

Matemáticas Empresariales

Universidad Europea de Madrid

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Funciones reales de varias variables
 - Primeras definiciones
 - Curvas de nivel
 - Gráfica de una función de varias variables
 - Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables
 - Interpretación geométrica
 - Derivadas parciales orden superior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Funciones reales de varias variables
 - Primeras definiciones
 - Curvas de nivel
 - Gráfica de una función de varias variables
 - Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables
 - Interpretación geométrica
 - Derivadas parciales orden superior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Función de varias variables

Podemos generalizar el concepto de función de una variable para varias. Así una función de varias variables es una regla para obtener un nuevo número (real) a partir de los valores de varias variables x, y, z, t, \dots

$$f(x, y, z, \dots)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

1. Supongamos que somos dueños de una empresa que fabrica dos modelos de bocinas: la mini y la super. Su coste mensual total en euros por fabricar x de las minis e y de las super viene dado por

$$C(x, y) = 10000 + 20x + 40y$$

¿Qué quiere decir cada término en esta fórmula?.

* El término constante representa el costo total de no fabricar nada.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

1. Supongamos que somos dueños de una empresa que fabrica dos modelos de bocinas: la mini y la super. Su coste mensual total en euros por fabricar x de las minis e y de las super viene dado por

$$C(x, y) = 10000 + 20x + 40y$$

¿Qué quiere decir cada término en esta fórmula?.

* El *término constante* representa el coste total de no fabricar nada.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

★ Los *coeficientes de la x y la y*:

Supongamos que en un mes se fabrica cierta cantidad de bocinas mini y super, y el mes siguiente se aumenta la producción de las mini en una.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

Los costes son: $C(x, y) = 10000 + 20(x + 1) + 40y = 10000 + 20x + 20 + 40y = C(x, y) + 20$ Así cada mini aumenta 20 euros al coste total. Se dice que 20 es el coste marginal de cada mini. De la misma forma, una super aumenta 40 euros al coste total. El coste marginal de la super es de 40 euros.

Observación Ésta es una función *lineal* de dos variables. Los coeficientes representan papeles parecidos a los de la pendiente de

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

Los costes son: $C(x, y) = 10000 + 20(x + 1) + 40y = 10000 + 20x + 20 + 40y = C(x, y) + 20$ Así cada mini aumenta 20 euros al coste total. Se dice que 20 es el coste marginal de cada mini. De la misma forma, una super aumenta 40 euros al coste total. El coste marginal de la super es de 40 euros.

Observación Ésta es una función *lineal* de dos variables. Los coeficientes representan papeles parecidos a los de la pendiente de

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Dominio e Imagen

Dominio

Llamamos *dominio* de una función f , que anotaremos por $Dom(f)$, al conjunto de partida A .

Si no se especifica el conjunto de salida, el dominio de f será el

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Dominio e Imagen

Dominio

Llamamos *dominio* de una función f , que anotaremos por $Dom(f)$, al conjunto de partida A .

Si no se especifica el conjunto de salida, el dominio de f será el

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Dominio e Imagen

Imagen

Llamamos *imagen* de una función f , que denotaremos por $Im(f)$, al conjunto de todos los números reales que son imagen de algún par ordenado del dominio de la función.

En símbolos:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Dominio e Imagen

Imagen

Llamamos *imagen* de una función f , que denotaremos por $Im(f)$, al conjunto de todos los números reales que son imagen de algún par ordenado del dominio de la función.

En símbolos:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Funciones reales de varias variables
 - Primeras definiciones
 - Curvas de nivel
 - Gráfica de una función de varias variables
 - Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables
 - Interpretación geométrica
 - Derivadas parciales orden superior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Un plano horizontal tiene por ecuación $z = c$ con c constante. La intersección de la gráfica de f con el plano horizontal son por tanto los puntos (x, y, z) tales que $z = f(x, y) = c$.

Para entender como es la gráfica de f , sin embargo, lo que nos interesa es dibujar este conjunto sobre el plano (x, y) . Es decir, el conjunto formado por todos los puntos (x, y) del plano en los que f toma el valor c .

Definición

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Un plano horizontal tiene por ecuación $z = c$ con c constante. La intersección de la gráfica de f con el plano horizontal son por tanto los puntos (x, y, z) tales que $z = f(x, y) = c$.

