

Capítulo 3.3: Generación de Variables Aleatorias: Métodos particulares

La distribución normal

Simulación

2020-11-12

Contents

1 Métodos particulares	2
1.1 Distribución Normal	2
1.1.1 Aplicación del teorema Central del Límite	2
1.1.2 Método de aceptación y rechazo	2
1.1.3 Método de Box-Muller	5
1.1.4 Método de cociente de uniformes	7
2 Normales multidimensionales	11



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1 Métodos particulares

1.1 Distribución Normal

Debido a la importancia de la Normal y a que no hay una forma “mejor” de generar valores de la Normal hay una gran variedad de algoritmos para generarla. Por otra parte, dado que si $Z \sim N(0, 1)$, entonces $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma)$ es suficiente considerar la generación de valores de una normal estándar.

A continuación veremos algunos de estos algoritmos.

1.1.1 Aplicación del teorema Central del Límite

Sea U_1, U_2, \dots, U_{12} VA i.i.id según una $U(0, 1)$, se verifica que

$$Z = \left[\sum_{i=1}^{12} U_i - 6 \right] \sim N(0, 1)$$

Este generador funciona razonablemente bien pero no es difícil encontrar otros más eficientes.

1.1.2 Método de aceptación y rechazo

En este caso buscamos una VA Y con el mismo soporte de la $N(0, 1)$, es decir \mathbb{R} .

Sea Z VA con distribución $N(0, 1)$ y comprobemos que se puede descomponer de la forma siguiente,

$$\Pr(Z \leq a) = \frac{1}{2} \Pr(|Z| \leq a) + \frac{1}{2} \Pr(-|Z| \leq a)$$

si esto se verifica podremos generar Z utilizando un método de composición.

Para $a > 0$

$$\Pr(Z \leq a) = \frac{1}{2} \Pr(|Z| \leq a) + \frac{1}{2} \Pr(-|Z| \leq a)$$

donde,

- $\Pr(-|Z| \leq a) = \Pr(|Z| \geq a) = 1$
- $\Pr(|Z| \leq a) = \Pr(X \leq 0) + \Pr(0 \leq Z \leq a) = \frac{1}{2} + \Pr(0 \leq Z \leq a) = \Pr(Z \leq a)$

Para $a < 0$

$$\Pr(Z \leq a) = \frac{1}{2} \Pr(|Z| \leq a) + \frac{1}{2} \Pr(-|Z| \leq a)$$

- $\Pr(|Z| \leq a) = 0$

$$\begin{aligned} \Pr(Z \leq a) &= \frac{1}{2} \Pr(|Z| \leq a) + \frac{1}{2} \Pr(-|Z| \leq a) \\ &= \frac{1}{2} \Pr(-|Z| \leq a) \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



el algoritmo es

Algoritmo

- Paso 1: Generar $U \sim U(0, 1)$
- Paso 2: Si $U < 0.5$, generar $Y \sim F_{|Z|}$
- Paso 3: Si $U \geq 0.5$, generar $Y \sim F_{-|Z|}$
- Paso 4: Devolver $X = Y$

Sólo queda encontrar un método para generar $|Z|$.

