

$\Rightarrow \phi$ diagonaliza.

$(n = dim\ \phi)$

III.

$P_\phi = (-1)^n (x-\lambda_1)^{e_1} \dots (x-\lambda_t)^{e_t}$ $\Longleftrightarrow$ ϕ diagonalizable

$\lambda_1, \dots, \lambda_t \}$

$\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_t)^{a_t}$ $\quad 1 \leq a_1 \leq e_i$

$)^{a_i}$

$\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i} = N_{\phi,\lambda_i} \supseteq V_{\phi,\lambda_i}$

$= N_i : M_\phi (B_1 \cup \dots \cup B_t) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_t} \end{pmatrix}$; $A_i = M_{\phi|N_i}(B_i)$

$id_{N_i} + (\phi - \lambda_i \, Id)|_{N_i} = \lambda_i \, id_{N_i} + \eta_i$

$- \lambda_i \, Id)^{a_i}/_{N_i} = 0$ endomorfismo nilpotente

T a

$\lambda_i id_V)^{a_i} \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda_t \, id_V)^{a_t}$

$\dots \oplus N_t$ $\quad$ N_i ϕ-invariante

$-\lambda_i)^{a_i}$

$)^{e_i} \; (x-\lambda_i)^{e_i}$

$= e_i$

$\lambda_i \, id_V)^{a_i} = \ker (\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i+j} \quad \forall j \geq 0$

E nilpotente

$\} \quad \lambda_1 = 0 \quad e_1 = e_1 \quad 1 \leq f_1 \leq e_1$

$e_k = \dim_K N_k \qquad d_k = e_k - e_{k-1}$

nilpotentes $\exists$ B de N : $M_\eta(B) = J_{0,a}^{(d_a)} \oplus \overline{J}_{0,a-1}^{(d_{a-1} - d_a)} \oplus \dots \oplus J_{0,1}^{(d_1 - d_2)}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & \ddots 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A = PJP^{-1} \qquad J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$$

a $\phi^2 = id_V$

$+ W_2$ $\Big\}$ $V = W_1 \oplus W_2$

$\cap W_2$

$$M_{Diag.} = \begin{array}{c|ccc} & f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ \hline u_1 & & & \\ u_2 & & & \\ u_3 & & & \end{array}$$

definido $V = W_1 \oplus W_2$ coincide con ϕ

$W_1 = \ker(id_V - \phi) \rightarrow$ vectores $(\phi)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ón $W_2 = \ker(id_V + \phi) \rightarrow$ vectores $(\phi)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ción $\phi^2 = \phi$

$\mathrm{Im}\,\phi + \ker\phi$ $\Big\{$ $V = \mathrm{Im}\,\phi \oplus \ker\phi$

$\mathrm{Im}\,\phi \cap \ker\phi$

$$M_{Diag} = \begin{array}{c|ccc} & f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ \hline u_1 & & & \\ u_2 & & & \\ u_3 & & & \end{array}$$

proyección $= \mathrm{Im}(\phi)$

ción proyección $= \ker(\phi)$

u) $\underbrace{\langle u, v \rangle}_{\text{prod.escalar}} = 0$ $\forall v \in V$.

MINISTERIO
DE FOMENTO

AL
IONAL

CORREO ELECTRÓNICO
ign@mfom.es

IBERO

$\mathbb{R}^{②}$, $\mathbb{R}^2$

$\{(1,0),(0,1)\}$

$B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$

$2_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \Longrightarrow f \in \mathrm{End}$ porque El espacio vectorial va al mismo esp. vectorial

$p(x) \longmapsto p'(x)$

$+cx^2+dx^3 \longmapsto b + 2cx + 3dx^2 \quad 0x^3\}$

$\{1, \quad x, \quad x^2,$

o nos determinan Bases, usamos las bases canónicas.

