Matemáticas I

HOJA 5

---

1) Usar la definición de límite de una sucesión para establecer los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n} = 3$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+5} = \infty$

2) Hallar, si existen, los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+2)!}$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, donde $a_1 > 0$ y $a_n = 1/(n\, e^{a_{n-1}})$ si $n \geq 2$.

3) Calcular los siguientes límites:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+n^2+1}{9n^5+1}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+n^2}-n}{n^2+\sqrt{n}}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-2n}\right)^{\frac{n^4-7}{2n^2}}$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n-5}}{(n-10)^n}$$

e)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}$$

f)

$$\lim_{n\to\infty} n ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

g)

e^n

6) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$, si

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

7) Sea la sucesión recursiva $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = \frac{4}{25}(x_n^3 + \frac{9}{2}), \forall n > 1.$$

a) Demostrar que $0 < x_n < 1$, $\forall n \geq 1$.
b) Demostrar que $\{x_n\}$ es convergente.
c) Calcular su límite.

8) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_1 = 1$, y $a_n = \frac{1}{2}\, a_{n-1} + 3$ para $n \geq 2$. Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva y calcular su límite.

9) Sea la sucesión recursiva $\{x_n\}$ definida por:
$0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^3 + 2)$, $\forall n > 1$.
a) Demostrar que $0 < x_n < 1$, $\forall n \geq 1$.
b) Demostrar que $\{x_n\}$ es contractiva y calcular su límite.

10) Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$0 < a_1 < 1, \qquad a_{n+1} = a_n(2 - a_n) \qquad \forall n > 1$$

a) Demostrar que $0 < a_n < 1$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.
b) Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.
c) Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
d) Hallar el límite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
e) Analizar que ocurre para todo $a_1 \in \mathbb{R}$.

11) Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 \geq 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \qquad \forall n \geq 1$$

a) Demostrar que $a_n \geq 1$ $\forall n \geq 1$.

b) Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.

c) Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Hallar su límite.

d) Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva.

c) Demostrar utilizando el apartado a) y la identidad $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_n - a_{n-1})$ que

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} (-\frac{1}{2})^{k-2} \qquad \forall n \geq 2.$$

d) Hallar el límite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

13) Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por $a_1 = 1/2$ y $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + a_n}$ para $n \geq 1$.

1. Probar que $\{a_n\}$ es creciente.
2. Probar que $0 \leq a_n \leq 2$. Justificar porque $\{a_n\}$ converge.
3. Hallar el límite de la sucesión.
4. Si el límite de la sucesión es l. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (l - a_n)$ converge.

14) Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = c > 0, \qquad a_{n+1} = a_n^2 \qquad \forall n > 1$$

a) Demostrar que $(1-c)a_n \leq (1-c)c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.

c) ¿Para que valores de c la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente?. En tales casos hallar el límite.

d) Hallar, en función de c, el valor de a_2 y a_3. Deducir y demostrar la expresión para el término general de la sucesión, a_n.

e) ¿Para que valores de c la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente?

15) Analizar la convergencia de las series:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n} \quad con\, a > 1$$

f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

16) Hallar la suma de las siguientes series:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$$

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n-3}}{4^n}$$

17) Si las series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes, probar que también lo son:

a)

$$\sum \sqrt{a_n b_n}.$$

b)

$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$