las curvas de módulo y fase de respuesta en frecuencia (log-magnitude, phase) en función de log ω
se denominan **diagramas de Bode**
podemos dibujar un diagrama de Bode como una aproximación de líneas rectas:

ceros: $z_1,\ z_2, \ldots$

polos: $p_1,\ p_2, \ldots$

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_k)}{s^m(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_m)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K\,|(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_k)|}{|s^m|\,|(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_m)|}\Big|_{s\to j\omega}$$

$$\begin{aligned}20\log|G(j\omega)| &= 20\log K + 20\log|(s+z_1)| + 20\log|(s+z_2)| + \ldots\\ &-20\log|(s^m)| - 20\log|(s+p_1)| - 20\log|(s+p_2)|\ldots|_{s\to j\omega}\end{aligned}$$

en el diagrama Bode del módulo los términos de los 'ceros' suman; los términos de los polos, restan:
representamos aproximadamente diagramas de Bode sumando (ceros) o restando (polos) la respuesta de cada término

Podemos construir el diagrama de Bode de funciones más complicadas a partir de los términos:

$$(s+a), \frac{1}{s+a}, s, \frac{1}{s}$$ cero / polo real (-a); cero / polo en el origen

$$\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2}$$ polos complejos conjugados

$$\boxed{G(s) = (s+a)} = (j\omega + a) = a\left(j\frac{\omega}{a} + 1\right)$$

módulo: $|G(\omega)| = \sqrt{a^2 + \omega^2} = a\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$

fase: $\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$

$\omega << a$

$$|G(\omega)| \approx a \qquad 20\log|G(\omega)| \approx 20\log a$$

$$\phi(\omega) \to 0$$

$\omega >> a$

$$20\log|G(\omega)| \approx 20\log\omega$$

en representación de '20 log G' vs 'log w' esto es
recta de pendiente 20 (aumenta 6 dB al doblar la frecuencia:
6dB/octava=20dB/decada)

$$\phi \to 90^\circ$$

$\omega = a$ ambas aproximaciones coinciden y $\phi = 45^\circ$

los diagramas de Bode según las aproximaciones anteriores:

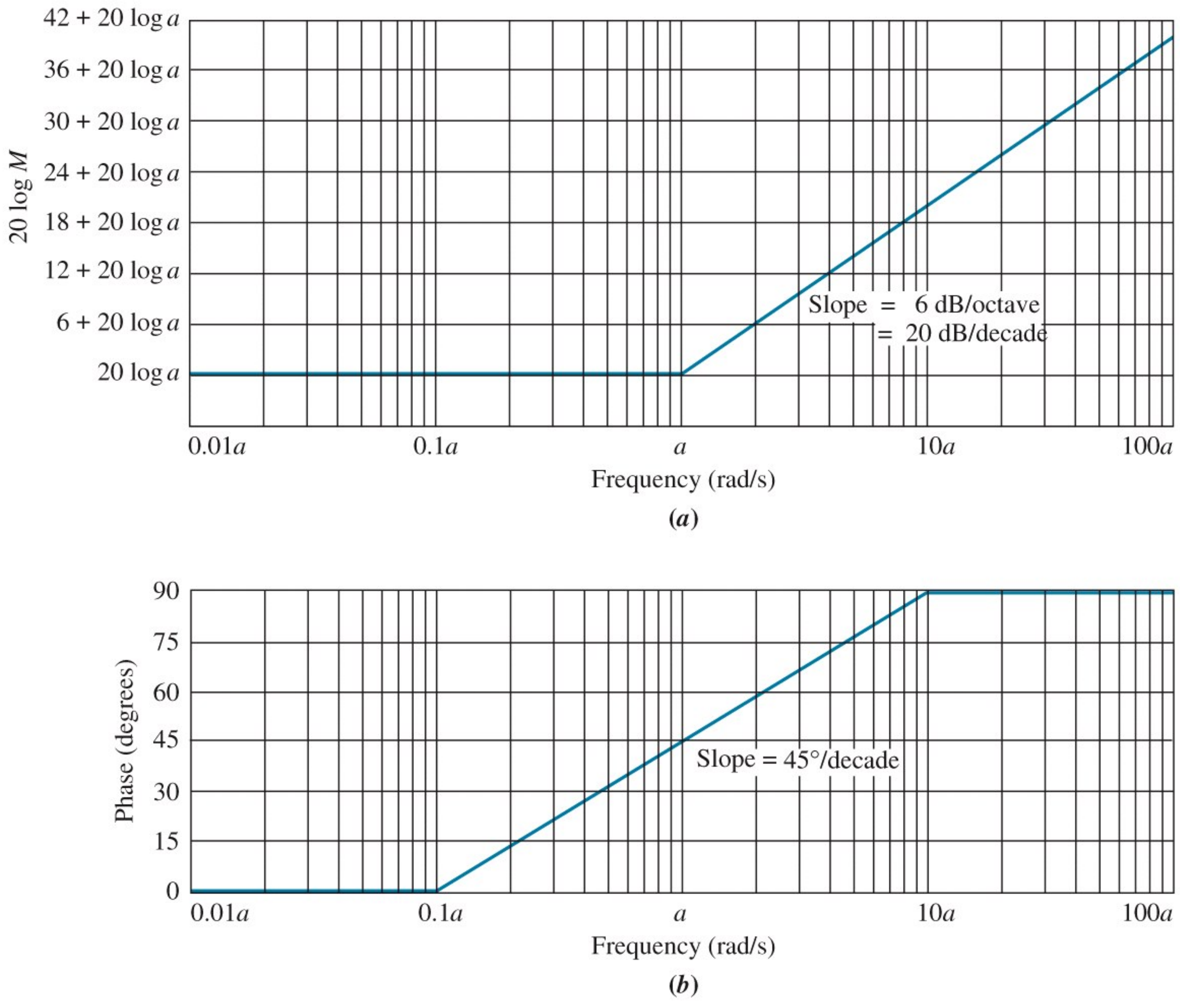


**Figure 10.6**

si normalizamos el diagrama de Bode del módulo y escalamos el diagrama de fase:

$$G(s) = (s + a) = a\left(\frac{s}{a} + 1\right) \quad \longrightarrow \quad (s_1 + 1)$$