Función de distribución de $|Z|$

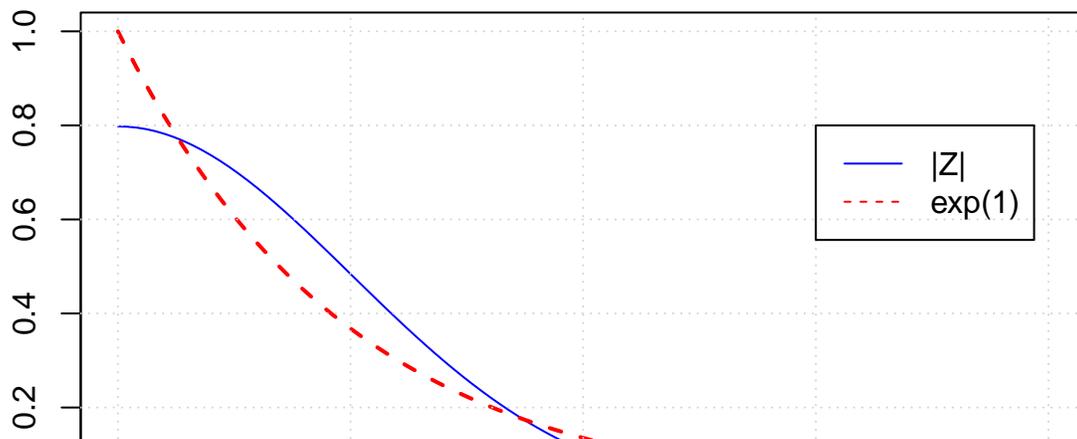
$$\Pr(|Z| \leq a) = \Pr(-a \leq Z \leq a) = 2\Pr(0 \leq Z \leq a) = 2 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

La función de densidad de $|Z|$ es $f_{|Z|}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$, $Z \in [0, \infty)$.

Generamos $f_{|Z|}(z)$ por el método de aceptación y rechazo y tomamos como g una $\exp(\lambda = 1)$

```
# gráfico
fd <- function(x){
  x <- sqrt(2/pi) * exp(- x^2/2)
}

curve(fd, from = 0, to = 4, col = "blue", lty = 1, ylim = c(0, 1), ylab = "")
curve(dexp, from = 0, to = 4, col = "red", lty = 2, lwd = 2, add = TRUE)
grid()
legend(3, 0.8, c("|Z|", "exp(1)"), lty = 1:2, col = c("blue", "red"))
```



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

calculamos $c > 0$.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1 - 1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}, \quad [x, \infty)$$

el $\max h(x) = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$ cuando $x^* = 1$. Luego $c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} = 1.3154892$. El numero medio de iteraciones para obtener un valor de $|Z|$ es $c = 1.3154892$

El algoritmo queda

Algoritmo

- Paso 1: Generar $U_1 \sim U(0,1)$
- Paso 2: Mientras $U_1 \geq f(y)/cg(y)$
- Paso 3: Generar $U_1 \sim U(0,1)$
- Paso 4: Generar $Y \sim \exp(1)$
- Paso 5: FinMientras
- Paso 6: Devolver $X = Y$

En R,

```
#
generar_nor <- function(){
  c <- sqrt(2*exp(1)/pi)
  U1 <- runif(1)
  test <- TRUE
  while(test){
    U1 <- runif(1)
    Y <- rexp(1,1)
    test <- U1 > (fd(Y)/(c*dexp(Y)))
  }
  U2 <- runif(1)
  if (U2 < 0.5){
    X <- Y
  } else {
    X <- -Y
  }
  X
}
```

```
(generar_nor() )
```

```
## [1] 0.4464497
```

