Tensores cartesianos y propiedades de materiales anisótropos

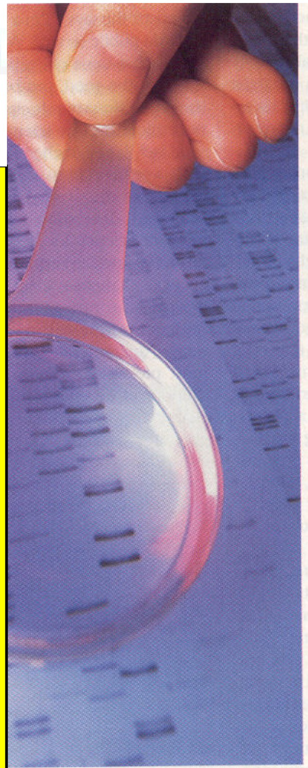
Propiedades de materiales anisótropos

os usos tradicionales y avanzados de los materiales
san en que *una o varias de sus propiedades físicas*
iferentes en diferentes direcciones (no tienen
ría rotacional)

cir, son anisótropos

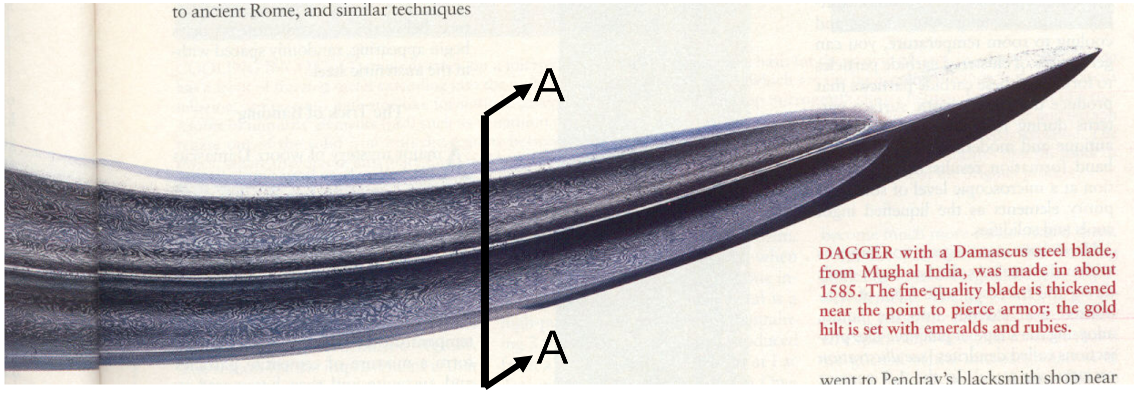
pueden ser homogéneos o heterogéneos según que
n o no simetría translacional.

Ejemplos de materiales anisótropos



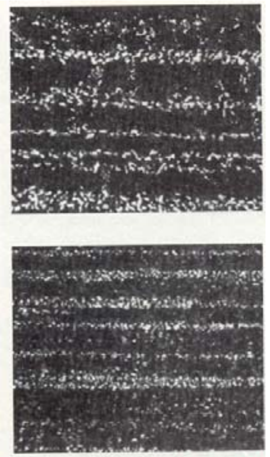
NT in your genes can alert you to poten-
for you to take preventive measures.
d, as surveys are showing. Legislation
mployees has not gone anywhere.

n diferencial
ectroforesis



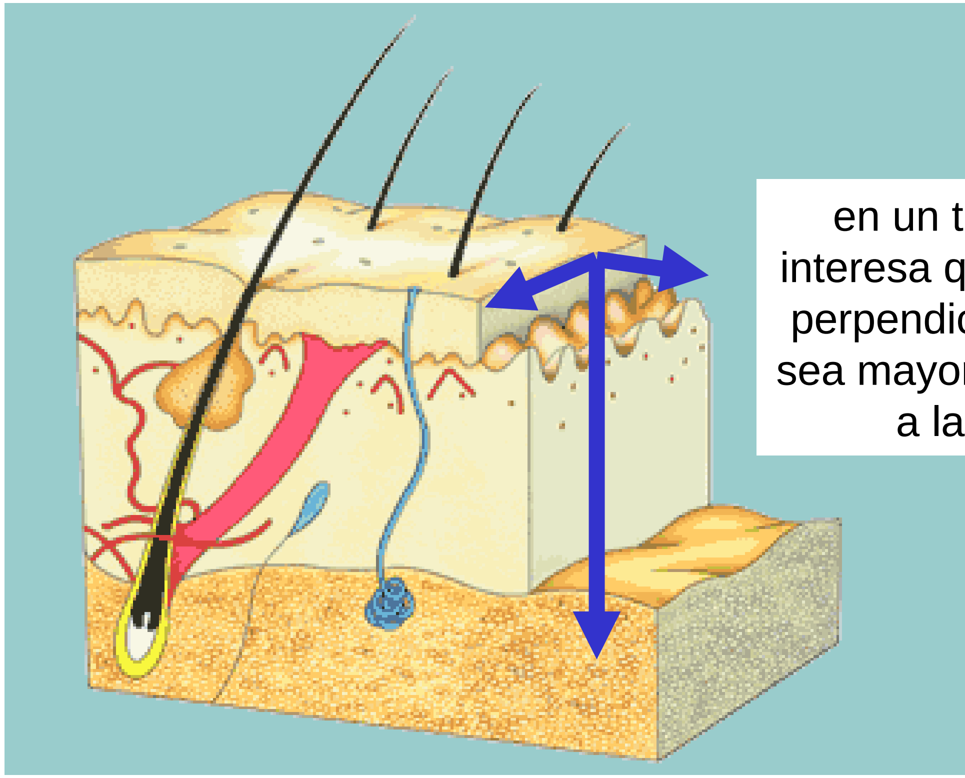
Materiales laminados

sección A-A



r the growth of particles of hard iron carbide
re the light-colored bands in the Damascus
graph shows light and dark bands in a sec-
nal Damascus sword. The lower micrograph
igh the author's modern reconstruction. The
he two structures indicates that the modern
rate replication of the original process.