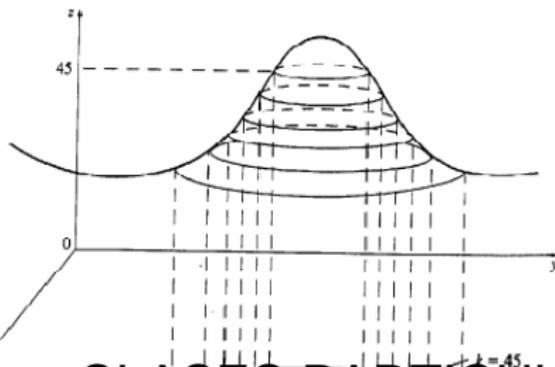
Para entender como es la gráfica de f , sin embargo, lo que nos interesa es dibujar este conjunto sobre el plano (x, y) . Es decir, el conjunto formado por todos los puntos (x, y) del plano en los que f toma el valor c .

Definición

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Gráficamente



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

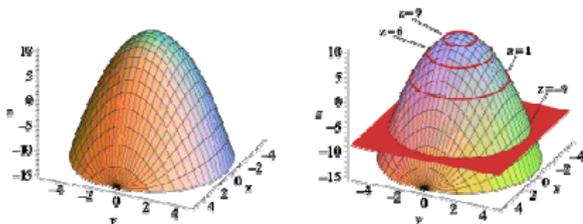
Ejemplo 1

La función $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$ determina una superficie que se llama paraboloides.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo 1



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

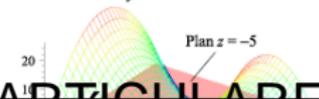
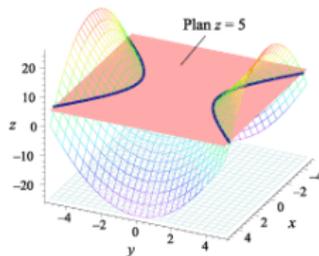
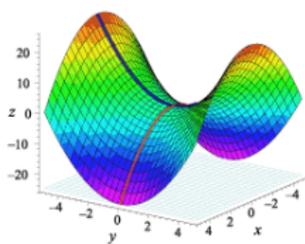
Ejemplo 2

La función $f(x, y) = y^2 - x^2$ determina una superficie que se llama paraboloides hiperbólico o silla de montar.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo 2



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Observación

Una curva de nivel es entonces el conjunto de puntos en los que f vale c .

Veremos después algunas propiedades de las curvas (en general conjuntos) de nivel que los hacen interesantes en sí mismos y que tienen una interpretación económica concreta, según la función que estemos estudiando.

Además, las curvas de nivel pueden servir para ayudarnos a visualizar la gráfica de una función de varias variables.

Cartagena99

CLASIFICACIÓN PARTICULAR DE LAS RESPONSABILIDADES
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Funciones reales de varias variables
 - Primeras definiciones
 - Curvas de nivel
 - Gráfica de una función de varias variables
 - Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables
 - Interpretación geométrica
 - Derivadas parciales orden superior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Gráfica de una función de varias variables

Al igual que en las funciones reales de una variable podemos dibujar la función en el plano, es posible realizar la gráfica de una función de dos variables $f(x, y)$, considerando todos los puntos $(x, y, f(x, y))$, en tres ejes perpendiculares. Así la gráfica es el conjunto de los puntos (x, y, z) tales que $f(x, y) = z$ y representa una *superficie*.

En general, no es fácil dibujar la gráfica de una función de dos variables. por lo que nos podemos ayudar de las curvas de nivel.

Cartagena99

CLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Gráfica de una función de varias variables

En Economía, las curvas de nivel aparecen en muchas aplicaciones diferentes. Por ejemplo, si tenemos una función que representa la producción en función del trabajo y el capital, las curvas de nivel se denominan *isocuantas* y las forman aquellos valores para los que la producción es constante.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Observación

Podemos pensar a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ como un paisaje con un cierto relieve. En cartografía se utilizan las curvas de nivel para incorporar a un mapa (plano) alguna información tridimensional del relieve que corresponde a la zona representada. En esta figura se muestra una parte de un mapa cartográfico del Parque Nacional de Ordesa, en los Pirineos en el que se aprecian con claridad esas curvas de nivel.