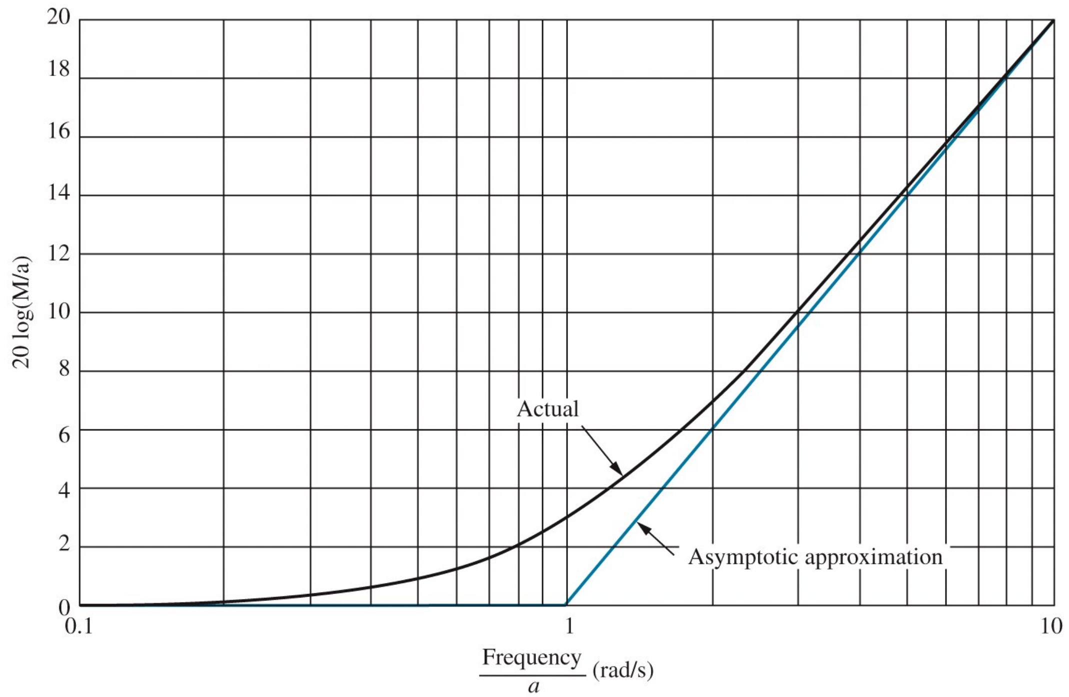


Figure 10.7


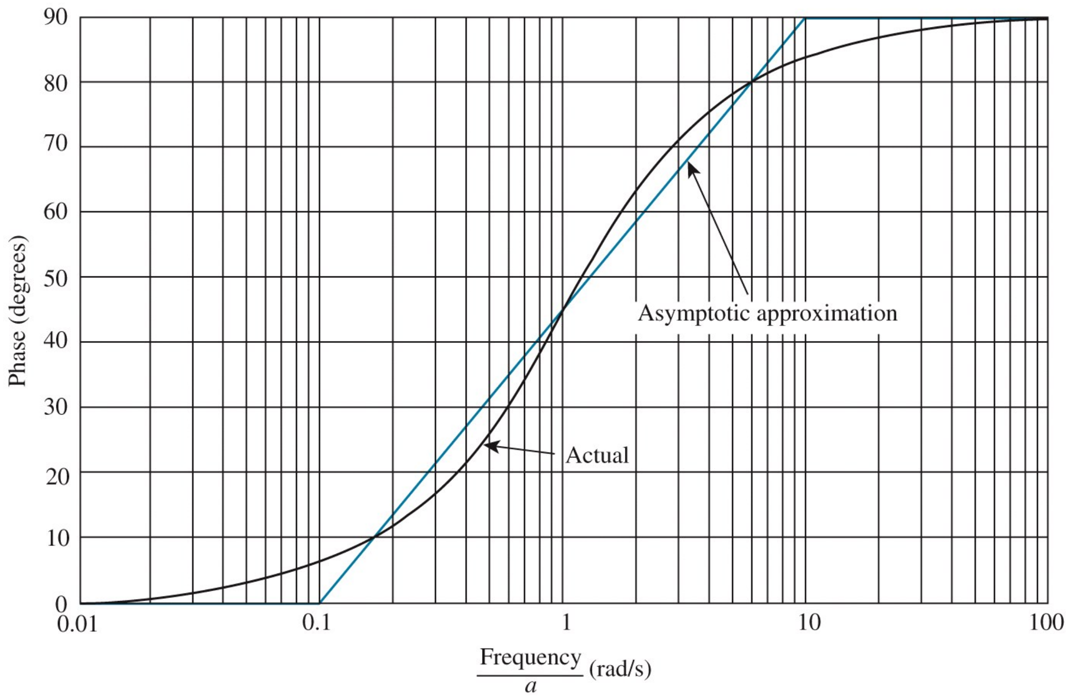


Figure 10.8

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s+a}} = \frac{1}{a\left(\frac{s}{a}+1\right)} = \frac{1}{a\left(j\frac{\omega}{a}+1\right)}$$

módulo: $|G(\omega)| = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{w^2}{a^2}}}$ fase: $\phi = \arctan\left(-\frac{\omega}{a}\right)$

$\omega << a$

$$|G(\omega)| = \frac{1}{a} \qquad 20\log|G(\omega)| = 20\log\left(\frac{1}{a}\right) = -20\log a \qquad \phi \to 0$$

$\omega >> a$

$$20\log|G(\omega)| = 20\log\left(\frac{1}{\omega}\right) = -20\log\omega \qquad \phi \to -90^\circ$$