$[x])\{1, x, x^2, x^3\}$

$$M_{B_c} = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \\ \end{array}$$

$\longrightarrow W$

$y, z) \longmapsto (3x+y, \; 2z, \; \overset{2y-z}{2y-z})$

$x = -\lambda - \beta$

$y = \lambda$

$z = \beta$

$y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \Longrightarrow B_W = \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$

$$\left(\begin{array}{cc} a=0 & c=1 \\ b=2 & d=2 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1,1,0) \\ (-1,0,1) \end{array}$$

$f(-1,1,0) \qquad f(-1,0,1)$

$\parallel \qquad \parallel$

$-2,0,2) \qquad (-3,2,1)$

$*_1 \qquad *_2$

$0, 2) = a(-1,1,0) + b(-1,0,1)$

$2, 1) = c(-1,1,0) + d(-1,0,1)$

$\mathbb{R}^3$

$0,1),(-1,1,1),(1,-1,0)\}$

$,1,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}$

B_1

$|=C_{B_2-B_1}=\begin{pmatrix} 3=a & 2=d & 0=g \\ -2=b & -1=e & 1=h \\ -3=c & -2=f & 2=i \end{pmatrix}$

$(1,0,1)=e_1$

$(-1,1,1)=e_2$

$(1,-1,0)=e_3$

$B_2 \; (2,1,1) \quad (1,1,1) \quad (1,-1,1)$

$\parallel$

$a_1e_1+b_1e_2+c_1e_3$

B_2

$\downarrow$

$,1,1)=a(1,0,1)+b(-1,1,1)+c(1,-1,0)$

* Con det. las transformaciones
$F_2' = F_2 - 3F_3$
NO $\rightarrow$ $F_2' = \textcircled{3}F_2 - 4F_3$

ic diagonalización

$\mathbb{R}$ y los vectores $v_a = (a, 0, 1)$ y $w = (1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

el endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$u \longmapsto \langle v_a, u \rangle w$$

que valores de a es f_a diagonalizable? Para los que lo sea,

a B_a de $\mathbb{R}^2$: la matriz de f_a respecto de B_a sea diagonal

, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la traza del endomorfismo f_a^n

$$\left.\begin{matrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix}\right)\rangle\rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

$$M_{B_c} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{matrix} \end{array}$$

$B_c = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$0) = \langle (a,0,1)(1,0,0) \rangle \cdot (1,0,-1) = a(1,0,-1) = (a,0,-a)$

$) = \langle (a,0,1)(0,1,0) \rangle \cdot (1,0,-1) = 0(1,0,-1) = (0,0,0)$

$) = \langle (a,0,1)(0,0,1) \rangle \cdot (1,0,-1) = 1(1,0,-1) = (1,0,-1)$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ -a & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot \left[(a-\lambda)(-1-\lambda) + a \right]$$

$$- a - a\lambda + \lambda + \lambda^2 + a \Big] = (-\lambda)(\lambda^2 + (1-a)\lambda) = (-1)\lambda^2 (\lambda + (1-a))$$

$\lambda = 0$, $\lambda = 0$, $\lambda = a-1$

$\lambda = 0$ $e_1 = 3$

$\lambda = 0$ $e_1 = 2$
$\lambda = a-1$ $e_2 = 1$

1

$e_1 = 3$ $\rightsquigarrow$ $f = \dim \phi - \text{rango}(\phi - 0I)$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & | & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \\ 0 & -1 & | & 0 \end{matrix} \Bigg) \underset{F_3' = F_3 + F_1}{\sim} \left(\begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 1 & | & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \end{matrix} \right)$$

$$\begin{cases} x = -z' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$(-1, 0, 1)$ $(0, 1, 0)$

$n\, N_1 = 2 \neq e_1 \implies$ no diagonaliza

$q_\phi = x^2$

e

ar

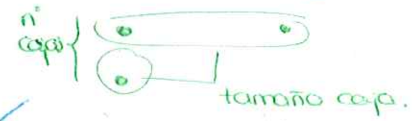
$^2 = \ker(\phi - 0I)^2 :$ $\Bigg($

Absordo.