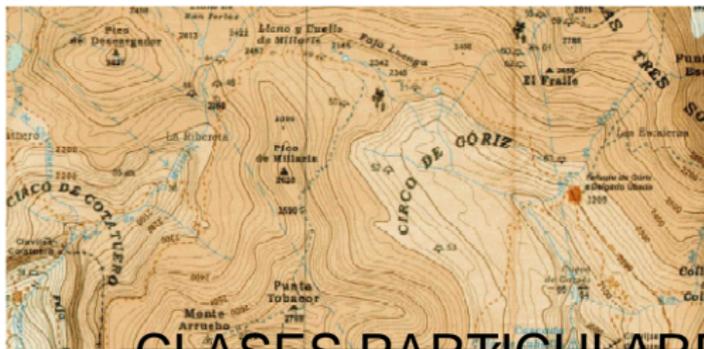
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos
Funciones reales de varias variables
Optimización

Primeras definiciones
Curvas de nivel
Gráfica de una función de varias variables
Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables
Interpretación geométrica
Derivadas parciales orden superior

Observación



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

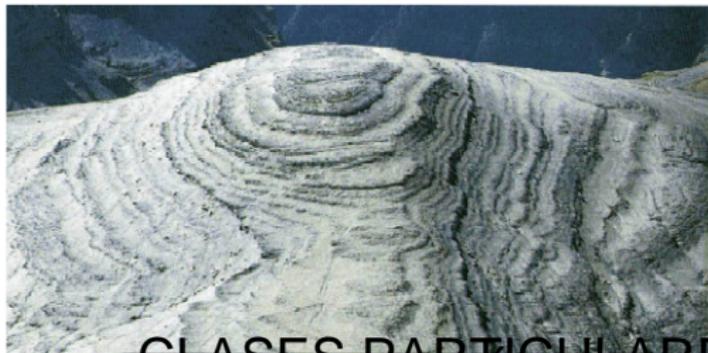
Observación

En la esquina superior izquierda de este mapa aparece el Pico Descargador, una curiosa formación geológica en la que la naturaleza parece haber querido representar de modo explícito la idea de curvas de nivel. He aquí una foto de ese pico:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Observación



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

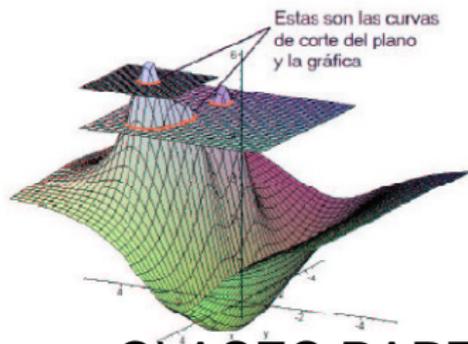
Observación

Las curvas de nivel se obtienen cortando la gráfica con planos horizontales situados a distintas alturas. En la siguiente figura se muestra una gráfica cortada con dos planos horizontales a distintas alturas.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Observación



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

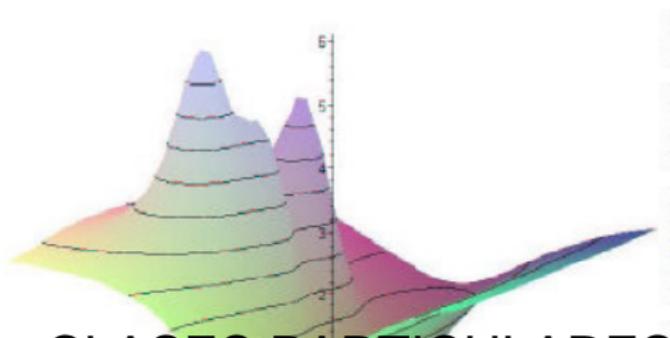
Observación

Si cortamos la gráfica con varios de estos planos horizontales obtenemos una serie de curvas situadas sobre la gráfica:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Observación



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

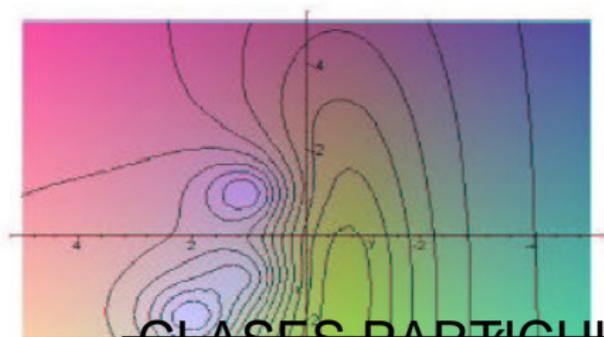
Observación

Si ahora proyectamos esas curvas sobre el plano xy (lo cual equivale a mirar la gráfica, el paisaje, desde arriba, a vista de pájaro), vemos una familia de curvas planas, que son las curvas de nivel de esta gráfica:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Observación



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Observación

Recordemos que dijimos que una función de una variable podíamos escribirla, en forma implícita, como $F(x, y) = y - f(x) = 0$.