$\omega = a$ ambas aproximaciones coinciden y $\phi = -45^\circ$

## Diagramas de Bode aproximados para el caso de un polo (real); y, un cero

$$G(s) = s + a \qquad\qquad G(s) = \frac{1}{s+a}$$

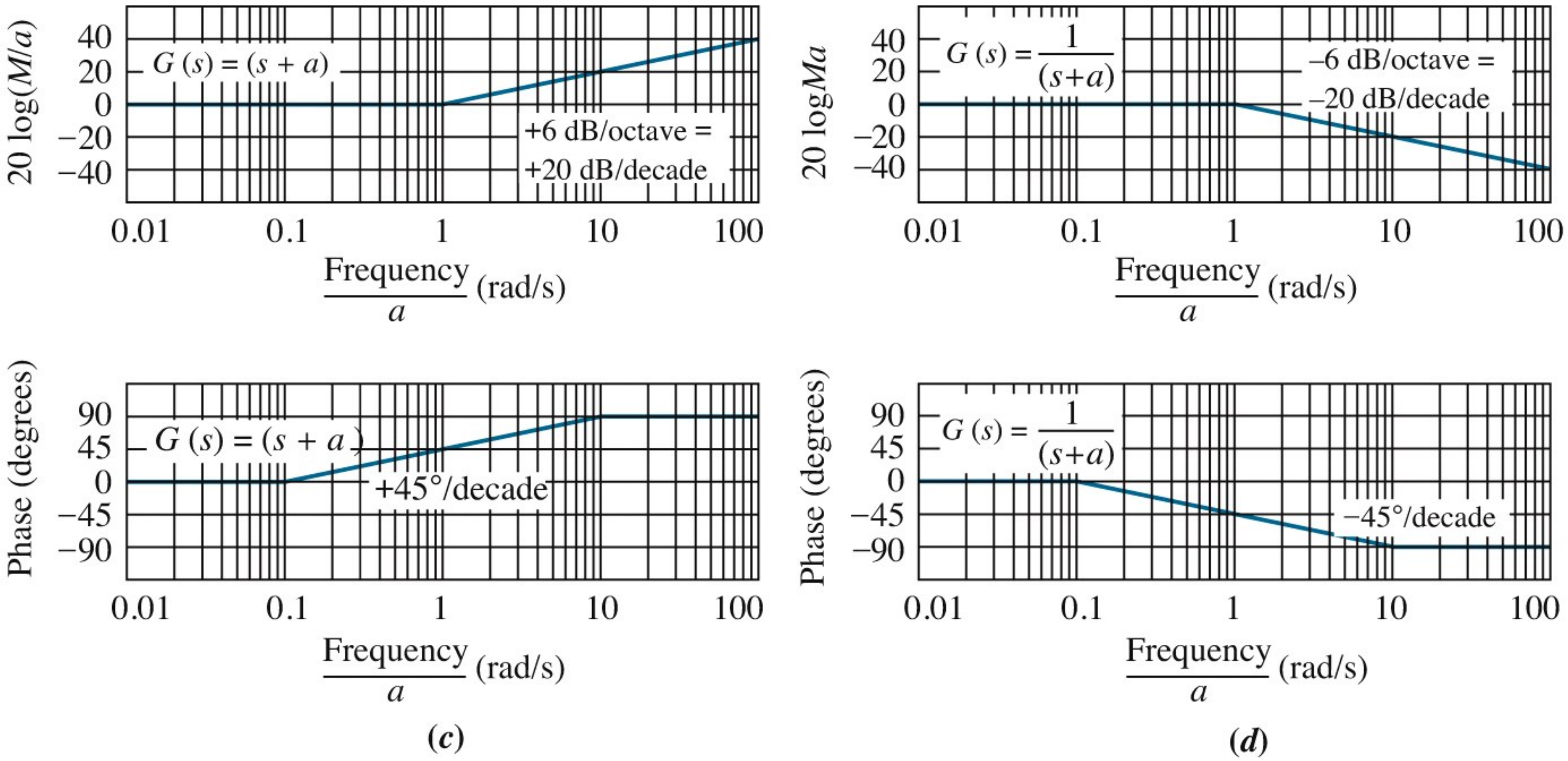


Figure 10.9cd

# Diagramas de Bode aproximados para el caso de un polo en el origen; y, un cero en el origen

$$G(s) = s \qquad\qquad G(s) = \frac{1}{s}$$

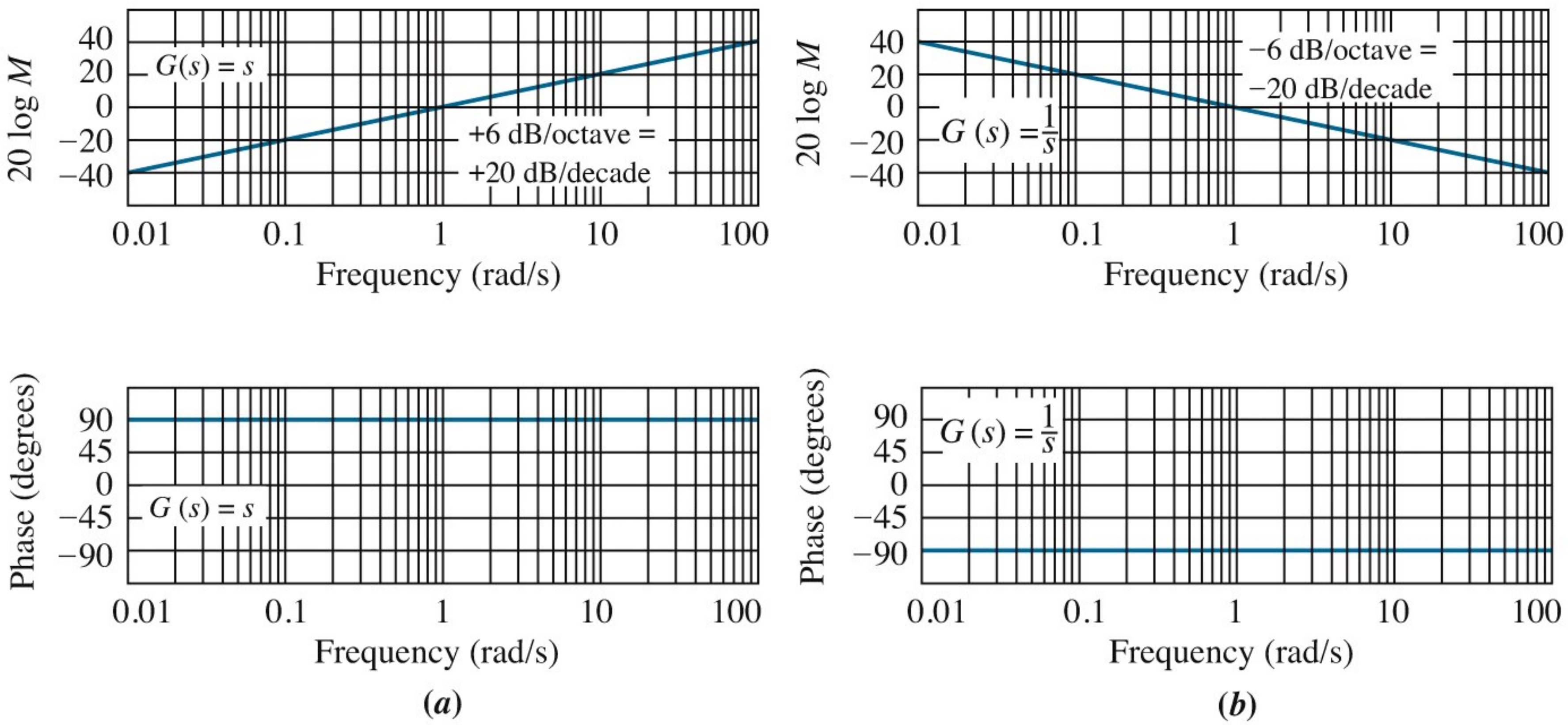


**Figure 10.9ab**

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2}}$$

normalizando a la frecuencia $\omega_n$ llamamos *u* a la variable normalizada $u = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - u^2 + j2\xi u}$$

módulo: $\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\xi u)^2}}$ fase: $\arctan\left(\frac{-2\xi u}{1-u^2}\right)$

$$u << 1$$

$$20 \log |G(\omega)| = -10 \log 1 = 0 \ \text{dB} \qquad \phi \to 0$$

$$u >> 1$$

$$20 \log |G(\omega)| = -10 \log u^4 = -40 \log u \qquad \phi \to -180^\circ$$

En el caso del diagrama de Bode de polos complejos conjugados, la diferencia entre la curva real y la aproximación asintótica depende del coeficiente de amortiguamiento ($\xi$), y la aproximación asintótica debe corregirse cuando $\xi$<0.707