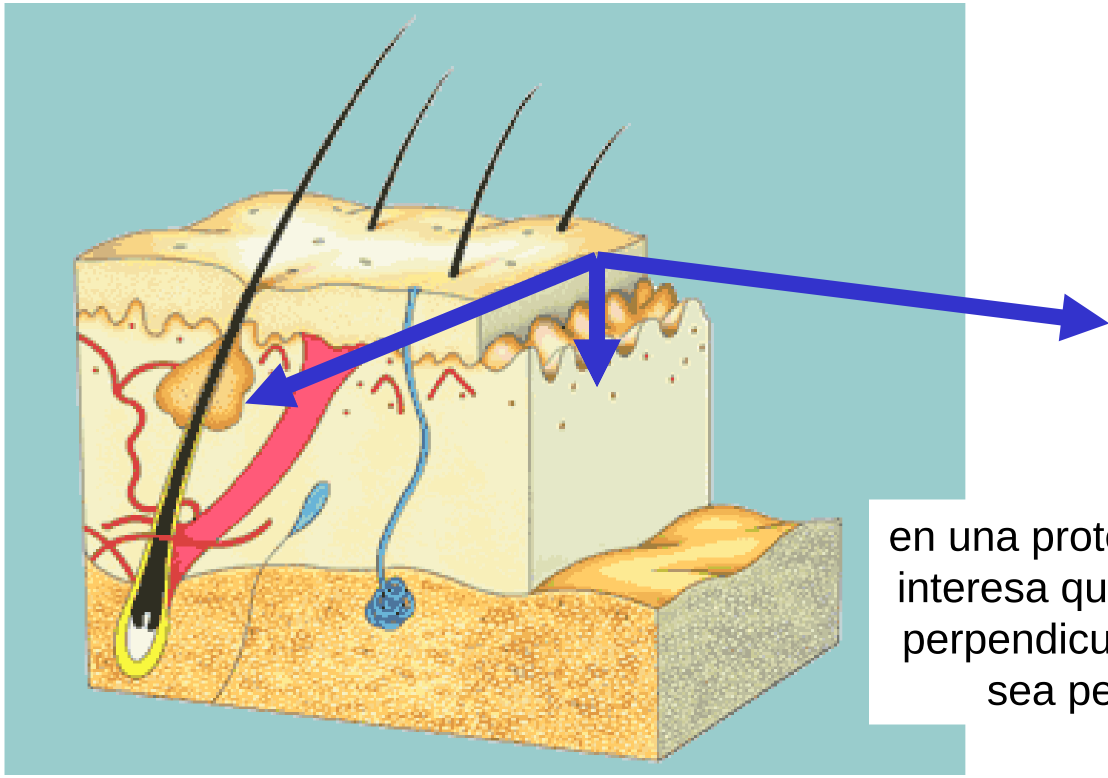
Propiedades de materiales anisótropos



en un tratamiento interesa que la difusión perpendicular a la piel sea mayor que paralela a la misma

Difusión de medicamentos a través de la piel

Propiedades de materiales anisótropos



en una protección solar interesa que la difusión perpendicular a la piel sea pequeña

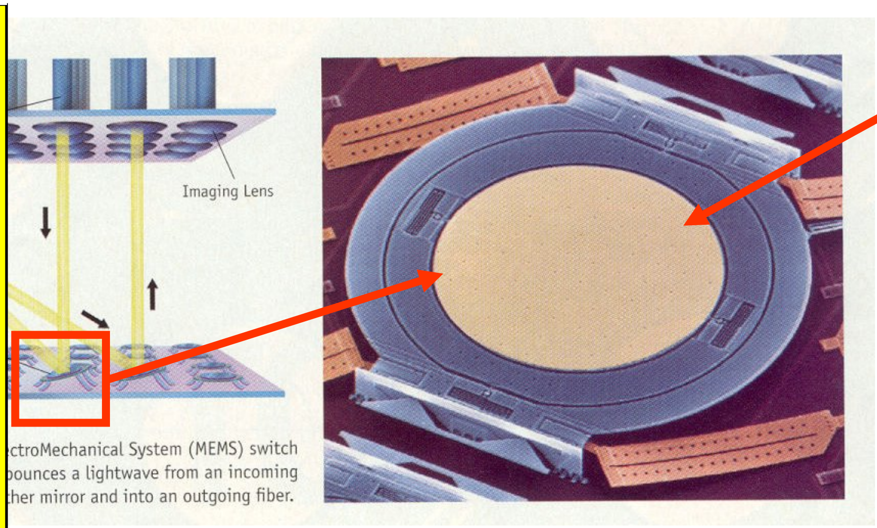
Difusión de medicamentos a través de la piel

