

3. EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ

16.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{X} = AX$. Al realizar el cambio de variable $\bar{X} = PX$ el sistema se transforma en $\dot{\bar{X}} = \bar{A}\bar{X}$. Hallar la relación entre las matrices A y \bar{A} .

17.– Hallar la exponencial de las siguientes matrices sumando la serie exponencial

$$J = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

18.– Utilizando las propiedades de la exponencial matricial, y el resultado del ejercicio anterior, hallar la exponencial de las siguientes matrices

$$L = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

19.– Hallar la exponencial de las siguientes matrices

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

20.– Sea A una matriz diagonal por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Probar que la exponencial de A es también diagonal por bloques y que

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2} \end{bmatrix}.$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

22.– Para una matriz real cuadrada A probar que

1. $e^{A^T} = (e^A)^T$, y
2. $\det(e^A) = e^{\text{Tr } A}$.

Deducir de estas propiedades que la exponencial de una matriz antisimétrica es una matriz ortogonal, pero no toda matriz ortogonal es la exponencial de una matriz antisimétrica.

23.– Sea A una matriz (real o compleja) $n \times n$ que tiene únicamente dos valores propios distintos, λ y μ , ambos semisimples. Demostrar que

$$e^{tA} = \frac{\lambda e^{\mu t} - \mu e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} I_n + \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu} A.$$

En caso de ser A real y sus valores propios complejos, dar una expresión real de la fórmula anterior. Utiliza tu resultado para hallar la exponencial de tA , siendo A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue and orange gradient with a subtle arrow-like shape pointing to the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70