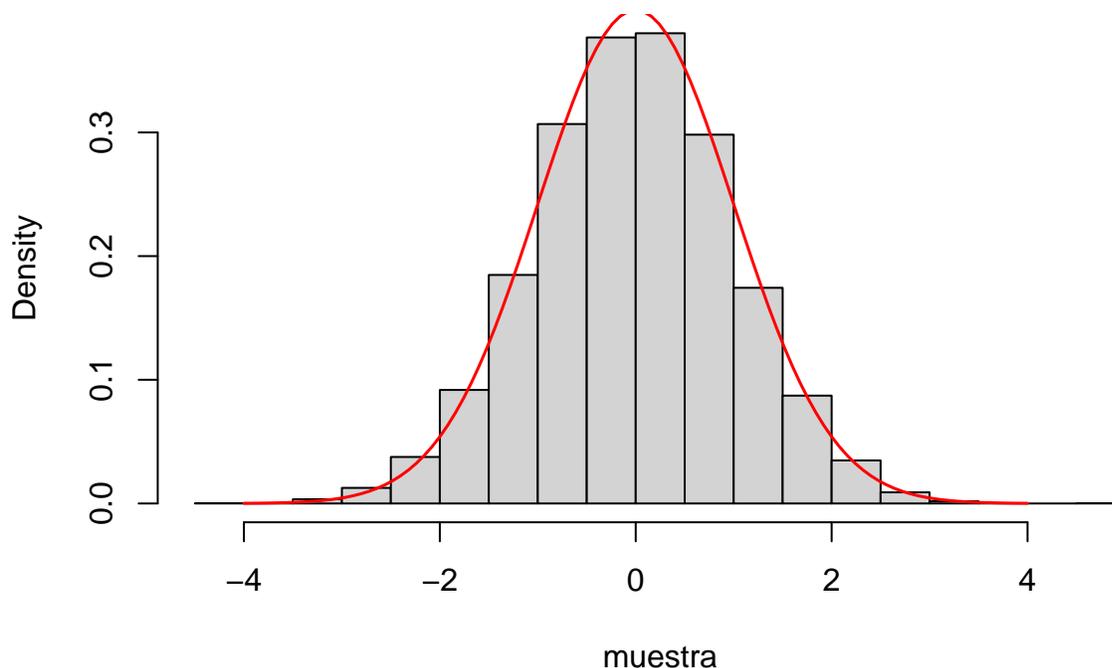
```
# Muestra
## [1] 1.0000000
```

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, curved shape behind it, suggesting a stylized 'C' or a wave.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Histogram of muestra



```
# Contraste de hipótesis  
ks.test(muestra, "pnorm")
```

```
##  
## One-sample Kolmogorov-Smirnov test  
##  
## data: muestra  
## D = 0.012689, p-value = 0.07989  
## alternative hypothesis: two-sided
```

1.1.3 Método de Box-Muller

Supongamos que tenemos dos VA normales estándar X e Y independientes, $X, Y \in \mathbb{R}$. Generamos dos valores de X e Y . El par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ determinan un punto P en el plano en coordenadas cartesianas.

Escribimos el punto P en coordenadas polares, $P = (R, \theta)$ donde $R = distancia(O, P)$ y θ es el ángulo que forma el eje de X con el vector P . La relación es,

$$\int X = R \cdot \cos(\theta)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Función de densidad conjunta de (X, Y)

Las VA X e Y son independientes, por tanto

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

por otra parte,

$$X^2 + Y^2 = (R^2 \cdot \cos^2(\theta)) + (R^2 \cdot \sin^2(\theta)) = R^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = R^2$$

realizamos el cambio de variable,

$$f_{R^2, \theta}(d, \alpha) = f_{X,Y}(d, \alpha) |J|$$

el jacobiano es,

$$J(x, y; d, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial d} = \frac{1}{2\sqrt{d}} \cdot \cos(\alpha) & \frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\sqrt{d} \cdot \sin(\alpha) \\ \frac{\partial y}{\partial d} = \frac{1}{2\sqrt{d}} \cdot \sin(\alpha) & \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \sqrt{d} \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

entonces,

$$|J| = \left| \left(\frac{1}{2\sqrt{d}} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sqrt{d} \cdot \cos(\alpha) \right) - \left(-\sqrt{d} \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{1}{2\sqrt{d}} \cdot \sin(\alpha) \right) \right| = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha) + \frac{1}{2} \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}$$

luego,

$$f_{R^2, \theta}(d, \alpha) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{d}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{d}{2}}, \quad d \geq 0, \alpha \in [0, 2\pi]$$

esta función de densidad la podemos escribir como,

$$f_{R^2, \theta}(d, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{I}_{[0, 2\pi]}(\alpha) \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{d}{2}}$$

esto es,

$$\left. \begin{array}{l} f_{\theta}(\alpha) \sim \mathcal{U}(0, 1) \\ f_{R^2}(d) \sim \text{Exp}(0, 1) \end{array} \right\}$$

las dos de fácil generación.