Observar entonces que la gráfica de nuestra función de una variable es una curva de nivel de $F(x, y)$, concretamente la curva de nivel $F(x, y) = 0$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Funciones reales de varias variables
 - Primeras definiciones
 - Curvas de nivel
 - Gráfica de una función de varias variables
 - **Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables**
 - Interpretación geométrica
 - Derivadas parciales orden superior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

Al igual que para las funciones reales de variable real la derivada de la función representa la razón de cambio de f , nos podemos preguntar cómo varía la función al aumentar una de las variables cuando las demás permanecen constantes. A estas razones de cambio se las denomina *derivadas parciales de f* y las denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \dots$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

Ejemplos:

❶ $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

❷ $f(x, y) = x^2 + xy$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

Ejemplos:

❶ $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

❷ $f(x, y) = x^2 + xy$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

Ejemplos:

① $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

② $f(x, y) = x^2 + xy$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

Ejemplos:

① $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

② $f(x, y) = x^2 + xy$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

1 $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 - y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy - x + 1$$

2 $f(x, y) = x^3 + yx^2 + 2xy - y + x$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

① $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 - y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy - x + 1$$

② $f(x, y) = x^3 + yx^2 + 2xy - y + x$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

① $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 - y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy - x + 1$$

② $f(x, y) = x^3 + yx^2 + 2xy - y + x$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

Coste marginal: Retomemos el ejemplo de la fábrica de bocinas,
¿Qué representa ahora $\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}$?

Si calculamos las derivadas parciales de la función de coste

$$C(x, y) = 10000 + 20x + 40y:$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 20 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 40$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

Coste marginal: Retomemos el ejemplo de la fábrica de bocinas,
¿Qué representa ahora $\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}$?

Si calculamos las derivadas parciales de la función de coste

$$C(x, y) = 10000 + 20x + 40y:$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 20 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 40$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Funciones reales de varias variables
 - Primeras definiciones
 - Curvas de nivel
 - Gráfica de una función de varias variables
 - Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables
 - Interpretación geométrica
 - Derivadas parciales orden superior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Plano tangente

Recordemos que la derivada de una función en un punto se puede interpretar geoméricamente como la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. Generalizando esta interpretación podemos construir el plano tangente a una superficie en un punto (x_0, y_0) a través de las derivadas parciales de la función.

Plano tangente

De esta forma el *plano tangente* a una superficie $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) viene dado por

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo

Calcular el plano tangente a la superficie dada por la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1)$.

Consideramos $z = x^2 + y^2$. Ahora como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, tenemos que el plano pedido es

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)}(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)}(y - 1)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

Calcular el plano tangente a la superficie dada por la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1)$.

Consideramos $z = x^2 + y^2$. Ahora como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, tenemos que el plano pedido es

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)}(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)}(y - 1)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cálculo diferencial para funciones reales

NOTACIÓN: En ocasiones escribimos las derivadas parciales como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Funciones reales de varias variables
 - Primeras definiciones
 - Curvas de nivel
 - Gráfica de una función de varias variables
 - Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables
 - Interpretación geométrica
 - Derivadas parciales orden superior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Derivadas parciales orden superior

Una vez obtenidas las derivadas parciales de una función de varias variables, si estas son derivables, podemos seguir derivándolas obteniendo las derivadas parciales de segundo orden. Así podemos calcular

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Y las derivadas cruzadas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Funciones reales de varias variables
 - Primeras definiciones
 - Curvas de nivel
 - Gráfica de una función de varias variables
 - Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables
 - Interpretación geométrica
 - Derivadas parciales orden superior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Puntos extremos

En el estudio de una función real de variable real vimos que una de las aplicaciones más importantes de las derivadas era hallar valores máximo y mínimos. En esta sección vamos a ver como utilizar las derivadas parciales para calcular dicho valores en una función de dos variables.

Definición

Una función de dos variables tiene un *máximo local o relativo* en el punto (a, b) , si $f(x, y) \leq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b) .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Puntos extremos

Los *candidatos* a extremos son los llamados **puntos críticos**, que son aquellos puntos en los que se anulan las derivadas parciales $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$. Si (a, b) es un máximo (o un mínimo) y la función es diferenciable en dicho punto entonces, (a, b) es un punto crítico. Sin embargo, no todos los puntos críticos son máximos o mínimos.