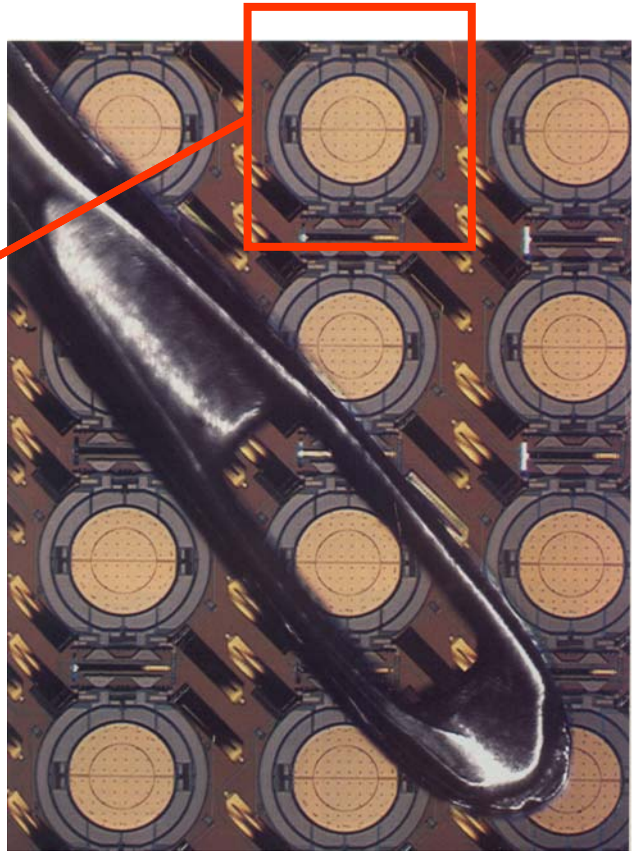
Propiedades de materiales anisótropos

Ala de airbus
npuesto (“composite”)
epoxi-carbono

Propiedades de materiales anisótropos

tiplexador para fibra óptica

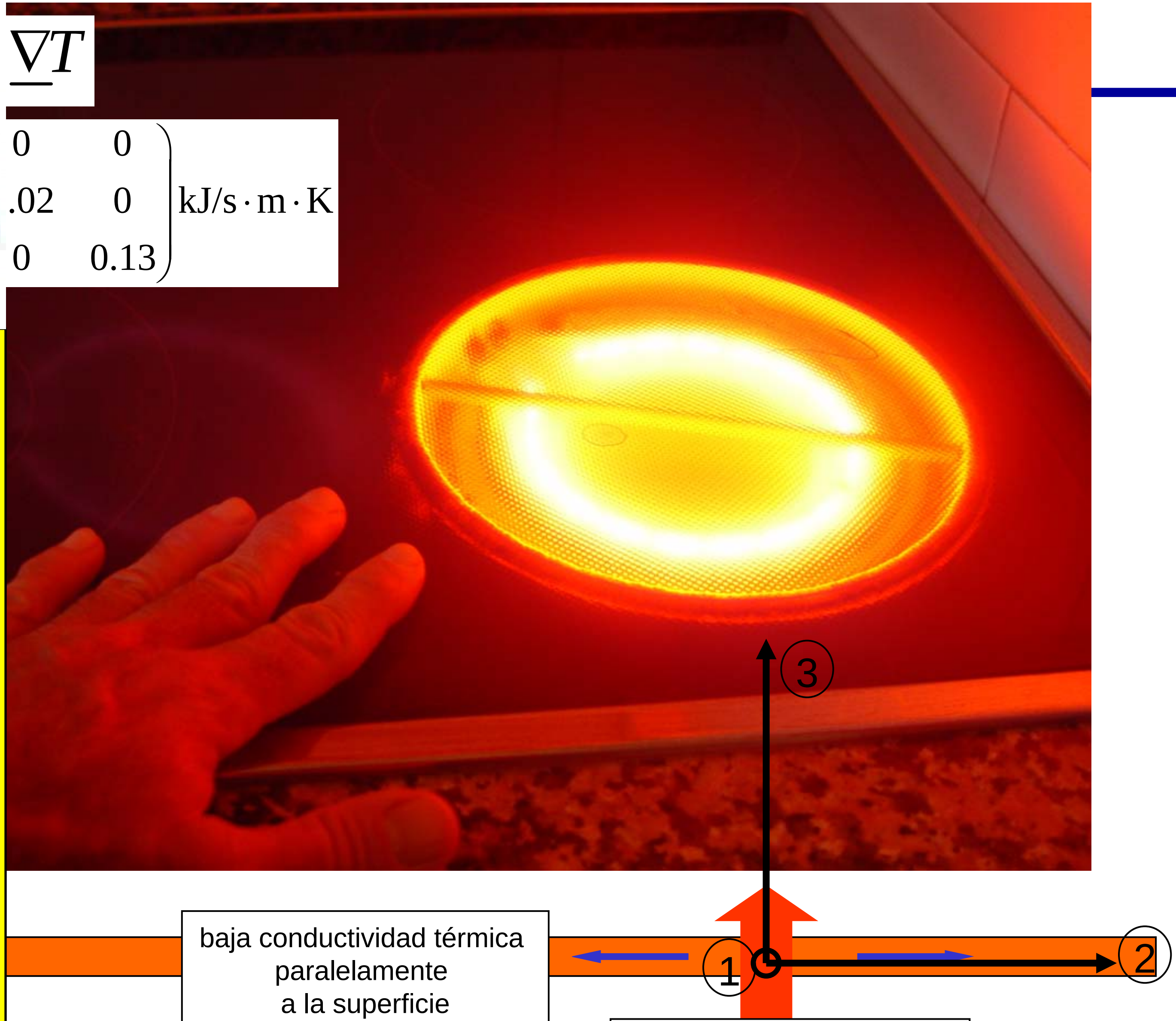




miento de los microespejos
controlarse por medio
ezoelectricidad o
oelectricidad

∇T

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ .02 & 0 \\ 0 & 0.13 \end{matrix} \Bigg) \ \mathrm{kJ/s \cdot m \cdot K}$$



baja conductividad térmica
paralelamente
a la superficie

alta conductividad térmica
perpendicularmente
a la superficie

Propiedades de materiales anisótropos

as propiedades de materiales con apl. anisótropas:

- difusividad másica
- conductividad eléctrica
- conductividad térmica
- permeabilidad magnética
- expansión térmica
- actividad óptica
- efectos piezoeléctrico directo e inverso
- efecto Hall
- efectos Pockels y Kerr
- efecto termoeléctrico
- complianza y rigidez elásticas
- efecto piroeléctrico

Tensores cartesianos

poder hacer cálculos con materiales anisótropos es
so adquirir un bagaje mínimo de cálculo tensorial*

guimos dos tipos de tensores:

materia

representan propiedades físicas de un material

o coeficientes fenomenológicos en ecuaciones constitutivas

suelen ser los mismos en todos los puntos del espacio

campo

representan soluciones de ecuaciones de campo

suelen ser distintos en cada punto del espacio

ra sólo se requieren conocimientos básicos de tensores cartesianos, es decir, los asociados a de coordenadas no sólo lineales sino además ortogonales. En este caso la distinción entre tipos avariantes y mixtos desaparece, y el cálculo se reduce a la manipulación de diadas, triadas, etc. y no es al tensor métrico. Por tanto estas notas son válidas **exclusivamente para tensores cartesianos**.

res de materia:

- difusividad másica
- conductividad eléctrica
- conductividad térmica
- permeabilidad magnética
- expansión térmica
- actividad óptica
- efectos piezoeléctrico directo e inverso
- efecto Hall
- efecto Kerr
- efecto termoeléctrico
- complianza
- rigidez

Tensores cartesianos

es de campo de orden 1:

desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza

n superior a 1 sólo estudiaremos:

tensor de esfuerzos

tensor gradiente de velocidad

tensor gradiente de desplazamiento

o de operar con los de campo y de materia es el mismo

Tensores cartesianos

n

den de un tensor es el número de subíndices que tiene

odo informal, es una “tabla” de 1, 2, 3, ... dimensiones (tantas o el orden) que contiene, en general, d^{orden} elementos, donde d es mensión del espacio (en esta asignatura, 3)*

otaremos el orden subrayando la variable (propiedad, campo) as veces como su orden tensorial

coeficiente de difusión
o
difusividad

es un tensor de materia
de segundo orden

$$\underline{\underline{\underline{d}}}$$

módulo
piezoeléctrico

es un tensor de materia
de tercer orden

osa se vé más adelante

Tensores cartesianos

os de tensores de materia

er orden

oef. piroeléctrico
C/m².K)

2º orden

$\underline{\underline{D}}$	difusividad (m^2/s)
$\underline{\underline{\rho}}$	resistividad eléctrica (Ω.m)
$\underline{\underline{\sigma}}$	conductividad eléctrica (S/m)
$\underline{\underline{k}}$	conductividad térmica (W/m.K)
$\underline{\underline{\alpha}}$	coef. de expansión térmica (K^{-1})
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	constante dieléctrica relativa (-)

Tensores cartesianos

os de tensores de materia

3er orden

o piezoeléctrico directo e
o (C/N)

electroóptico lineal (efecto
ls) (m/V)

de efecto Hall
T)

4º orden

$\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}$ complianza elástica (Pa^{-1})

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ rigidez elástica (Pa)

$\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}$ coeficiente electroóptico cuadrático (efecto Kerr) (m^2/V)

$\underline{\underline{\underline{\underline{\rho}}}}$ coeficiente magnetoresistivo (cuadrático) ($\Omega.m/T^2$)

$\underline{\underline{\underline{\underline{\Pi}}}}$ coeficiente fotoelástico (-)