El algoritmo de Box-Muller

```
normalBi <- function(){
  R_2 <- -log(1 - runif(1))*2      # Generar exp(1/2)
  Theta <- runif(1)*2*pi          # Generar U(0,1)
  X <- sqrt(R_2)*cos(Theta)
  Y <- sqrt(R_2)*sin(Theta)
  return(c(X,Y))
}

# La función genera dos valores independientes de una N(0,1)
normalBi()

## [1] -2.7186342  0.3715484

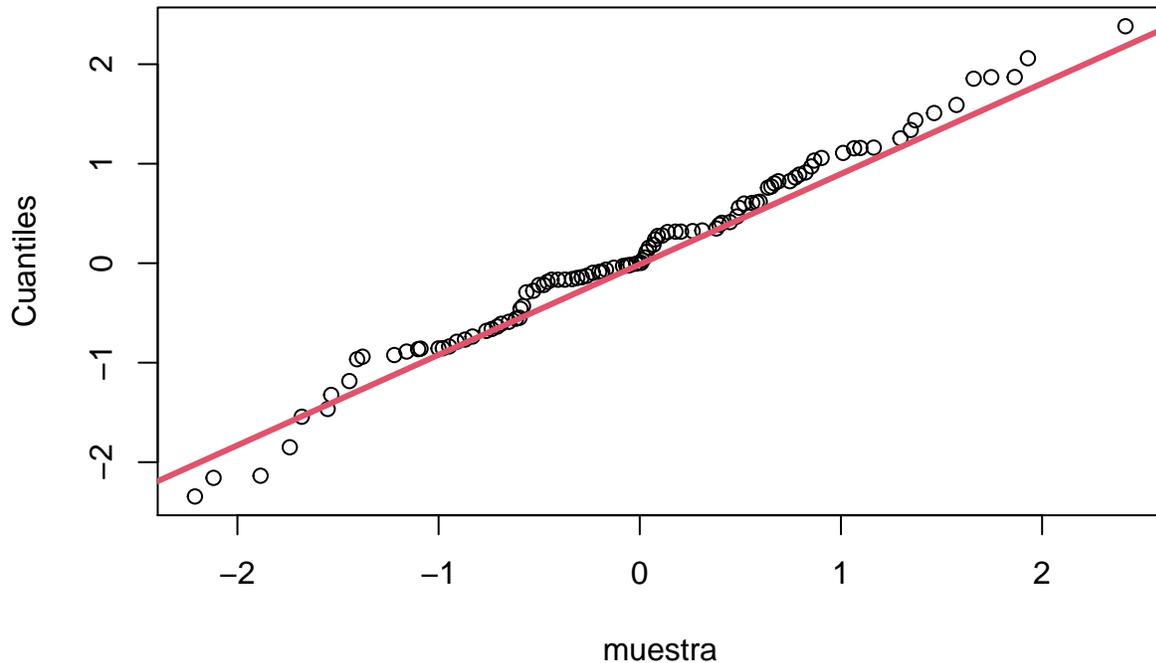
# Simulación
```



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

QQ-plot



```
# Contraste estadístico  
ks.test(muestra, pnorm)
```

```
##  
## One-sample Kolmogorov-Smirnov test  
##  
## data: muestra  
## D = 0.057033, p-value = 0.5335  
## alternative hypothesis: two-sided
```

1.1.4 Método de cociente de uniformes

Sea X una VA continua con función de densidad f y consideramos el conjunto,

$$C_f = \{(u, v) : 0 < u < \sqrt{f(v/u)}\}$$

Se cumple:

1. C_f tiene función...

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\left. \begin{matrix} X = \frac{V}{U} \\ Y = U \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} V = XY \\ U = Y \end{matrix} \right\} \Rightarrow J(u, v; x, y) = \frac{\partial(U, V)}{\partial(X, Y)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix} = -y$$

luego el área de $C_f = \{(u, v) : 0 < u < \sqrt{f(v/u)}\} = C_x(f) = \{x \text{ tal que } \exists y : 0 \leq y \leq \sqrt{f(x)}\}$ es

$$\int \int_{C_f} dudv = \int_{C_f} \int_0^{f(x)} y dy dx = \int_{C_f} \frac{f(x)}{2} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx < +\infty$$

2.- Si (U, V) sigue una distribución uniforme en la región C_f , entonces la variable aleatoria $X = V/U$ se distribuye según f .