Por lo tanto, para calcular los máximos y mínimos de una función de dos variables, hay que:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Criterio

Para determinar si un punto crítico es un valor extremos podemos usar el siguiente criterio basado en las segundas derivadas:

Si las segundas derivadas parciales de la función $f(x, y)$ son continuas en un entorno del punto (a, b) y $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ (es un punto crítico), entonces sea

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Funciones reales de varias variables
 - Primeras definiciones
 - Curvas de nivel
 - Gráfica de una función de varias variables
 - Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables
 - Interpretación geométrica
 - Derivadas parciales orden superior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Matriz Hessiana

Las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x, y)$ pueden escribirse en una matriz, que recibe el nombre de matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Observemos que D es el determinante de dicha matriz

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

EJEMPLOS:

1. *Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función*

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4 + 3$$

Las derivadas parciales de primer orden son:

$$f_x(x, y) = 4x - 4x^3 \quad f_y(x, y) = 4y - 4y^3$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

EJEMPLOS:

1. *Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función*

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4 + 3$$

Las derivadas parciales de primer orden son:

$$f_x(x, y) = 4x - 4x^3 \quad f_y(x, y) = 4y - 4y^3$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

Las soluciones son $x = 0, 1, -1$ e $y = 0, 1, -1$, obtenemos 9 puntos críticos: $(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)$.

Necesitamos el criterio de las derivadas de segundo orden para clasificarlos, para ello calculamos:

$$f_{xx}(x, y) = 4 - 12x^2 \quad f_{yy} = 4 - 12y^2 \quad f_{xy}(x, y) = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

Las soluciones son $x = 0, 1, -1$ e $y = 0, 1, -1$, obtenemos 9 puntos críticos: $(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)$.

Necesitamos el criterio de las derivadas de segundo orden para clasificarlos, para ello calculamos:

$$f_{xx}(x, y) = 4 - 12x^2 \quad f_{yy} = 4 - 12y^2 \quad f_{xy}(x, y) = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

★ Para el punto $(0, 0)$:

$$f_{xx}(0, 0) = 4 > 0 \quad f_{yy}(0, 0) = 4 \quad f_{xy}(0, 0) = 0 \quad D > 0$$

Por lo tanto hay un mínimo local en $(0, 0, f(0, 0) = 3)$.

★ Para el punto $(0, 1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

★ Para el punto $(0, 0)$:

$$f_{xx}(0, 0) = 4 > 0 \quad f_{yy}(0, 0) = 4 \quad f_{xy}(0, 0) = 0 \quad D > 0$$

Por lo tanto hay un mínimo local en $(0, 0, f(0, 0) = 3)$.

★ Para el punto $(0, 1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

★ Para el punto $(0, 0)$:

$$f_{xx}(0, 0) = 4 > 0 \quad f_{yy}(0, 0) = 4 \quad f_{xy}(0, 0) = 0 \quad D > 0$$

Por lo tanto hay un mínimo local en $(0, 0, f(0, 0) = 3)$.

★ Para el punto $(0, 1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

★ Para el punto $(1, 0)$:

$$f_{xx}(1, 0) = -8 < 0 \quad f_{yy}(1, 0) = 4 \quad f_{xy}(1, 0) = 0 \quad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(1, 0, f(1, 0) = 4)$.

★ Para el punto $(0, -1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

★ Para el punto $(1, 0)$:

$$f_{xx}(1, 0) = -8 < 0 \quad f_{yy}(1, 0) = 4 \quad f_{xy}(1, 0) = 0 \quad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(1, 0, f(1, 0) = 4)$.

★ Para el punto $(0, -1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

★ Para el punto $(1, 0)$:

$$f_{xx}(1, 0) = -8 < 0 \quad f_{yy}(1, 0) = 4 \quad f_{xy}(1, 0) = 0 \quad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(1, 0, f(1, 0) = 4)$.

★ Para el punto $(0, -1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

★ Para el punto $(1, 1)$:

$$f_{xx}(1, 1) = -8 < 0 \quad f_{yy}(1, 1) = -8 \quad f_{xy}(1, 1) = 0 \quad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(1, 1, 5)$.

★ Para el punto $(1, -1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

★ Para el punto $(1, 1)$:

$$f_{xx}(1, 1) = -8 < 0 \quad f_{yy}(1, 1) = -8 \quad f_{xy}(1, 1) = 0 \quad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(1, 1, 5)$.

