3. Exponencial de una matriz

16.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{X} = AX$. Al realizar el cambio de variable $\bar{X} = PX$ el sistema se transforma en $\dot{\bar{X}} = \bar{A}\bar{X}$. Hallar la relación entre las matrices A y $\bar{A}$.

17.– Hallar la exponencial de las siguientes matrices sumando la serie exponencial

$$J = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

18.– Utilizando las propiedades de la exponencial matricial, y el resultado del ejercicio anterior, hallar la exponencial de las siguientes matrices

$$L = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

19.– Hallar la exponencial de las siguientes matrices

$$(1)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(3)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4)\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

20.– Sea A una matriz diagonal por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Probar que la exponencial de A es también diagonal por bloques y que

$$e^{A} = \begin{bmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2} \end{bmatrix}.$$

22.– Para una matriz real cuadrada A probar que

1. $e^{A^{\mathsf{T}}} = (e^{A})^{\mathsf{T}}$, y
2. $\det(e^{A}) = e^{\operatorname{Tr} A}$.

Deducir de estas propiedades que la exponencial de una matriz antisimétrica es una matriz ortogonal, pero no toda matriz ortogonal es la exponencial de una matriz antisimétrica.

23.– Sea A una matriz (real o compleja) $n \times n$ que tiene únicamente dos valores propios distintos, λ y μ, ambos semisimples. Demostrar que

$$\mathrm{e}^{tA} = \frac{\lambda \mathrm{e}^{\mu t} - \mu \mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda - \mu} I_n + \frac{\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\mu t}}{\lambda - \mu} A.$$

En caso de ser A real y sus valores propios complejos, dar una expresión real de la fórmula anterior. Utiliza tu resultado para hallar la exponencial de tA, siendo A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$