8. Sistemas lineales con coeficientes variables

Sistemas homogéneos

61.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4t\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}.$$

62.– Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4t\\ 0 & -1+\cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

63.– Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y hallar la matriz resolvente.

1. $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos t & 1\\ 0 & 1+\cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t-1 & -2\\ 1 & t+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

64.– Consideremos la ecuación diferencial $\dot{X} = A(t)X$. Hallar la ecuación diferencial que se obtiene al cambiar la variable dependiente $X = Q(t)Y$, donde $Q(t)$ es una matriz derivable e invertible. Hallar la relación entre las matrices resolventes de ambos sistemas.

65.– Calcular la matriz resolvente del sistema $\dot{X} = A(t)X$, donde $A(t)$ es la matriz

$$A = \begin{bmatrix}2 & \mathrm{e}^{-t} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Resolver el problema de valor inicial $\dot{X} = A(t)X$, $X(0) = (1,1,1)$.

66.– Supongamos que $A(t)$ es una matriz real antisimétrica, $A(t)^{\mathsf{T}} = -A(t)$. Probar que existe una matriz fundamental del sistema $\dot{X} = A(t)X$ que es una matriz ortogonal. ¿Es también ortogonal la matriz resolvente?

67.– Sean $\varphi\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion continua y A_0 una matriz real. Probar que la matriz resolvente para el sistema $\dot{X} = \varphi(t)A_0X$ es

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Utilzar este resultado para resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t & t \\ -t & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

68.– Sea $M(t)$ una matriz fundamental de un sistema diferencial lineal $\dot{X} = A(t)X$, y sea $\mathcal{R}(t, t_0)$ la matriz resolvente. Demostrar que existe una matriz regular P tal que $M(t) = \mathcal{R}(t, t_0)P$. Demostrar que si $M(t)$ y $N(t)$ son dos matrices fundamentales, existe una matriz regular Q tal que $M(t) = N(t)Q$.

69.– Halla la ecuación diferencial que deben satisfacer los coeficientes del vector $\alpha(t) = [\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)]$ para que se satisfaga la siguiente propiedad: Para toda solución del sistema lineal $\dot{X} = A(t)X$ se tiene que el producto escalar $\alpha(t) \cdot X(t)$ es una función constante.

Sistemas no homogéneos

70.– Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

71.– Si $A(t)$ y $b(t)$ son las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix},$$

resolver el problema de valor inicial $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(1) = (1, 0, 1)$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Ecuaciones de orden superior

72.– Sabiendo que $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^t$ son soluciones de la ecuación diferencial $\ddot{y} + P(t)\dot{y} + Q(t)y = 0$, hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} + P(t)\dot{y} + Q(t)y = (1-t)\mathrm{e}^t \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1. \end{cases}$$

73.– Probar que e^t y $t\mathrm{e}^t$ forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$$t\ddot{y} - 2t\dot{y} + ty = 0.$$

Utilizar este hecho para resolver la ecuación no homogénea

$$t\ddot{y} - 2t\dot{y} + ty = \mathrm{e}^t$$

en el intervalo $(0, \infty)$.

74.– Sabiendo que e^{-2t} y $t\mathrm{e}^t$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0,$$

resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = t \\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

75.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} - 2t\dot{y} + (t^2 - 1)y = \mathrm{e}^{\frac{t^2-4t}{2}} \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1, \end{cases}$$

sabiendo que la ecuación homogénea admite una solución de la forma $y(t) = \mathrm{e}^{at^2}$, para alguna constante $a \in \mathbb{R}$.

76.– Consideremos la ecuación de segundo orden $t^2\ddot{y} + \alpha t\dot{y} + \beta y = f(t)$. Transformarla a sistema usando las variables $x_1 = y$, $x_2 = t\dot{y}$, y resolver la ecuación homogénea utilizando el resultado del ejercicio 67. Este tipo de ecuaciones se llaman *ecuaciones de Euler*.

77.– Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler:

1. $t^2\ddot{y} - 4t\dot{y} + 4y = 0$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

78.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} t^2\ddot{y} - 3t\dot{y} + 3y = 2t^3 - t^2 \\ y(1) = -1,\ \dot{y}(1) = 1 \end{cases}$$

en el intervalo $(0, \infty)$

79.– Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} - \dot{y}\operatorname{ctg} t + y \operatorname{sen}^2 t = 0.$$

Utilizando las variable $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}/\operatorname{sen} t$, plantéese como sistema de primer orden en dichas variables. Resolver dicho sistema y dar la solución de la ecuación diferencial anterior.

80.– Sabiendo que $y(t) = \mathrm{e}^t$ es solución de la ecuación diferencial $(t-1)\ddot{y} - t\dot{y} + y = 0$, hallar la solución general de

$$(t-1)\ddot{y} - t\dot{y} + y = 2\mathrm{e}^t.$$

81.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} - 2t\dot{y} + (t^2 - 1)y = \mathrm{e}^{\frac{t^2-4t}{2}} \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1, \end{cases}$$

sabiendo que la ecuación homogénea admite una solución de la forma $y(t) = \mathrm{e}^{at^2}$, para algún $a \in \mathbb{R}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.