Sistemas de primer orden

24.– Utilizando la exponencial matricial, hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

25.– Utilizando la exponencial matricial, hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(2) \\ y(2) \\ z(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

26.– Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + \operatorname{sen}(t) \\ \dot{y} = 2x + 1 \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = -1$, $y(0) = 1$.

27.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

28.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(2) \\ y(2) \\ z(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

29.– Sea A una matriz triangular superior por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Probar que la exponencial de A es también triangular por bloques

$$e^{A} = \begin{bmatrix} e^{A_1} & C \\ 0 & e^{A_2} \end{bmatrix},$$

30.– Consideremos el sistema lineal $\dot{X} = AX + b(t)$, donde $b(t)$ es una función periódica de periodo $T > 0$.

1. Probar que si $X(t)$ es una solución del sistema, entonces $X(t+T)$ también lo es.
2. Probar que $X(t)$ es una solución periódica de periodo T si y sólo si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $X(t_0) = X(t_0 + T)$.
3. Probar que el sistema homogéneo admite soluciones T-periódicas no triviales si y sólo si e^{TA} tiene un valor propio 1. ¿Cuales son las soluciones periódicas? ¿Cómo son los valores propios de A?
4. Probar que si la única solución T-periódica del sistema homogéneo es la solución trivial entonces el sistema no homogéneo tiene una única solución T-periódica cuyo valor inicial viene dado por
$$X_0 = (\mathrm{e}^{-TA} - I_n)^{-1} \int_0^T e^{-\tau A} b(\tau)\, d\tau.$$

Ecuaciones de orden superior

31.– Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior:

1. $y^{IV} - 5\dddot{y} + 6\ddot{y} + 4\dot{y} - 8y = 0$
2. $y^{IV} + \dddot{y} + \ddot{y} = 0$
3. $y^{V} - 16\dot{y} = 0$
4. $y^{V} + 5y^{IV} - 2\dddot{y} - 10\ddot{y} + \dot{y} + 5y = 0$
5. $y^{IV} + y = 0$
6. $\dddot{y} + \dot{y} = \tan t$
7. $\dddot{y} - 4\dot{y} = t + \cos t + 2e^{-2t}$

32.– Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

1. $y^{IV} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0, \quad \dddot{y}(0) = -1$
2. $y^{IV} + 4\dddot{y} + 14\ddot{y} - 20\dot{y} + 25y = 0, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dddot{y}(0) = 0$
3. $y^{IV} - 3\dddot{y} + 3\ddot{y} - \dot{y} = 0, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dddot{y}(0) = 1$
4. $\dddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + y = t + e^{-t}, \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0.$

33.– Utilizando el método de los coeficientes indeterminados, hallar una solución particular de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddot{y} - y = t\mathrm{e}^{t} + \cos t$
2. $\dddot{y} - \dot{y} = \mathrm{sen}(t)\cos(t)$.
3. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5\ddot{y} = t - 1 + \mathrm{e}^{2t}$.

Probar que la familia de funciones $y_1 = \gamma, y_2 = \dot{\gamma}, \ldots, y_n = \gamma^{(n-1)}$ es un sistema fundamental de soluciones de dicha ecuación (i.e. son soluciones y cualquier otra solución se puede poner de forma única como combinación lineal de ellas).

35.– Consideramos una matriz $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ y sea

$$p(s) = s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

un polinomio que anula a la matriz A (por ejemplo, su polinomio característico, en cuyo caso $m = n$). Consideremos las funciones $y_1(t), \ldots, y_m(t)$ definidas como sigue: la función $y_i(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$y^{(m)} + \alpha_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = 0,$$

con condiciones iniciales $(y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(m-1)}(0))$ iguales al i-ésimo vector de la base canónica, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Entonces, se puede probar que

$$\mathrm{e}^{tA} = y_1(t)I_n + y_2(t)A + \cdots + y_m(t)A^{m-1}.$$

Utilizar este resultado para hallar la exponencial de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistemas de orden superior

36.– Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\begin{cases} \ddot{x} + y = 1 \\ x + \ddot{y} = -1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = 1, & \dot{x}(0) = 1, \\ y(0) = 1, & \dot{y}(0) = -1. \end{matrix}$

2. $\begin{cases} 2\dot{x} - \dot{y} + y = 0 \\ \ddot{x} - \dot{y} + x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = 1, & \dot{x}(0) = 1, \\ y(0) = 1. & \end{matrix}$

37.– Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + y - 4z = 1 \\ \dot{z} + z = 0 \end{cases}$$

con condiciones iniciales $y(0) = \dot{y}(0) = 1, z(0) = 1/4$.