6 ORTOGONALIDAD

6.1 PROYECCIONES

def: $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una proyección si $P^2 = P$

ejemplo: $(n=2)$ $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

observación: sea P una proyección

P es invertible $\Leftrightarrow$ $P = I$ (identidad)

porque: si $\exists P^{-1} \Rightarrow P = P^{-1} P P = P^{-1} P = I$

lema: sea P una proyección

i. $v \in Ran(P) \Leftrightarrow Pv = v$

$Ran(P) = \{ v \in \mathbb{C}^n : \exists x \in \mathbb{C}^n \text{ t.q. } v = Px \}$

ii. sea $P^c = I - P$

- P^c es una proyección
- $Ran(P^c) = Ker\, P$

demostración:

i. $v = Px \Rightarrow v = P^2 x = Pv$

ii. $P^{c2} = P^c P^c = (I - P)(I - P) = I - P - P - P^2 = I - P = P^c \Rightarrow$ es proyección

$Ker(P) \subset Ran(P^c)$: sea $x \in Ker(P)$

$\Rightarrow v \in Ker(P)$

#

proposición: son equivalentes

I. S_1, S_2 subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^n$

t.q. $\begin{cases} S_1 \cap S_2 = \{0\} \\ S_1 + S_2 = \mathbb{C}^n \end{cases}$

$S_1 + S_2 = \{ v \in \mathbb{C}^n : v = v_1 + v_2 \ , \ v_1 \in S_1 \ , \ v_2 \in S_2 \}$

II. P proyección t.q. $S_1 = \mathrm{Ran}(P)$, $S_2 = \mathrm{Ker}(P)$

demostración:

I. => II. : construcción de una proyección P con $\mathrm{Ran}(P) = S_1$ y $\mathrm{Ker}(P) = S_2$

sea $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ base de S_1 y $\{w_k\}_{k=1}^{\ell}$ base S_2

$\Rightarrow \{v_j\}_{j=1}^{m} \cup \{w_k\}_{k=1}^{\ell}$ base $\mathbb{C}^n$

definimos $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que $\begin{cases} P v_j = v_j & , j = 1..m \\ P w_k = 0 & , k = 1..\ell \end{cases}$

sea $x \in \mathbb{C}^n$, $x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^{\ell} \beta_k w_k$

$\Rightarrow Px = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j$, $PPx = Px$ ∴ $P^2 = P$.

II. => I. : pruebe que $S_1 = \mathrm{Ran}(P)$ y $S_2 = \mathrm{Ker}(P)$

donde $Pv \in \mathrm{Ran}(P)$, $(I-P)v \in \mathrm{Ran}(I-P) \underset{\text{Lema}}{=} \mathrm{Ker}(P)$ #

def: una proyección P se dice proyección ortogonal si

$$\mathrm{Ran}(P) \perp \mathrm{Ker}(P)$$

(en este caso $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ran}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P)$)

notación: suma directa ortogonal

teorema sea P una proyección

P es pr. ortogonal $\iff P = P^*$

demostración:

$\Leftarrow$) $\quad \langle \underset{\in \mathrm{Ran}(P)}{Px}, \underset{\in \mathrm{Ker}(P)}{(I-P)x} \rangle = \langle x, \underbrace{P^*(I-P)x}_{0} \rangle = 0$ $\quad : P^* = P$, $P^2 = P$

$\Rightarrow$) sea $\{q_j\}_{j=1}^{m}$ BON de $\mathrm{Ran}(P)$

y $\{q_j\}_{j=m+1}^{n}$ BON de $\mathrm{Ker}(P)$

$\Rightarrow \{q_i\}_{j=1}^{n}$ BON de $\mathbb{C}^n$, y la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ q_1 & \cdots & q_m & q_{m+1} & \cdots & q_n \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$$ es UNITARIA : $Q^*Q = I$

además

$\Rightarrow P^* = (Q I_m Q^*)^* = Q(Q I_m)^* = P$

#

corolario: $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una proyección ortogonal $\iff \exists\, m \le n$

$\{q_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathbb{C}^n$ ortonormales t.q.

$$P = \hat{Q}\,\hat{Q}^*, \quad \text{donde } \hat{Q} = \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_m \\ | & & | \end{pmatrix}$$

ejemplo: sea $v \in \mathbb{C}^n$, $P_v x = \left\langle x, \frac{v}{\|v\|_2} \right\rangle \frac{v}{\|v\|_2}$

proyección en la dirección v

$$\Rightarrow P_v = \frac{1}{\|v\|_2^2} \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & v^* & - \end{pmatrix} = \frac{1}{\|v\|_2^2}\, v \otimes v$$

demostración:

- sean $\{q_j\}_{j=1}^{m}$ BON de $\mathrm{Ran}(P)$
- por el teorema anterior

$\hat{Q}^*$

$\hat{Q}\,\hat{Q}^*$