Examen Global. Primera convocatoria 11/06/2018

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Describe la estructura de la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. A partir de ella enuncia y demuestra el teorema de estabilidad para sistemas lineales con coeficientes constantes.

2.– Sea $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua en el abierto $\mathcal{D}$. Supongamos que existen un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ y una función continua $\ell(t)$ tales que

$$\langle f(t,y) - f(t,x), y - x\rangle \leq \ell(t)\langle y - x, y - x\rangle,$$

para todos (t,x), $(t,y) \in \mathcal{D}$. Demostrar que todo problema de valor inicial $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, con $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, tiene solución localmente única.
Ayuda: dadas dos soluciones, $x = \gamma(t)$ y $x = \eta(t)$, considérese la función $u(t) = \langle \gamma(t) - \eta(t), \gamma(t) - \eta(t)\rangle$.

3.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = y^2 - y. \end{cases}$$

a) Integra la ecuación de las órbitas
b) Halla explícitamente las dos soluciones de la ecuación de las órbitas que pasan por el punto $(x,y) = (1,1)$.
c) Representa el diagrama de fases. (Indica claramente las nulclinas, las direcciones del campo vectorial en cada sector y las soluciones halladas en el apartado b). Dibuja con precisión el diagrama cerca de cada punto de equilibrio)

4.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \mu xy \\ \dot{y} = y^2 - \mu y. \end{cases}$$

Halla las derivadas parciales primeras de la solución general con respecto a las condiciones iniciales y al parámetro μ en el punto $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $\mu = 1$.

5.– Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = 6\mathrm{e}^t \\ \ddot{y}(0) = 0, \ \dot{y}(0) = 0, \ y(0) = 2. \end{cases}$$