

Hoja 5 de Problemas
Formas Bilineales, Formas Cuadráticas y Espacios Euclídeos

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son bilineales

1. $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 + y_1$
2. $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1$
3. $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + 1$
4. $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2$
5. $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$
6. $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i=1}^3 i \cdot x_i y_i$
7. $F : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(p(t), q(t)) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0)$.
8. $F : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(A, B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
9. $F : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \right) = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,2}$$

10. $F : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\mathcal{C}([a, b])$ es el espacio vectorial de las funciones reales continuas del intervalo $[a, b]$ en \mathbb{R} , tal que

$$F(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - 3x_2 y_1$. Se pide

1. Calcular la representación matricial A de F respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2 .
2. Determinar la representación matricial B de F respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$
3. Hallar la matriz de paso P de A a B .
4. Calcular el valor $F((2, 3), (2, 3))$ utilizando las matrices A y B , respectivamente.

3. Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 - 3x_1 y_2 + x_2 y_2$. Se pide

1. Calcular la representación matricial A de F respecto a la base $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}$.
2. Determinar la representación matricial B de F respecto a la base $\mathcal{B}_2 = \{(2, 1), (1, -1)\}$
3. Hallar la matriz de paso P de A a B .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1. Forma bilineal asociada a Q .
 2. Nueva expresión de la forma cuadrática al tomar como base $\{(1, -1), (1, 2)\}$.
6. Sea \mathcal{V} un espacio vectorial real de dimensión tres y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathcal{V} . En \mathcal{V} se considera la forma bilineal simétrica definida por:

$$F(v_1, v_1) = F(v_2, v_2) = 1, F(v_3, v_3) = 2, F(v_1, v_2) = F(v_1, v_3) = 0, F(v_2, v_3) = -1$$

1. Dar la matriz asociada a F respecto de la base \mathcal{B} .
 2. Clasificar la forma cuadrática asociada a F .
7. Clasificar las formas cuadráticas reales $Q_a(x, y, z) = x^2 + 2ayz$, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
8. Se considera la forma bilineal F sobre \mathbb{R}^3 definida, en la base canónica por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide

1. Demostrar que F define un producto escalar sobre \mathbb{R}^3 .
 2. En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ se consideran los vectores $u = (1, 1, 1), v = (1, 0, 0)$. Calcular $\|u\|, \|v\|, d(u, v), \angle(u, v)$.
 3. Calcular el complemento ortogonal de $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$ en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$.
 4. En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$, aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
9. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0, \pi])$ y F la aplicación

$$F: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \longmapsto \int_0^\pi f(x)g(x)dx$$

Se pide

1. Demostrar que F define un producto escalar sobre \mathcal{V} .
 2. En el espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ se consideran los vectores $u = \text{sen}(x), v = \text{cos}(x)$. Calcular $\|u\|, \|v\|, d(u, v), \angle(u, v)$.
10. Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[t], \langle \cdot, \cdot \rangle_{f_0^1})$. Se pide
1. Calcular $d(t, t^2), \|t + 1\|, \angle(t, t^2)$.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

1. Ecuaciones paramétricas, implícitas y bases para $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
2. Hallar una base ortogonal para \mathcal{W}_2 y su complemento ortogonal \mathcal{W}_2^\perp .

12. Dada la forma bilineal simétrica F sobre \mathbb{R}^3 definida en la base canónica por:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Se pide

1. Determinar para que valores de a define F un producto escalar. Para $a = 1$, diagonalizar F mediante una transformación ortogonal.
 2. Para $a = 1$, estudiar si los vectores $(1, 1, 1)$ y $(2, -1, -1)$ son ortogonales.
13. Si F es la forma bilineal en \mathbb{R}^2 cuya matriz asociada con respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

determinar para que valores de a define F un producto escalar.

14. Sea $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal definida en la base canónica por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Demostrar que F es simétrica y obtener la expresión polinomial, respecto a la base canónica, de la forma cuadrática Q asociada a F .
 2. Clasificar Q .
 3. En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$, que define F , obtener una base ortonormal del complemento ortogonal del subespacio vectorial $\mathcal{W} = L(\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\})$.
 4. Diagonalizar A mediante transformaciones ortogonales.
15. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y F la forma bilineal sobre \mathcal{V} representada en la base canónica por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide :

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

4. Diagonalizar A mediante transformaciones ortogonales.

16. Dada la forma cuadrática Q sobre \mathbb{R}^3 tal que

$$\mathcal{M}(Q, B_c) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. Clasificar Q .
2. Determinar una base ortogonal respecto de la cual Q se representa de forma diagonal.
3. Sea F la forma bilineal simétrica asociada a Q . En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_F)$ aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

17. Diagonalizar, mediante transformaciones ortogonales, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Obtener la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. Resolver, utilizando la factorización QR , el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

20. Se considera el espacio euclídeo usual $(\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \langle, \rangle_u)$. Sea $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$. Se pide determinar la matriz simétrica 2×2 que minimiza la distancia a la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Resolver, mediante mínimos cuadrados, el sistema incompatible

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the "Cartagena" part. The text is set against a background of a blue and orange gradient with a subtle geometric pattern.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**