

1. ESPACIOS MÉTRICOS. BOLAS Y ESFERAS

1. Estudia si (\mathbb{R}, d) es un espacio métrico, donde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Dibuja la bola $B(x, r)$ cuando i) $x = 0$ y $r = 1/2$; ii) $x = 1/2$ y $r = 1$.

2. Demuestra que si d es una distancia entonces $d'(x, y) = \min(d(x, y), 1)$ también lo es.

3. Decide razonadamente si

i) $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$ define una métrica en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

ii) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$ define una métrica en \mathbb{R} .

4. Demuestra la *desigualdad triangular inversa*: en un espacio métrico (X, d) ,

$$\forall x, y, z \in X, \quad |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

5. Dado un conjunto no vacío, sea \mathcal{F} la colección de todos sus subconjuntos finitos. Para $A \in \mathcal{F}$, sea $|A|$ el número de elementos de A .

i) Comprueba que

$$d(A, B) = |A \Delta B| = |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)|$$

define una métrica en \mathcal{F} .

ii) Sea \mathcal{F} , concretamente, la colección de todos los subconjuntos finitos de \mathbb{N} . Para la métrica descrita en el apartado anterior y el punto $A = \{1, 2\}$ en el espacio \mathcal{F} , describe la esfera $S(A, 1) = \{B \in \mathcal{F} : d(A, B) = 1\}$.

6. Comprueba que los siguientes espacios de sucesiones con las distancias asociadas son espacios métricos:

i) \mathbb{R}^ω es el espacio de sucesiones de números reales $x = (x_n)$, y $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \rightarrow \mathbb{R}$ la distancia

$$d(x, y) = \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)} \quad x \in \mathbb{R}^\omega, \quad y \in \mathbb{R}^\omega$$

¿Cuál es la distancia entre las sucesiones $x = (x_n) = ((1 - 2^{-n})^{-1})$ e $y = (y_n) = (1)$?

ii) ℓ_∞ es el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales, y $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$d(x, y) = \sup \{|x_n - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

iii) ℓ_2 es el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)$ de \mathbb{R} tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$; y $d : \ell_2 \times \ell_2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$d(x, y) = \left(\sum_n |x_n - y_n|^2 \right)^{1/2}$$

Indicación: Si $x = (x_n) \in \ell_2$, $y = (y_n) \in \ell_2$, entonces $\sum |x_n y_n|$ converge y, además, $(\sum |x_n y_n|)^2 \leq (\sum x_n^2)(\sum y_n^2)$.

7. Si (X, d) es un espacio métrico y D la función definida en $(X \times X) \times (X \times X)$ por

$$D((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = d(x_1, x'_1) + d(x_2, x'_2),$$

comprueba que D es una métrica. Demuestra que la función distancia $d : (X \times X, D) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. INTERIOR, ADHERENCIA, FRONTERA Y DERIVADO EN ESPACIOS MÉTRICOS

9. ¿Es cierto que en cada espacio métrico, el cierre de la bola abierta $B(a, r)$ es la bola cerrada $\bar{B}(a, r)$?

10. Se considera el siguiente subconjunto de \mathbb{R} :

$$A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3) \cup \left\{ \frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Halla $\overset{\circ}{A}$, \bar{A} y A' en las siguientes métricas sobre \mathbb{R} :

i) La usual.

ii) La discreta.

iii) La métrica dada por la fórmula $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$.

Indicación: Conviene comparar los conjuntos abiertos en esta métrica con los la usual.

11. Halla un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que, con la métrica usual de \mathbb{R} , tenga como frontera el conjunto dado:

$$\partial A = [1, 2] \cup \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

12. Para cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 , se pide hallar su frontera y decidir si es abierto o cerrado.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 4\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 3\}.$$

13. Determina los conjuntos A' y \bar{A} para $A = \{(0, 2)\} \cup ([0, 1] \times [0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$.

14. Sea $U \subset \mathbb{R}^N$ conjunto abierto y $A \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto tal que $U \subset A$. Demuestra que $U \subset \overset{\circ}{A}$. Enuncia y demuestra la afirmación análoga para conjuntos cerrados.

15. Sean A y B subconjuntos de \mathbb{R}^2 dotado de la métrica euclídea. Sea x un punto de acumulación de $A \cup B$. ¿Se puede concluir que x es un punto de acumulación de A o de B ?

16. Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestra que si A es un subconjunto finito de X , entonces A no tiene puntos de acumulación; es decir $A' = \emptyset$.

17. Si (X, d) es un espacio métrico, $A \subset X$ y $a \in X$, se define $d(a, A) = \inf \{d(a, x) : x \in A\}$.

i) Demuestra que $d(a, A) = 0$ si y sólo si $a \in \bar{A}$.

ii) Para $\alpha \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, definamos $B_\alpha(A) = \{x \in X : d(x, A) < \alpha\}$. Prueba que $\forall \alpha > 0, \beta > 0$ se cumple la inclusión

$$B_\alpha(B_\beta(A)) \subset B_{\alpha+\beta}(A)$$

pero que la igualdad no es necesariamente cierta.

3. CONVERGENCIA DE SUCESIONES Y FUNCIONES CONTINUAS EN ESPACIOS MÉTRICOS

18. Si en un espacio métrico (X, d) se cumple que $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$, demuestra que entonces $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.

19. Sean X e Y dos espacios métricos y $f, g : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas.

i) Demuestra que $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es un subconjunto cerrado de X .

ii) Si $f, g : X \rightarrow Y$ son funciones continuas, demuestra que $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es un subconjunto cerrado de X .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99