## Estabilidad

**38.**– Analizar la estabilidad del sistema $\dot{X} = AX$ para cada una de las siguientes matrices $A$.

$$(1)\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2)\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(3)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (4)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5)\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (6)\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(7)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -6 & 1 \\ 4 & 6 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \qquad (8)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**39.**– Determinar la estabilidad de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddddot{y} + 7\dddot{y} + 17\ddot{y} + 17\dot{y} + 6y = 0$.
2. $\ddddot{y} - \dddot{y} - 7\ddot{y} + \dot{y} + 6y = 0$.
3. $\ddddot{y} - \dddot{y} - 7\ddot{y} = 0$.

**40.**– Probar que si $\dot{X} = AX$ es asintóticamente estable, entonces toda solución tiende a cero exponencialmente. Más concretamente, probar que existen $\alpha > 0$, $C > 0$ y $t_1 > 0$ tales que

$$||e^{tA}X_0|| \leq C\mathrm{e}^{-\alpha t}||X_0||,$$

para todo $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y todo $t > t_1$.

**41.**– Utiliza el criterio de Routh-Hurwitz para determinar la estabilidad

2. $\ddot{y} + \gamma\dot{y} + (\omega^2 - \Omega^2)y = 0.$

**42.**– Analizar la estabilidad de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\dddot{y} + \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$
2. $y^{(4)} + 2\dddot{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 0$
3. $y^{(6)} - 5y^{(5)} + 2y^{(4)} - \ddot{y} + \dot{y} + 3y = 0$

## Diagrama de fases

**43.**– Supongamos que $A$ es una matriz real $2 \times 2$ con valores propios imaginarios, por lo que las órbitas son elipses. ¿Cómo podemos encontrar los ejes de dichas elipses?

**44.**– Dibuja con precisión el diagrama de fases de cada uno de los sistemas diferenciales lineales siguientes, calculando los elementos geométricos que lo determinan (ejes, semiejes, etc.).

(1) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$