La función de densidad conjunta es

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{|C_f|} \cdot y; \quad 0 < y < \sqrt{f(x)}$$

y la función de densidad marginal de X es,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^{\sqrt{f(x)}} \frac{1}{|C_f|} \cdot y dy = \frac{1}{|C_f|} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{|C_f|} \cdot \frac{f(x)}{2}$$

tenemos,

- $f_X(x) = \frac{1}{|C_f|} \cdot \frac{f(x)}{2}$
- $f(x)$

dos funciones de densidad, por lo tanto $|C_f| \cdot 2 = 1 \Rightarrow |C_f| = \frac{1}{2} \quad \forall f$, función de densidad.

La idea del algoritmo es,

1. C_f depende de f . Queremos identificar C_f y encerrarlo en un rectángulo, a ser posible simétrico.
2. Generar puntos (u, v) dentro del rectángulo uniformemente y comprobar si pertenecen a C_f , si $(u, v) \in C_f \Rightarrow X = V/U$.

La dificultad estriba en determinar C_f , una vez hecho esto el resto es un caso particular del algoritmo de aceptación y rechazo.

La forma de C_f cuando $f \sim N(0, 1)$

Si $X \sim N(0, 1)$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

y

$$C_f = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \sqrt{f(v/u)}\}$$

donde,

$$\sqrt{f(v/u)} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v/u)^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v/u)^2}{4}}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Límites del rectángulo

$$0 < u < \frac{1}{k} e^{-\frac{(v/u)^2}{4}} \Rightarrow k \cdot u < e^{-\frac{(v/u)^2}{4}} \quad \text{tomando logaritmos}$$

$$\log(k \cdot u) < -\frac{(v/u)^2}{4} \quad \text{pero } u > 0$$

$$4u^2 \log(k \cdot u) < -v^2$$

luego la propiedad de pertenencia se puede escribir,

$$(u, v) \in C_f \text{ si } 4u^2 \log(k \cdot u) < -v^2; \quad u > 0$$

$$\text{Si } u > \frac{1}{k} \Rightarrow k \cdot u > 1 \Rightarrow \log(k \cdot u) > 0 \Rightarrow (u, v) \notin C_f$$

por tanto, si $(u, v) \in C_f$ debe cumplirse que $0 < u < \frac{1}{k}$

Por otra parte,

$$V^2 < \underbrace{-4u^2 \log(k \cdot u)}_{\text{acotado}}; \quad V^2 > 0$$

y sabemos que $0 < u < \frac{1}{k}$.

$$\text{Si } u = \frac{1}{k} \Rightarrow \log(k \cdot u) = \log(k \cdot \frac{1}{k}) = \log(1) = 0$$

Si $u \rightarrow 0 \rightarrow -4u^2 \log(k \cdot u) \rightarrow 0$ cuando $u \rightarrow 0$, ya que $u^2 \rightarrow 0$ más rápido que $\log(k \cdot u) \rightarrow -\infty$, cuando $u \rightarrow 0$.

Llamando $g(u) = -4u^2 \log(k \cdot u)$ y comprobamos si g tiene algún máximo en $(0, \frac{1}{k})$.

$$g'(u) = -4[2u \log(k \cdot u) + u^2 \cdot \frac{1}{k \cdot u} \cdot k] = -4u[2 \log(k \cdot u) + 1]$$

Tenemos que

$$g(u) = 0 \Leftrightarrow 2 \log(k \cdot u) + 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{k} e^{-1/2}$$

luego,

$$\max_{0 < u < 1/k} g(u) = g\left(\frac{1}{k} e^{-1/2}\right) = -4 \frac{1}{k^2} e^{-1} \log(e^{-1/2}) = \frac{2}{e \cdot k}$$

concluimos que, $V^2 < \frac{2}{e \cdot k}$, es decir,

$$-\sqrt{\frac{2}{e \cdot k}} < V < \sqrt{\frac{2}{e \cdot k}}$$

llamando $b = \sqrt{\frac{2}{e \cdot k}}$, tenemos $-b < V < b$.