★ Para el punto $(1, -1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

★ Para el punto $(1, 1)$:

$$f_{xx}(1, 1) = -8 < 0 \quad f_{yy}(1, 1) = -8 \quad f_{xy}(1, 1) = 0 \quad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(1, 1, 5)$.

★ Para el punto $(1, -1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

★ Para el punto $(-1, 0)$:

$$f_{xx}(-1, 0) = -8 < 0 \quad f_{yy}(-1, 0) = -8 \quad f_{xy}(-1, 0) = 0 \quad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(-1, 0, 4)$.

★ Para el punto $(-1, 1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

★ Para el punto $(-1, 0)$:

$$f_{xx}(-1, 0) = -8 < 0 \quad f_{yy}(-1, 0) = -8 \quad f_{xy}(-1, 0) = 0 \quad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(-1, 0, 4)$.

★ Para el punto $(-1, 1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

★ Para el punto $(-1, 0)$:

$$f_{xx}(-1, 0) = -8 < 0 \quad f_{yy}(-1, 0) = -8 \quad f_{xy}(-1, 0) = 0 \quad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(-1, 0, 4)$.

★ Para el punto $(-1, 1)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

★ Para el punto $(-1, -1)$:

$$f_{xx}(-1, -1) = -8 < 0 \quad f_{yy}(-1, -1) = -8 \quad f_{xy}(-1, -1) = 0 \quad D$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(-1, -1, 5)$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

★ Para el punto $(-1, -1)$:

$$f_{xx}(-1, -1) = -8 < 0 \quad f_{yy}(-1, -1) = -8 \quad f_{xy}(-1, -1) = 0 \quad D$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(-1, -1, 5)$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicación Económica

2. Una empresa fabrica chocolate según la función de producción

$$Q(x, y) = -x^3 - 3y^2 + 3x^2 + 24y$$

donde x es la cantidad de cacao e y la de leche empleadas en la fabricación

- 1 Calcúlese las productividades marginales en el punto $(1, 2)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo 2

a) Calcúlense las productividades marginales en el punto $(1, 2)$.
Las productividades marginales en un punto son las derivadas parciales de primer orden en ese punto

$$Q_x(x, y) = -3x^2 + 6x \quad Q_y(x, y) = -6y + 24$$

$$Q_x(1, 2) = 3 \quad Q_y(1, 2) = 12$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

b) Hállese la productividad máxima.

En primer lugar calculamos los puntos críticos igualando las primeras derivadas a cero:

$$Q_x(x, y) = -3x^2 + 6x = 0 \quad Q_y(x, y) = -6y + 24 = 0$$

Y obtenemos los puntos $(0, 4)$ y $(2, 4)$, sin embargo el primer punto no tiene sentido económico pues implica no utilizar espacio en la

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70**

Ejemplo

b) Hállese la productividad máxima.

En primer lugar calculamos los puntos críticos igualando las primeras derivadas a cero:

$$Q_x(x, y) = -3x^2 + 6x = 0 \quad Q_y(x, y) = -6y + 24 = 0$$

Y obtenemos los puntos (0, 4) y (2, 4), sin embargo el primer punto no tiene sentido económico pues implica no utilizar cacao en la

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo 2

Clasificación del punto extremo:

$$Q_{xx}(x, y) = -6x + 6 \quad Q_{yy}(x, y) = -6 \quad Q_{xy}(x, y) = 0$$

Y la matriz Hessiana queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} -6x + 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

con determinante $D = 36x - 36$.

En el punto $(2, 4)$

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70**

Ejemplo 2

Clasificación del punto extremo:

$$Q_{xx}(x, y) = -6x + 6 \quad Q_{yy}(x, y) = -6 \quad Q_{xy}(x, y) = 0$$

Y la matriz Hessiana queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} -6x + 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

con determinante $D = 36x - 36$.

En el punto (2, 4)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo 2

Clasificación del punto extremo:

$$Q_{xx}(x, y) = -6x + 6 \quad Q_{yy}(x, y) = -6 \quad Q_{xy}(x, y) = 0$$

Y la matriz Hessiana queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} -6x + 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

con determinante $D = 36x - 36$.

En el punto $(2, 4)$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Por lo que $(2, 4)$ es un máximo relativo de la función. Y la

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el artículo 1799 de la Ley de Seguridad de la Información y de Comercio. Si la producción máxima es en $(2, 4)$.