

1) Usar la definición de límite de una sucesión para establecer los siguientes límites:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n} = 3$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n+5} = \infty$

2) Hallar, si existen, los siguientes límites:

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , donde  $a_1 > 0$  y  $a_n = 1/(n e^{a_{n-1}})$  si  $n \geq 2$ .

3) Calcular los siguientes límites:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^2 + 1}{9n^5 + 1}$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + n^2} - n}{n^2 + \sqrt{n}}$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 1}{n^3 - 2n} \right)^{\frac{n^4 - 7}{2n^2}}$$

d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n-5}}{(n-10)^n}$$

e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}$$

f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( \frac{n+1}{n} \right)$$

g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^n}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



6) Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$ , si

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

7) Sea la sucesión recursiva  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = \frac{4}{25} \left( x_n^3 + \frac{9}{2} \right), \quad \forall n > 1.$$

- Demostrar que  $0 < x_n < 1, \forall n \geq 1$ .
- Demostrar que  $\{x_n\}$  es convergente.
- Calcular su límite.

8) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por  $a_1 = 1$ , y  $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 3$  para  $n \geq 2$ . Demostrar que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es contractiva y calcular su límite.

9) Sea la sucesión recursiva  $\{x_n\}$  definida por:

$$0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{5} (x_n^3 + 2), \quad \forall n > 1.$$

- Demostrar que  $0 < x_n < 1, \forall n \geq 1$ .
- Demostrar que  $\{x_n\}$  es contractiva y calcular su límite.

10) Sea la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$0 < a_1 < 1, \quad a_{n+1} = a_n(2 - a_n) \quad \forall n > 1$$

- Demostrar que  $0 < a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- Demostrar que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona.
- Demostrar que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.
- Hallar el límite de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Analizar que ocurre para todo  $a_1 \in \mathbb{R}$ .

11) Sea la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$a_1 \geq 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \quad \forall n \geq 1$$

- Demostrar que  $a_n \geq 1 \forall n \geq 1$ .
- Demostrar que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona.
- Demostrar que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Hallar su límite.
- Demostrar que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es contractiva.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

c) Demostrar utilizando el apartado a) y la identidad  $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1})$  que

$$a_n = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2} \quad \forall n \geq 2.$$

d) Hallar el límite de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

13) Sea  $\{a_n\}$  la sucesión definida por  $a_1 = 1/2$  y  $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + a_n}$  para  $n \geq 1$ .

1. Probar que  $\{a_n\}$  es creciente.
2. Probar que  $0 \leq a_n \leq 2$ . Justificar porque  $\{a_n\}$  converge.
3. Hallar el límite de la sucesión.
4. Si el límite de la sucesión es  $l$ . Probar que la serie  $\sum_1^{\infty} (l - a_n)$  converge.

14) Sea la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$a_1 = c > 0, \quad a_{n+1} = a_n^2 \quad \forall n > 1$$

- a) Demostrar que  $(1 - c)a_n \leq (1 - c)c$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- b) Demostrar que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona.
- c) ¿Para que valores de  $c$  la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente?. En tales casos hallar el límite.
- d) Hallar, en función de  $c$ , el valor de  $a_2$  y  $a_3$ . Deducir y demostrar la expresión para el término general de la sucesión,  $a_n$ .
- e) ¿Para que valores de  $c$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente?

15) Analizar la convergencia de las series:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

4

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n} \quad \text{con } a > 1$$

f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

16) Hallar la suma de las siguientes series:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$$

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n-3}}{4^n}$$

17) Si las series de términos positivos  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  son convergentes, probar que también lo son:

a)

$$\sum \sqrt{a_n b_n}$$

b)

$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of overlapping light blue and orange shapes that resemble a stylized map or abstract graphic.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70