

Ejercicios del tema 3, primera parte

1.- Estudia si las siguientes aplicaciones son lineales

$$f_1: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad f_2: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (0, y, 0) \quad (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x - y)$$

$$f_3: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad f_4: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, -y, z + 1) \quad x \mapsto (\cos x, \operatorname{sen} x)$$

2.- Sea f una aplicación lineal de \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^2 que cumple $f(1, 1) = (2, 3)$ y $f(0, 1) = (1, 2)$.

- (1) Halla $f(3, -2)$
- (2) Dado un vector cualquiera (a, b) de \mathbf{R}^2 , halla $f(a, b)$.
- (3) Determina el núcleo de f .
- (4) Halla una base de la imagen de f y la dimensión de la imagen de f .
- (5) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

3.- Sea f una aplicación lineal de \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^3 que cumple $f(1, 1) = (1, 0, -1)$ y $f(1, 2) = (0, -1, 1)$.

- (1) Halla $f(3, 5)$.
- (2) Dado un vector cualquiera (a, b) de \mathbf{R}^2 , halla $f(a, b)$.
- (3) Determina el núcleo de f .
- (4) Halla una base de la imagen de f y la dimensión de la imagen de f .
- (5) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

4.- Estudia si existe alguna aplicación lineal de \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^2 que cumpla $f(1, 0) = (1, 1)$, $f(1, 1) = (0, 1)$ y $f(1, -1) = (1, 0)$.

5.- Sea f una aplicación lineal de \mathbf{R}^3 a \mathbf{R}^3 dada por $f(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

- (1) Halla una base del núcleo de f y la dimensión del núcleo de f .
- (2) Halla una base de la imagen de f y la dimensión de la imagen de f .
- (3) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

6.- Sea f una aplicación lineal de \mathbf{R}^3 a \mathbf{R}^2 dada por $f(x, y, z) = (x + z, 2x - y + z)$.

- (1) Halla una base del núcleo de f y la dimensión del núcleo de f .
- (2) Halla una base de la imagen de f y la dimensión de la imagen de f .
- (3) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

7.- Sea $f: \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3)$ donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

- (1) Da unas ecuaciones implícitas y una base del núcleo de f . Halla la dimensión del núcleo de f .
- (2) Da una base de la imagen de f y calcula la dimensión de la imagen de f .
- (3) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

8.- Sea $f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$p(x) \mapsto p(x).$$



- (1) Comprueba que f es una aplicación bien definida.
- (2) Demuestra que f una aplicación lineal.
- (3) Determina el núcleo de f . ¿Qué dimensión tiene?
- (4) Determina la imagen de f . ¿Qué dimensión tiene?
- (5) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

10.- Sea V el espacio vectorial formado por los polinomios una variable X con coeficientes reales y grado menor o igual que 2. Consideramos la aplicación lineal f de V en V que cumple $f(1 + x + x^2) = -1 + 3X$, $f(1 + x - x^2) = 3 + 2x$ y $f(1 - x + x^2) = 1 + 2x$.

- (1) Halla $f(-25 + 15x - 10x^2)$ y $f(a + bX + cX^2)$.
- (2) Halla la dimensión y una base del núcleo de f .
- (3) Halla la dimensión y una base de la imagen de f .
- (4) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

11.- Sea V un espacio vectorial y sean U y W dos subespacios vectoriales de V suplementarios. Recuerda que, para todo $\bar{v} \in V$, existen $\bar{u} \in U$ y $\bar{w} \in W$ únicos, tales que $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$. Consideramos la aplicación

$$f: V \longrightarrow V \\ \bar{v} \longmapsto \bar{w},$$

donde \bar{w} es el vector de W que aparece en la expresión anterior $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$.

- (1) Comprueba que f es una aplicación bien definida.
- (2) Demuestra que f una aplicación lineal.
- (3) Determina el núcleo de f .
- (4) Determina la imagen de f .
- (5) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?
- (6) Si $V = \mathbf{R}^3$, $U = L((0, 0, 1))$ y $W = L((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, calcula $f(x, y, z)$.
- (7) Si $V = \mathbf{R}^3$, $U = L((1, 1, 1))$ y $W = L((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, calcula $f(2, 2, 2)$, $f(1, -7, 0)$, $f(0, 0, 1)$ y $f(x, y, z)$.

12.- Sea $f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x, y, z) = (x + 2y + z, -y + z, x - z)$ y sea $g: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal dada por $g(x, y, z) = (x + 2y, -x + y + z, 2x + z, x + y + z)$.

- (1) Estudia si f es biyectiva y, en caso afirmativo, halla su aplicación inversa.
- (2) Halla $g \circ f$ y calcula la dimensión de su imagen. ¿Es $g \circ f$ inyectiva?

13.- Sea $f: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^5$ una aplicación lineal.

- (1) Si f es sobreyectiva y la dimensión del núcleo de f es 2, ¿cuánto vale n ?
- (2) Si f es sobreyectiva, ¿qué condición ha de cumplir n ?
- (3) Si f es inyectiva, ¿qué condición ha de cumplir n ?
- (4) Si $n = 6$, ¿puede ser f inyectiva?
- (5) Si $n = 6$, ¿es f sobreyectiva necesariamente?
- (6) Si $n = 4$, ¿es f necesariamente inyectiva?
- (7) Si $n = 4$, ¿puede ser f sobreyectiva?
- (8) Si $n = 5$, ¿es f necesariamente biyectiva?

14.- ¿Existe alguna aplicación lineal f de \mathbf{R}^{2018} a \mathbf{R}^{2018} tal que $\text{Ker } f = \text{Im } f$? ¿Y alguna aplicación lineal f de \mathbf{R}^{2019} a \mathbf{R}^{2019} tal que $\text{Ker } f = \text{Im } f$?

15.- Un endomorfismo f es una aplicación lineal de un espacio vectorial V en sí mismo. Se dice que un vector $\bar{u} \in V$ es fijo por un endomorfismo f de V si verifica que $f(\bar{u}) = \bar{u}$. Halla los vectores fijos de los endomorfismos f de \mathbf{R}^3 dados por:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99