Tensores cartesianos

...os de tensores de campo

... orden		2º orden	
...idad de un fluido (m/s)			
...lazamiento (m)		$\underline{\underline{\tau}}$	tensor de esfuerzos (Pa)
...po eléctrico (V/m)		$\underline{\underline{\varepsilon}}$	tensor deformación (-)
...násico de A (kg/m² s, o ...m² s o átomos/m² s)		$\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$	tensor velocidad de deformación (1/s)
...ización (C/m²)			
...idad de corriente ...rica (A/m²)			

Tensores cartesianos

…eraciones con tensores de campo generalizan las …es ya conocidas entre escalares (tensores de orden …ctores (orden 1). P.ej.:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\alpha}}\Delta T$$

…ión = coeficiente de expansión térmica x incremento de temperatura

… un material es isótropo, el coef. de expansión térmica es el mismo en … direcciones $\varepsilon = \alpha\Delta T$

…erial no isótropo se deforma de modo diferente en diferentes …es $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\alpha}}\Delta T$

Tensores cartesianos

s de las relaciones que conocemos en su versión (para materiales isótropos) son en general ales

$$\underline{J}_A = -\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\nabla} C_A$$

flujo másico = difusividad x gradiente de concentración

$$\underline{P} = \underset{\equiv}{d} : \underline{\underline{\tau}}$$

polarización eléctrica = módulo piezoeléctrico x esfuerzo

Tensores cartesianos

p.ej. el hecho de que en la ley de Ohm, cada componente del

éctrico puede depender de todas las componentes de la

de corriente:

$$E_1 = \rho_{11} J_1 + \rho_{12} J_2 + \rho_{13} J_3$$
$$E_2 = \rho_{21} J_1 + \rho_{22} J_2 + \rho_{23} J_3$$
$$E_3 = \rho_{31} J_1 + \rho_{32} J_2 + \rho_{33} J_3$$

ej. que en el efecto piezoeléctrico inverso, cada componente

ormación puede depender de todas las componentes del

licado:

$$\varepsilon_{11} = E_1 d_{111} + E_2 d_{211} + E_3 d_{311}$$
$$\varepsilon_{12} = E_1 d_{112} + E_2 d_{212} + E_3 d_{312}$$
$$\varepsilon_{13} = E_1 d_{113} + E_2 d_{213} + E_3 d_{313}$$
$$\text{etc} \ldots$$

Tensores cartesianos

iones coordenadas se especifican como 1, 2 y 3 (no como x,y,z)

varios tipos de productos entre tensores; estos productos (que se continuación) se denotan por medio de símbolos como

$$\cdot \quad : \quad \vdots \quad \times$$

nes usaremos con estos productos tipos especiales de paréntesis para ente la naturaleza (orden tensorial) del resultado de un producto:

calar $\quad [\ \ ] = \text{vector (tensor 1}^{\text{er}}\text{ orden)} \quad \{\ \ \} = \text{tensor 2}^{\text{o}}\text{ orden}$

lel resultado de un producto se obtiene del siguiente modo:

signo de multiplicación	orden del resultado
ninguno	suma de órdenes de los factores
$\times$	suma de órdenes de los factores - 1
$\cdot$	suma de órdenes de los factores - 2
$:$	suma de órdenes de los factores - 4
$\vdots$	suma de órdenes de los factores - 6

Tensores cartesianos

lo:

$\underline{u}\,\underline{v}$ es de orden 1+1=2

$\left[\underline{u}\times\underline{v}\right]$ es de orden 1+1-1=1

$\left\{\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\underline{\tau}}\right\}$ es de orden 2+2-2=2

$\left(\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\tau}}\right)$ es de orden 2+2-4=0

$\left\{\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}\right\}$ es de orden 4+2-4=2

Tensores cartesianos

ores unitarios (cartesianos) se denotan como:

$$\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2, \underline{\delta}_3$$

de Kronecker o símbolo de Zehfuss como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

o de permutación, o símbolo de Levi-Civita, o símbolo de

n*, como:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad ijk = 123, 231 \text{ o } 312 \\ -1 & \text{si} \quad ijk = 321, 213 \text{ o } 132 \\ 0 & \text{si hay dos índices iguales} \end{cases}$$

e, el símbolo de permutación es un pseudotensor (de tercer orden), del mismo modo que el resultado de un producto un pseudotensor de 1er orden, pseudovector o vector axial; en contraposición con un vector polar, vector propiamente or de 1er orden; en esta asignatura no tendremos en cuenta la distinción entre tensores (paridad impar, que son bajo rotación) o pseudotensores (paridad par, que son invariantes bajo rotación y reflexión)

Tensores cartesianos

verifica: $\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{hjk} = 2\delta_{ih}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

n determinante 3×3 puede escribirse como:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

Tensores cartesianos

eraciones con vectores unitarios:

$$\left(\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j\right) = \delta_{ij} \qquad \text{(producto escalar)}$$

$$\left[\underline{\delta}_i \times \underline{\delta}_j\right] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\underline{\delta}_k \qquad \text{(producto vectorial)}$$

presión de un vector (tensor de 1er orden) en vectores unitarios:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{3} \underline{\delta}_i v_i$$

n puede interpretarse como "*el tensor* $\underline{v}$*, en el lugar*

por el índice i*, contiene el valor (componente)* v_i "

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \\ v_i \\ \\ \end{pmatrix} \longleftarrow \text{fila } i$$

gnitud de un vector (módulo): $\left|\underline{v}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2}$

Tensores cartesianos

›nvenio de sumación sobre índices repetidos (Einstein): *en un ›oducto en el que aparece uno o varios índices repetidos (y no hay ›nos de sumatorio explícitos sobre esos índices), se entenderá que ›iste sumación sobre esos índices.* Esta convención es exactamente ›uivalente a mantener los sumatorios, pero elimina los signos de sumación y ›duce notablemente la complejidad de las expresiones. P. ej. un vector puede ›cribirse como:

$$= \underline{\delta}_i v_i = \sum_{i=1}^{3} \underline{\delta}_i v_i \qquad |\underline{v}| = \sqrt{v_i v_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i v_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2}$$

índice repetido i ⇨ suma sobre este índice

›expresión $\sqrt{v_i^2}$ NO hay índice repetido, por tanto no hay suma sobre i: $\sqrt{v_i^2} \neq \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2} = |\underline{v}|$

›^{2} significa “el cuadrado de la i-ésima componente del vector” (donde el valor de i no está especificado)

Tensores cartesianos

eraciones con vectores:

or vector: $s\underline{v} = s\underline{\delta}_i v_i = \underline{\delta}_i (s v_i)$

escalar
ctores:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (\underline{\delta}_i u_i) \cdot (\underline{\delta}_j v_j) = (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j) u_i v_j = \delta_{ij} u_i v_j = u_i v_i$$

(esta expresión contiene dos índices repetidos, es por tanto una doble suma con un total de 9 términos. De estos nueve términos, la δ de Kronecker selecciona los 3 términos que se indican)

vectorial:

$$\underline{u} \times \underline{v} = (\underline{\delta}_i u_i) \times (\underline{\delta}_j v_j) = \left[\underline{\delta}_i \times \underline{\delta}_j \right] u_i v_j = \varepsilon_{ijk} \underline{\delta}_k u_i v_j = \varepsilon_{kij} \underline{\delta}_k u_i v_j =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Tensores cartesianos