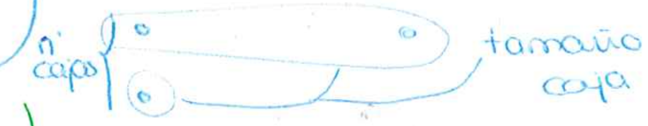
a salir toda la dim

ir rango $= 0 \implies \boxed{B_c}$

$N_{11} \subsetneq N_{12}$



$N_{11} \subsetneq N_{12}$



$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & 0 \end{array} \right)$$

$$J^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

0 $e_1 = 2$ f_1

$a - 1$ $e_2 = 1 = f_2$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & | & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \\ -a & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \overset{\to \text{puede ser } 0.}{\textcircled{a}} & 0 & \boxed{1} & | & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$x = x'$
$y = y'$
$z = -ax'$

$\dim N_1 = 2 = e_1 \leftarrow$

rango $= 3 - 1 = 2$

$(1\ 0\ -a)$ $(0, 1, 0)$

$\implies$ diagonaliza

ń

a-1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ a+1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -a & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & \boxed{-a+1} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$F_3' = F_3 + aF_1$

↓

nunca xq

$F_3' = aF_3 + \dots$

a no sabemos si es 0.

$y(-a+1) = 0 \rightarrow \underline{\underline{y=0}}$.

$\sim F_2' = \frac{F_2}{-a+1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x' \\ \\ z = -x' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = 0 \\ z = -x' \end{cases}$$

[redacted]

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{a \neq 1}$

$$B_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

igual en cualquier base. f_a^n $\forall a \in \mathbb{N}$ la traza

$(A)]^n = (a-1)^n$

-1 $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

$^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & | & 0 \\ n0^{n-1} & 0^n & | & \\ 0 & & | & 0^n \end{pmatrix}$

$J^n = Tr(J^n) = 0^n + 0^n + 0^n = 0$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \| $

$\qquad \qquad \qquad \qquad (a-1)^n$

$Tr\ f_a^n = (a-1)^n \Big\lfloor \overset{\|}{(1-1)^n}$

$\forall a \in \mathbb{N}$

<u>Caso $a \neq 1$</u> : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$

$D^n = \begin{pmatrix} 0^n & & 0 \\ & 0^n & \\ 0 & & (a-1)^n \end{pmatrix}$

traza $D^n = tr(D^n) = 0^n + 0^n + (a-1)^n$

$= (a-1)^n$

A ver. Si separamos caso era por multiplicidad pero en verdad es lo mismo poner $\lambda = 0$ que $\lambda = a-1$ si $a=1$.

Traza siempre va a ser la misma en J y D pero aun así poner proceso pa que se diviertan.

$Tr(B) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$Tr(B^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n$

atriz respecto de la base canónica de un homomorfismo

$\to \mathbb{R}^4$: $\boxed{f(1,0,1,0)=(2,1,-1,0)}$, $L((0,1,-1,0))$ → sub vect prop

ubespacio de vectores propios de f para el valor propio $\textcircled{-1}$ y

$z=0, x-y+t=0\}$ sea el subespacio de vectores propios

ara el valor propio $\textcircled{2}$

vector

$\lambda I) \cdot v = 0$

$- \lambda v = 0$

$v = \lambda v$

$(v) = \lambda v$

⊛ $f((0,1,-1,0)) = (-1)(0,1,-1,0) =$

$= (0,-1,1,0)$

⊛ $\begin{cases} x+z=0 \\ x-y+t=0 \end{cases} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x \\ t = -x+y \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$0,-1,-1) = (2)\cdot(1,0,-1,-1) = (2,0,-2,-2)$