El algoritmo queda,

Algoritmo

- 1.- Generar $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$
- 2.- Hacer $Z = (2e^{-1/2}) \cdot \frac{U_2 - 0.5}{U_1}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

```

U2 <- 1- runif(1)

Z <- constantek * (U1 - 0.5)/U2

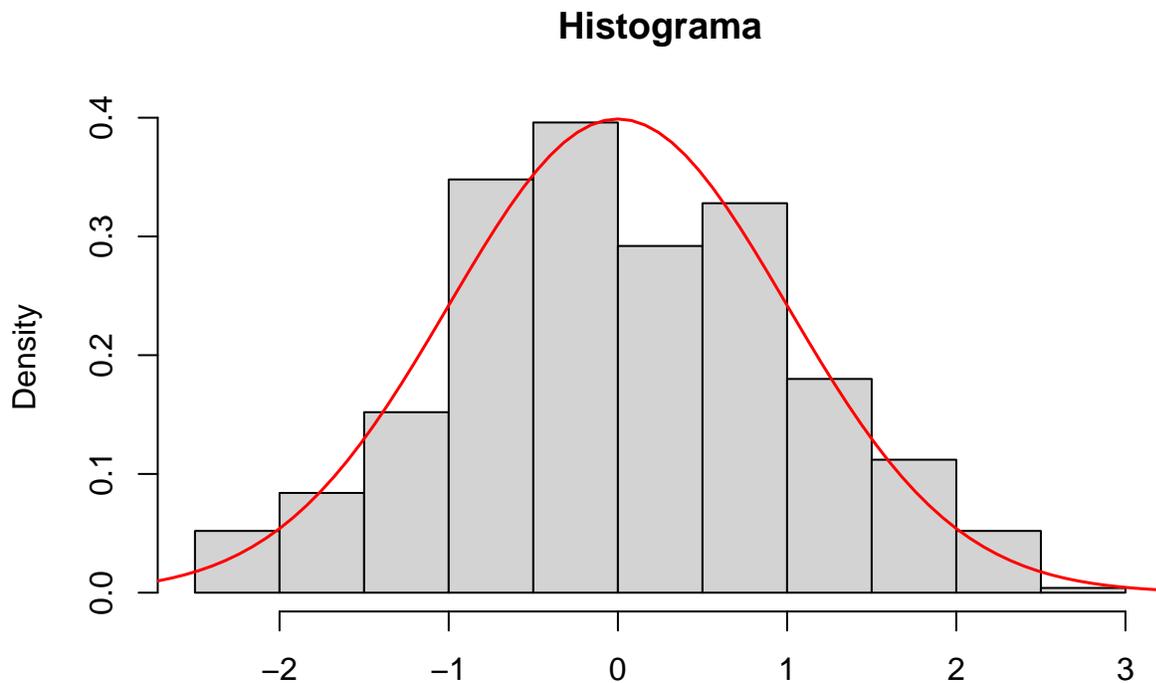
ZZ <- Z^2 / 4
if(ZZ <= - log(U2)){
  break
}
}
return( mu + Z * sigma)
}

# Muestra
Nsim <- 500

muestra <- replicate(Nsim, generar_normal_uni(0,1))

# Gráficos
hist(muestra, freq = FALSE, main = "Histograma")
curve(dnorm, from = -4, to = 4, col = "red", lwd = 1.5, add = TRUE)

```



Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

```
##  
## data: muestra  
## D = 0.03216, p-value = 0.6792  
## alternative hypothesis: two-sided
```

2 Normales multidimensionales

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white swoosh underneath.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70