ɪsores cartesianos de órdenes superiores se opera de modo

En vez de vectores unitarios se utilizan diadas, triadas, tetradas,

ɪrias:

ɪs unitarias son: $\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j, \quad i,j=1,2,3$ (hay 9)

$$\underline{\delta}_1\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_1\underline{\delta}_2, \underline{\delta}_1\underline{\delta}_3, \underline{\delta}_2\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2\underline{\delta}_2, \underline{\delta}_2\underline{\delta}_3, \underline{\delta}_3\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_3\underline{\delta}_2, \underline{\delta}_3\underline{\delta}_3$$

as unitarias son: $\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k, \quad i,j,k=1,2,3$ (hay 27)

adas unitarias son: $\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k\underline{\delta}_l, \quad i,j,k,l=1,2,3$ (hay 81)

esivamente para órdenes superiores

ɪre de las diadas es "*delta i delta j*", el de las triadas es "*delta*

i delta k", etc. Es decir, la diada unitaria es el "bloque": $\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j$

Tensores cartesianos

…or de 2º orden se expresa en función de sus componentes y …iadas unitarias de modo absolutamente análogo a uno de 1^er^

$$\underline{\underline{\tau}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \tau_{ij} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \tau_{ij}$$ (dos índices repetidos, doble suma, 9 términos)

…presión puede interpretarse como "*en el tensor* $\underline{\underline{\tau}}$ *, en el lugar …ado por los índices* ij*, colocar el valor (componente)* τ_{ij} "

…ndo el tensor de 2º orden como una matriz (**atención**: un tensor de 2º orden NO … matriz; sus componentes se pueden representar como una matriz; la distinción se … adelante)

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \tau_{ij} \\ & & \end{pmatrix} \leftarrow \text{fila } i$$

columna j

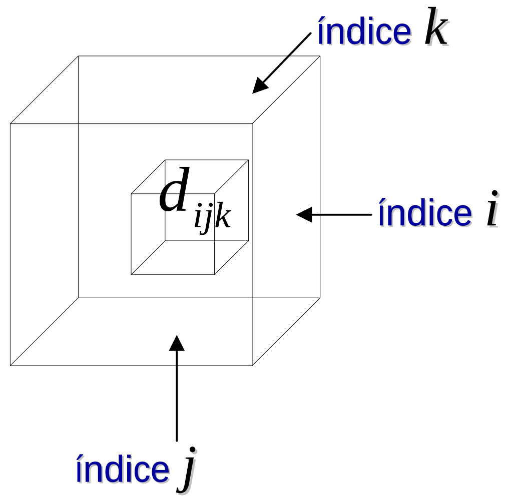
Tensores cartesianos

…or de 3er orden se expresa en función de sus componentes y …iadas unitarias de modo absolutamente análogo a uno de 1er orden

$$\underline{\underline{\underline{d}}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k d_{ijk} = \underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k d_{ijk}$$ (tres índices repetidos, triple suma)

…presión puede interpretarse como "*en el tensor* $\underline{\underline{\underline{d}}}$*, en el lugar …mponente) indicado por los índices* ijk*, colocar el valor* d_{ijk} "

…ndo un tensor de 3er orden como un cubo:



Tensores cartesianos

...nes con diadas unitarias: es una generalización directa de las operaciones ...res unitarios:

$$\ldots] = \underline{\delta}_i(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k) = \underline{\delta}_i \delta_{jk}$$

$$\ldots] = (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j)\underline{\delta}_k = \underline{\delta}_k \delta_{ij}$$

(productos escalares, o contracciones, de diada unitaria por vector unitario)

$$\ldots \underline{\delta}_l\} = \underline{\delta}_i(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k)\underline{\delta}_l = \underline{\delta}_i \delta_{jk} \underline{\delta}_l = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_l \delta_{jk}$$

(producto escalar, o contracción, de dos diadas unitarias

$$\ldots \underline{\delta}_l) = (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_l)(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k) = \delta_{il}\delta_{jk}$$

(doble contracción de dos diadas unitarias)

...mo regla general, cada “ · ” (llamada “contracción de índices” o producto interno) opera ...re los símbolos que están inmediatamente a su izquierda y a su derecha, es decir, es ...malmente idéntico a un producto escalar de los dos vectores unitarios adyacentes al ...erador.

...ando hay más de una contracción (p.ej. “ : ” es una doble contracción tensorial), se ...a a cabo la operación anterior tantas veces como contracciones haya.

Tensores cartesianos

eraciones con triadas, tetradas, etc. unitarias: se aplica la regla neral de la transparencia anterior hasta realizar todas las ntracciones:

$$= \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j (\underline{\delta}_k \cdot \underline{\delta}_l) = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \delta_{kl}$$

producto, o contracción, de triada unitaria por vector unitario; resultado: tensor de 2º orden

$$\ldots_m \Big] = \underline{\delta}_i (\underline{\delta}_k \cdot \underline{\delta}_l)(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_m) = \underline{\delta}_i \delta_{kl} \delta_{jm}$$

doble contracción de triada unitaria por diada unitaria; resultado: tensor de 1er orden

$$\ldots \underline{\delta}_n \Big) = (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_n)(\underline{\delta}_k \cdot \underline{\delta}_l)(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_m) =$$

triple contracción de triada unitaria por triada unitaria; resultado: escalar, tensor de orden cero

Tensores cartesianos

:ras que las contracciones anteriores reducen el orden del resultado :cto a la suma de órdenes de los factores, existe finalmente otro le producto, el **producto diádico**, no conmutativo, de dos res, cuyo resultado es un tensor de segundo orden:

$$\underline{u}\underline{v} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j u_i v_j$$

$$\left(\underline{u}\underline{v} \neq \underline{v}\underline{u}\right)$$

Producto diádico de dos vectores. Se denota escribiendo los dos factores sin ningún signo de multiplicación entre ambos. Resultado: tensor de 2º orden (con 9 componentes, hay doble suma, sobre los dos índices repetidos)

lo las anteriores definiciones, el modo de realizar productos es:

Doble contracción de dos tensores de 2º orden:

$$\left.\right) = \left(\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \sigma_{ij}\right) : \left(\underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \tau_{kl}\right) = (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_l)(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k)\sigma_{ij}\tau_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk}\sigma_{ij}\tau_{kl} = \sigma_{ij}\tau_{ji}$$

nos que contiene esta expresión (hay cuatro índices repetidos y por tanto 3^4 = 81 términos), las dos δ de Kronecker ionan los 9 (=3^2 doble suma) términos que se indican; es decir, aquéllos para los que $i=l$ y $j=k$, o lo que es lo mismo, penúltima expresión se identifican i con l y j con k, puesto que tienen que ser iguales estos índices