$1,0,1) = (2)\cdot(0,1,0,1) = (0,2,0,2$

imagen 4 vectores. $\begin{cases} f(1,0,1,0) = (2,1,-1,0) \\ f(0,1,-1,0) = (0,-1,1,0) \\ f(1,0,-1,-1) = (2,0,-2,-2) \\ f(0,1,0,1) = \underbrace{(0,2,0,2)}_{\text{columnas matriz.}} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Matriz.}}$

xq

si

las

ases

anónicas

F

F

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\underbrace{F_3 = F_3 + F_4}_{(\cdot -1)}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - F_3]{F_2 = F_2 + F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

M ⇒ Traspu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autov = (−1, 2, 2, ②)

1'

$\to \mathbb{R}^2$

$\ker(f) = \{ u \in F : f(u) = 0_V \}$

$\mathrm{Im}(f) = \{ f(v) : v \in K \}$

$\to (x - z + t, 2x + 3t)$

Bc=

$,0)$ $\qquad B_C = \{(1,0),(0,1)\}$

$,1)\}$

$1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \Big) \; (1,0)$

$2 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \Big) \; (0,1)$

$,0) \quad f(0,1,0,0) \quad f(0,0,1,0) \quad f(0,0,0,1)$

$) \quad \overset{\shortparallel}{(0,0)} \quad \overset{\shortparallel}{(-1,0)} \quad \overset{\shortparallel}{(1,3)}$

$u \in F : f(u) = 0 \}$

$\begin{matrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & | & 0 \end{matrix} \Big) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - z + t = 0 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$ Ker (f)

$(f) = \langle (3,0,1,2),(0,1,0,0) \rangle_{\mathbb{R}^4}$ (Sist Generador del núcleo)

ma $\ker f = \langle (3\lambda, 0, \lambda, -\frac{2\lambda}{3}), (0, X, 0, 0) \rangle_{\mathbb{R}^4}$

$\begin{cases} x = z' - t \to x = 3z' \\ t = -2z' \\ z = z' \\ y = y' \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker(f) = \{ (3,0,1,-2), (0,1,0,0) \}$

$) = \{ u \in \mathbb{R}^4 \mid f(u) = v \}$ v es L.i

$\mathrm{Im}(f) = \{ f(0,0,1,0), f(0,0,0,1) \} = \{ (-1,0), (1,3) \}$

↳ L. indep.

$\mathrm{Im}\, f = \{ (x, z, t) \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - z + t = 0 \\ 2x + 3t = 0 \end{cases} \}$

Bc

$/\ker f = \{ [(1,0,0,0)], [(0,0,0,1)] \}$ (vectores que no estan* en ker f y estan en $\mathbb{R}^4$ "LI"*)

↳ $\{(3,0,1,-2),(0,1,0,0)\}$

$(0,1,0,0)$

$,(0,0,0,1)\}$

3

njunto cocient V/W $\quad$ dim $V = n$, dim $W = r$

$/W) = n - r$ $\qquad B_V = \{ u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n \}$

$B_W = \{ u_1, \dots, u_r \}$

$) = \{ \underbrace{[u_{r+1}], \dots, [u_n]}_{\text{los que estan en V y no en W.}} \}$ ☺

b

Tk

' $: \mathbb{R}^4 = \ker f \oplus U$ $\overset{\parallel}{\text{dim } 2}$ x formula Grassmann

mplir

$\cap U = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

$\ker f + U$

$f = \{(3,0,1,-2), (0,1,0,0)\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x-z+t=0 \\ 2z+t=0 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & c & d \\ f & g & h \end{matrix}\right) \Big] U$$

a buscar/hacer intersección y suma a la vez

$$\left(\begin{matrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{matrix}\middle| I_4\right) \sim \Big($$

?