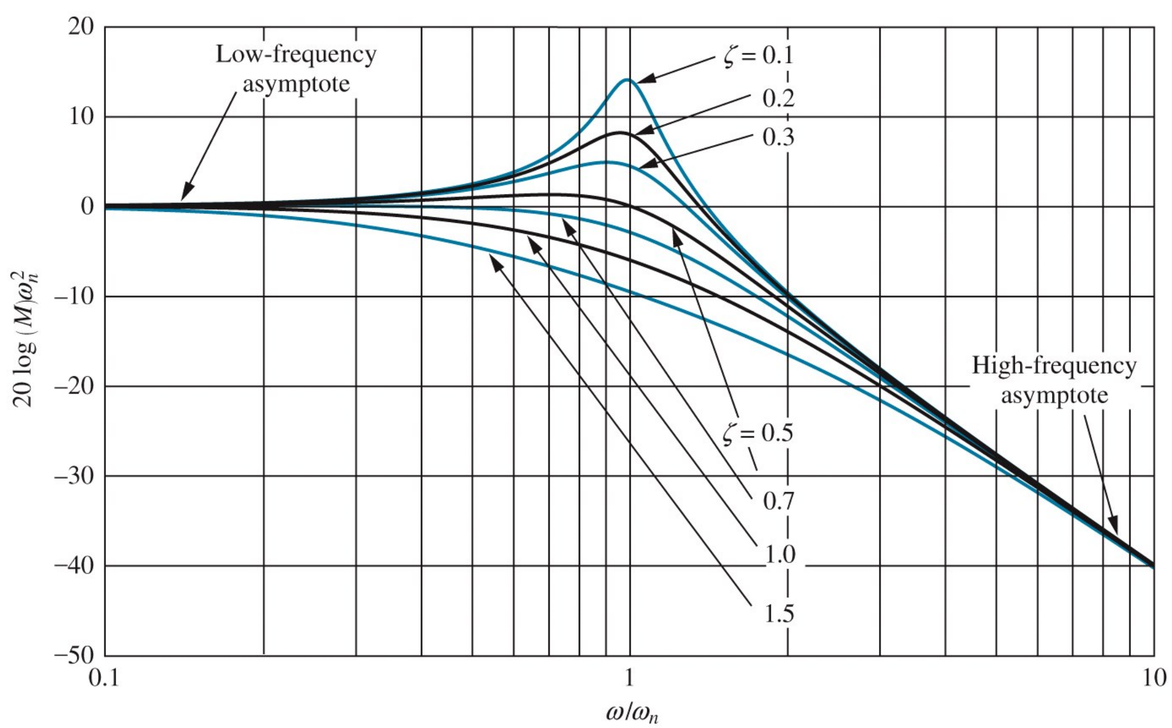


Figure 10.16


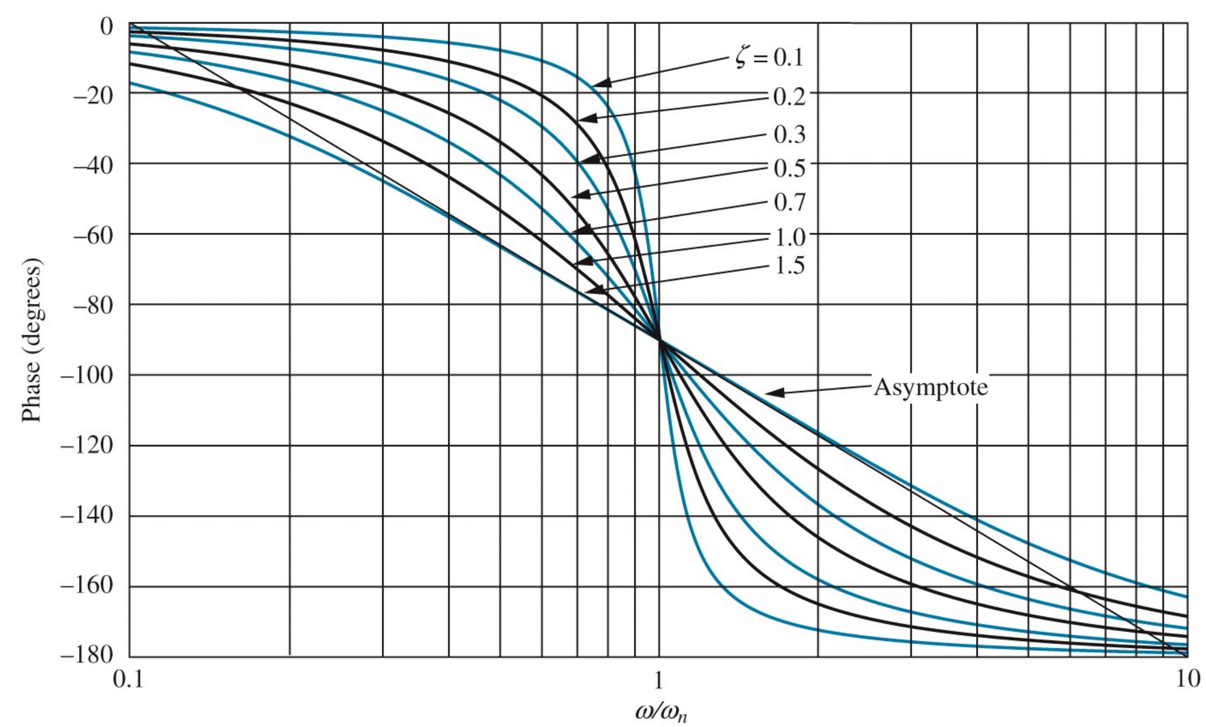


Figure 10.17


el valor máximo del módulo de la respuesta en frecuencia se produce a la frecuencia de resonancia:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \;\; \xi < 0.707$$