Tensores cartesianos

de 2º orden por vector:

$$= (\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \sigma_{ij}) \cdot (\underline{\delta}_k v_k) = \underline{\delta}_i (\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k) \sigma_{ij} v_k = \underline{\delta}_i \delta_{jk} \sigma_{ij} v_k = \underline{\delta}_i \sigma_{ij} v_j$$

resultado es el vector cuya componente i-ésima vale: $\sigma_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} v_j$

omprobar que el modo de calcular este producto se

ponde exactamente con el modo de calcular el

to de una matriz por un vector columna.

los nombres de los índices pueden cambiarse a voluntad, con tal de hacerlo de modo consistente. Son variables “dummy” o etiquetas, es decir, el nombre particular que lleven es irrelevante

$$v_k) \cdot (\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \sigma_{ij}) = \underline{\delta}_j (\underline{\delta}_k \cdot \underline{\delta}_i) \sigma_{ij} v_k = \underline{\delta}_j \delta_{ki} \sigma_{ij} v_k = \underline{\delta}_j \sigma_{ij} v_i = \underline{\delta}_i \sigma_{ji} v_j$$

l resultado es el vector cuya componente j-ésima vale:

$$\sigma_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij} v_i$$

comprobar que el modo de calcular este producto se

ponde exactamente con el modo de calcular el

cto de un vector columna transpuesto (fila) por una

z.

Tensores cartesianos

ción de dos tensores de 2º orden:

$$\ldots_j \sigma_{ij}) \cdot (\underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \tau_{kl}) = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_l (\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k) \sigma_{ij} \tau_{kl} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_l \delta_{jk} \sigma_{ij} \tau_{kl} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_l \sigma_{ij} \tau_{jl}$$

ultado es el tensor cuya componente i,l-ésima vale: $\sigma_{ij} \tau_{jl} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \tau_{jl}$

probar que el modo de calcular este producto se

de exactamente al modo de calcular el producto de

es cuadradas 3×3.

por tensor de 2º orden:

$$s\underline{\underline{\sigma}} = s(\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \sigma_{ij}) = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j s\sigma_{ij}$$

mponentes se multiplican por el escalar.

Tensores cartesianos

r de 3[er] orden por tensor de 2º orden:

$$\left. {}^{\prime} : \underline{\underline{\tau}} \right] = (\underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l d_{jkl}) : (\underline{\delta}_m \underline{\delta}_n \tau_{mn}) = \underline{\delta}_j \delta_{lm} \delta_{kn} d_{jkl} \tau_{mn} = \underline{\delta}_j d_{jkl} \tau_{lk}$$

resultado es el vector cuya componente j-ésima es: $d_{jkl}\tau_{lk} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} d_{jkl}\tau_{lk}$

titutiva de la piezoelectricidad directa es precisamente
forma:

$$\underline{P} = \underline{\underline{\underline{d}}} : \underline{\underline{\tau}}$$

esfuerzo a que se somete el material

aparece en el material

módulo piezoeléctrico del material

or tensor de 3[er] orden:

$$(\underline{\delta}_i E_i) \cdot (\underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l d_{jkl}) = \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j) E_i d_{jkl} = \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \delta_{ij} E_i d_{jkl} = \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l E_i d_{ikl}$$

ultado es el tensor de 2º orden cuya componente k,l-ésima es: $E_i d_{ikl} = \sum_{i=1}^{3} E_i d_{ikl}$

iva de la piezoelectricidad inversa es precisamente de esta

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{E} \cdot \underline{\underline{\underline{d}}}$$

módulo piezoeléctrico del material

ue aparece en el material

campo eléctrico a que se somete el material

Tensores cartesianos

de 4º orden por tensor de 2º orden:

$$(\underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \underline{\delta}_m c_{jklm}) : (\underline{\delta}_n \underline{\delta}_p \varepsilon_{np}) = \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \delta_{mn} \delta_{lp} c_{jklm} \varepsilon_{np} = \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k c_{jklm} \varepsilon_{ml}$$

ultado es el tensor de 2º orden cuya componente j,k-ésima vale: $c_{jklm}\varepsilon_{ml} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} c_{jklm}\varepsilon_{ml}$

tiva de la elasticidad lineal (ley de Hooke) para materiales

s es precisamente de esta forma:

aparece en el material → $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ ← deformación a que se somete al material

rigidez elástica

esfuerzo = rigidez × deformación

rma: *deformación = complianza × esfuerzo*

aparece en el material → $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{s}}}} : \underline{\underline{\tau}}$ ← esfuerzo a que se somete al material

complianza elástica

Tensores cartesianos

' simétrico en dos índices: es un tensor de cualquier orden para el que se

$$\tau_{...jklm...} = \tau_{...jlkm...}$$

ue es ***simétrico*** en esos dos índices. Si se verifica: $\tau_{...jklm...} = -\tau_{...jlkm...}$

es ***antisimétrico*** en esos dos índices.

r transpuesto de un tensor de 2º orden: si $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \tau_{ij}$

sor transpuesto es: $\underline{\underline{\tau}}^{\dagger} = \underline{\delta}_j \underline{\delta}_i \tau_{ij}$

' unitario de 2º orden: sus componentes son 0 o 1 según: $\underline{\underline{\delta}} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \delta_{ij}$

Se cumple: $\delta_{ii} = 3$

› de un tensor de 2º orden: $\left|\underline{\underline{\tau}}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}}^{\dagger}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}}$ (doble sumatorio)

Tensores cartesianos

ınte de un tensor de 1er orden: sólo tiene uno: $\underline{v} \cdot \underline{v} = v_i v_i$

ıo depende del sistema de coordenadas)

ntes de un tensor de 2º orden: es posible definir tres cantidades que son

ientes del sistema de coordenadas utilizado: las trazas de las tres primeras

; del tensor:

$$I = tr(\underline{\underline{\tau}}) = \tau_{ii}$$

$$II = tr(\underline{\underline{\tau}}^2) = tr(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\tau}}) = \tau_{ij}\tau_{ji}$$

$$III = tr(\underline{\underline{\tau}}^3) = tr\left((\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\tau}}) \cdot \underline{\underline{\tau}}\right) = \tau_{ij}\tau_{jk}\tau_{ki}$$

efinir otros invariantes (cualquier función de estos invariantes es evidentemente

te), pero están necesariamente relacionados con éstos, de modo que sólo existen

ependientes. También suelen emplearse estos:

$$I_1 = I$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I^2 - II)$$

$$I_3 = \frac{1}{6}(I^3 - 3I \cdot II + 2III) = \det(\underline{\underline{\tau}})$$

Tensores cartesianos

ɔerador diferencial “nabla” o “del”: $\underline{\nabla} \equiv \underline{\delta}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

o) podemos definir:

e de un campo escalar: $\underline{\nabla} s = \underline{\delta}_i \dfrac{\partial s}{\partial x_i}$

tensor de 1er orden)