①

C

$\longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t) \longmapsto (x-z+t, 2x+3t)$

$B' = \{(1,1), (1,0)\}$

B

$, (0,-1,0,0),$

$,1), (0,0,-1,1)\}$

$$\left(\begin{matrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{matrix}\right) \begin{matrix} (1,1) \\ (1,0) \end{matrix}$$

(1,2) ,0)

(0,3 ,0)

(2, ,0)

$\underset{(1,2)}{\overset{\parallel}{f(1,0,0,0)}}$ $\underset{(0,0)}{\overset{\parallel}{f(0,-1,0,0)}}$ $\underset{(0,3)}{\overset{\parallel}{f(0,0,1,1)}}$ $\underset{(2,3)}{\overset{\parallel}{f(0,0,-1,1)}}$

1.) $y, z\ t) = (x - z + t, 2x + 3t)$

$$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}\Big)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Big] \text{Im} f$$

$\text{Im}(f) = \langle (1,2)(0,1) \rangle$

subespacio generado

$\text{Ker}(f) = \langle (3,0,1,2), (0,1,0,0) \rangle$

Base $\mathbb{R}^4/_{\ker(f)} = \{ [(\overline{0,0,1,0})], [(\overline{0,0,0,1})] \}$

(

$\text{Ker} f \oplus U$

$U \iff \ker f + U = \mathbb{R}^4$ y $\ker f \cap U = \emptyset$

la fórmula dimensión como la dimensión de U es

y la base $\mathbb{R}^4/_{\ker(f)} = \{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

ension ~~d~~ 2 y la intersección con $\ker(f)$ es $\emptyset$

$U = \{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

ecto de los bases

$1,0,0,0),(0,-1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,-1,1)\} \in \mathbb{R}^4$

$(1,1)(1,0)\} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd} \arrow[r, "M"] & B_c \arrow[d] \\ \arrow[r, "\tilde{M}"'] & B' \end{tikzcd} \qquad \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\boxed{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

B_c a B'

$$\tilde{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

fese M

$$\begin{tikzcd} \arrow[r, "M"] & B_c\ \mathbb{R}^2 \\ \arrow[r, "\tilde{M}"'] & B' \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd}$$

$M =$

$)$

$\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{F_3 = F_2 + F_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2 = -C_3 + C_2}{=}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \left[\lambda^2 - 4 \right]$

$-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = (-1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)^2 = P\phi$

$2, -2\}$

$= 1 \quad f_1 = 1$

$= \ker (A - 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x = -z' \\ y = -z' \\ z = z' \end{cases}$

$u_1 = (-1, -1, 1)$

$- \text{rango}(A - 2I) = 1$

$e_2 = 2 \quad f_2 \leq 2$

$\ker \eta_2 = \ker (A + 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x = -2y' \\ y = y' \\ z = y' \end{cases}$

$\dim N_{2,1} = 3 - \text{rango}(A + 2I) = 1 \neq e_1 = 2$

$\Rightarrow$ no diagonaliza

$(-2, 1, 1)$

$= \ker \eta_2^2 = \ker (A + 2I)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \, \{ 8x + 8y = 0$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x = -y' \\ z = z' \\ y = y' \end{cases}$

$\dim N_{2,2} = 3 - \text{rango}(A + 2I)^2 = 2$

$(-1, 1, 0) \; (0, 0, 1)$

hacerlo en hoja a sucio, porq en verdad solo puede haber un núcleo más y para el vector no se necesita

$\boxed{12}$

$\subsetneq N_{2,2}$

2 × 2 una caja

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & -2 & \\ & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$g_\phi = (\lambda - 2)(\lambda + 2)^{②}$$

no es × ()
f

número
núcleos

$v_1 \in N_{2,2} \notin N_{2,1}$ ⇝ Si no tuviesemos $N_{2,2}$ cogemos un vector $\notin N_{2,1}$ y podríamos hacerlo, y creo q el profe a lipnpio lo vera mejor.
Nosotras a sucio (todos los pasos = P)

$(-1, 1, 0)$

$v_2 \in N_{2,1}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = V_2$$

$$\{, v_1, v_2\} = \{(-1, -1, 1), (-1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

P^{-1} ✓