Atención, algunos textos definen el gradiente de un campo vectorial como: $\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$

e de un campo vectorial: $\underline{\nabla}\,\underline{v} = \left(\underline{\delta}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\underline{\delta}_j v_j \right) = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$

: 2º orden)

cia de un campo vectorial: $\left(\underline{\nabla} \cdot \underline{v} \right) = \left(\underline{\delta}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\underline{\delta}_j v_j \right) = \delta_{ij} \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$

tensor de orden cero)

cia de un campo tensorial de (vector o tensor de orden uno) $\left[\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} \right] = \left(\underline{\delta}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \tau_{jk} \right) = \underline{\delta}_k \delta_{ij} \dfrac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} = \underline{\delta}_k \dfrac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i}$

Tensores cartesianos

la ecuación constitutiva del fluido newtoniano es: $\underline{\underline{\tau}} = -\mu\left[\nabla \underline{v} + \left(\nabla \underline{v}\right)^{\dagger}\right]$

nponentes: $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \tau_{ij} = -\mu \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \left(\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$

si nos dan el campo de velocidad en todos los puntos de un

(x_1, x_2, x_3) podemos calcular qué esfuerzo aparece en cada punto

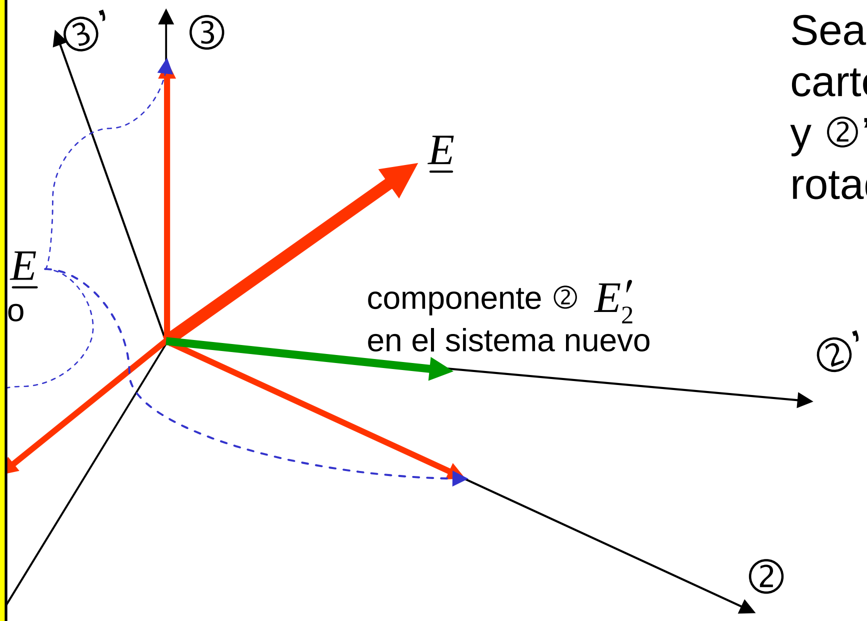
luido. En representación matricial:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & 2\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} & 2\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

nétrico

Tensores cartesianos

ción de tensor cartesiano se basa en su comportamiento bajo
ción de ejes coordenados (cartesianos):



$$E_2' = l_{21}E_1 + l_{22}E_2 + l_{23}E_3$$

La componente ②’, nueva, es la suma de las proyecciones de las componentes viejas sobre el nuevo eje ②’

Sean ①③② un sistema de ejes cartesianos (el sistema “viejo”) y ①’, ③’ y ②’ otro sistema (el sistema “nuevo”) rotado respecto al primero.

Sea $l_{ij} \equiv \cos\theta_{ij}$ el coseno del ángulo que forman los ejes i nuevo y j viejo.

Un vector $\underline{E}$ cuyas componentes E_i son conocidas en el sistema viejo tiene como componentes en el sistema nuevo: $E_i' = l_{ij}E_j$ (suma sobre índice repetido)

Tensores cartesianos

de transformación $E_i' = l_{ij} E_j$ garantiza que el vector $\underline{E}$ (por ejemplo un ctrico) mantiene su significado físico antes y después de la ación, es decir, representa la misma magnitud física (que mente debe ser independiente del sistema de coordenadas).

os que definen la transformación de sistema de coordenadas pueden arse como una matriz ortogonal:

$$\begin{matrix} {}_{12} & l_{13} \\ {}_{22} & l_{23} \\ {}_{32} & l_{33} \end{matrix}\Bigg) \quad \text{que cumple} \quad \underset{\sim}{L}^{\dagger} = \underset{\sim}{L}^{-1} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix}$$

e $\underset{\sim}{L}$ son las componentes de los vectores unitarios nuevos expresados ma antiguo.

de la transformación inversa, del sistema nuevo al viejo, es $\underset{\sim}{L}^{-1} = \underset{\sim}{L}^{\dagger}$

z de tranformación **no** es un tensor. Las matrices se denotarán por un rayado con tilde: $\underset{\sim}{L}$)

Tensores cartesianos

as componentes de $\underline{E}$ cambian (se transforman) de valor
al rotar los ejes, si la transformación es la indicada, los valroes
s de las nuevas componentes son tales, que el vector se
invariable en el espacio.

uerimiento **físico** es la base de la definición **matemática** de
r cartesiano de primer orden: se define como una magnitud
mponentes, al rotar el sistema de referencia por medio de $\underset{\sim}{L}$,
orman como: $\boxed{E_i' = l_{ij} E_j}$ (*)

punto de vista físico, debe existir un modo de verificar que
nente se cumple (*). Por ejemplo, si se miden las componentes
es y después de rotar el sistema de referencia y se observa que
e (*), entonces $\underline{E}$ es un tensor de primer orden. En caso
, no lo es.

Tensores cartesianos

), cabe preguntarse ¿cómo se transforman las componentes de
des como la difusividad anisotrópica, la rigidez elástica, etc?

) como ejemplo la ley de Ohm: $\underline{E} = \underline{\underline{\rho}} \cdot \underline{J}$, o bien por
ntes: $E_i = \rho_{ij} J_j$, puesto que tanto el campo eléctrico como la
de corriente eléctrica son tensores de 1er orden, se
nan como:

$$E_i' = l_{ij} E_j \qquad E_i = l_{ji} E_j'$$
$$J_i' = l_{ij} J_j \qquad J_i = l_{ji} J_j'$$

entalmente se ha comprobado que la ley de Ohm es válida
dientemente del sistema de coordenadas, es decir en ambos:

$$E_i = \rho_{ij} J_j \qquad E_i' = \rho_{ij}' J_j'$$

magnitudes con ´ están expresadas en el sistema nuevo.

Tensores cartesianos

; por tanto escribir:

de Ohm en
stema nuevo → $E'_i = \rho'_{il} J'_l$

transformación de $\underline{E}'$ al sistema viejo

transformación de $\underline{J}$ al sistema nuevo

$$E'_i = l_{ij} E_j = l_{ij} \rho_{jk} J_k = l_{ij} \rho_{jk} l_{lk} J'_l = l_{ij} l_{lk} \rho_{jk} J'_l$$

Ley de Ohm
en el sistema
viejo

o

e que las componentes de las dos resistividades en los dos sistemas deben estar
das por:

$$\rho'_{il} = l_{ij} l_{lk} \rho_{jk}$$

sta manera se garantiza que:

o y la densidad de corriente mantengan su significado físico (sean tensores de 1er orden)

bla la ley de Ohm en los dos sistemas de referencia, es decir, la resistividad eléctrica
a su significado físico (sea magnitud tensorial de 2º orden)

Tensores cartesianos

ción de un tensor de 2º orden es por tanto: una magnitud

mponentes, al rotar el sistema de referencia por medio de $\underset{\sim}{L}$

orman como: $\boxed{T'_{ij} = l_{ik} l_{jl} T_{kl}}$

rocedimiento análogo (p.ej. usando la ley constitutiva de la

tricidad inversa $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{E} \cdot \underline{\underline{\underline{d}}}$) se verifica que la definición de un

3er orden debe ser: una magnitud cuyas componentes, al

istema de referencia por medio de $\underset{\sim}{L}$ se transforman como:

$$\boxed{T'_{ijk} = l_{il} l_{jm} l_{kn} T_{lmn}}$$

en el 2º miembro de esta expresión hay tres índices repetidos, por tanto es una suma triple, sobre cada uno de ellos, y por tanto contiene 3^3=27 términos. Es decir, para calcular cada uno de los 27 términos del tensor en el nuevo sistema, es preciso sumar 27 productos como el indicado.

4º orden:

$$\boxed{T'_{ijkl} = l_{im} l_{jn} l_{kp} l_{lq} T_{mnpq}}$$

Igualmente, para calcular cada uno de los 81 términos de un tensor de 4º orden en el nuevo sistema, es preciso sumar 81 productos como el indicado.

Tensores cartesianos

tante apreciar que las leyes de transformación de tensores de
· orden son lineales en las componentes. Es decir, las
ntes nuevas dependen de las viejas a través de funciones
homogéneas

argo, la dependencia espacial, es decir, cómo varían las
componentes al variar la orientacion de los eje nuevos, es
ás complicada, debido a la presencia de productos de cosenos.
endencia es tanto más complicada cuanto mayor sea el orden:

dependencia lineal entre componentes

$$\boxed{T'_{ijk} = l_{il} l_{jm} l_{kn} T_{lmn}}$$

las componentes nuevas dependen de los cosenos directores cúbicamente

Tensores cartesianos

o cabe esperar que la dependencia espacial (anisotropía) iedades tensoriales de orden alto sea complicada

plo más característico es el de las propiedades elásticas de materiales anisótropos (ver probs. en Cap. 9) ⇨ el le estructuras con materiales compuestos, o anisótropos ral, es complicado

Tensores cartesianos

nsecuencia de la linealidad, la mayoría de las propiedades

das en la transp. 9 corresponden a leyes constitutivas lineales:

$$\begin{cases} \underline{J}_A = -\underline{\underline{D}} \cdot \nabla \underline{C}_A \\ \underline{P} = \underline{\underline{\underline{d}}} : \underline{\underline{\tau}} \end{cases}$$

erfectamente posible formular leyes constitutivas no lineales

érminos de orden superior, por medio de productos diádicos;

$$\Delta \underline{\underline{\eta}} = \underline{\underline{\underline{r}}} \cdot \underline{E} + \underline{\underline{\underline{\underline{s}}}} : \underline{E}\underline{E}$$

$$\Delta \eta_{ij} = r_{ijk} E_k + s_{ijkl} E_k E_l$$

(describe la variación en el índice de refracción de un material al someterlo a un campo eléctrico)

d óptica (-)

coef. electroóptico lineal (efecto Pockels) (m/V)

coeficiente electroóptico cuadrático (efecto Kerr) (m^2/V)

Tensores cartesianos

mplo es la magnetorresistividad (variación en la resistividad de rial al someterlo a un campo magnético, efecto cuadrático en la n magnética), que es el principio físico en el que se basa el amiento (lectura) de información en discos duros.

$$\underline{\underline{\rho}} = \underline{\underline{\rho}}^0 + \underline{\underline{\underline{\underline{\rho}}}} : \underline{B}\underline{B}$$

$$\rho_{ij} = \rho^0{}_{ij} + \rho_{ijkl} B_k B_l$$

coeficiente magnetoresistivo (cuadrático) (Ω.m/T^2)

campo magnético (inducción magnética) (T)

Tensores cartesianos

las ventajas de formular leyes físicas usando exclusivamente
udes tensoriales es que estas leyes son válidas en cualquier $\underset{\sim}{L}$
de coordenadas (en este caso, cartesianas), es decir, son
ndientes del sistema en que las expresemos.

ceptos anteriores pueden generalizarse a coordenadas
eas y a espacios no euclídeos con un esfuerzo moderado; estos
s más generales no son necesarios en esta asignatura.

Tensores cartesianos

ormación de tensores de 2º orden puede escribirse también como:

$$T'_{ij} = l_{ik} l_{jl} T_{kl}$$

$$\underline{\underline{T}}' = \underset{\sim}{L}\,\underline{\underline{T}}\,\underset{\sim}{L}^{\dagger}$$

2ª expresión hay que entenderla como el producto de la matriz de ación y su traspuesta (inversa) por el tensor estando éste escrito triz.

ores de orden superior existen expresiones que usan productos con de rotación (es decir, análogas a $\underline{\underline{T}}' = \underset{\sim}{L}\,\underline{\underline{T}}\,\underset{\sim}{L}^{\dagger}$) pero no son Es preferible usar la ley de transformación general.

Tensores cartesianos

›s ejes, el tensor unitario se transforma de esta manera:

$$\delta'_{ij} = l_{ik} l_{jl} \delta_{kl} = l_{ik} l_{jk} = \delta_{ij}$$

$$\underline{\underline{\delta}}' = \underset{\sim}{L}\,\underline{\underline{\delta}}\,\underset{\sim}{L}^{\dagger} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{L}^{\dagger} = \underline{\underline{\delta}}$$

sus componentes son las mismas sea cual sea la orientación del

e referencia

ıto un **tensor de 2º orden isótropo** (no es un escalar);

te sirve

lescribir tensores de campo de 2º orden isótropos (p.ej. presión

stática)

piedades de 2º orden de materiales isótropos (p.ej. la conductividad

ica de un material policristalino no orientado)

Tensores cartesianos

te, para expresar propiedades de 4º orden de materiales (p.ej. la complianza elástica de un material policristalino no) existen **tres tensores de 4º orden isótropos** :

$$\underline{\underline{\delta}}\,\underline{\underline{\delta}} \equiv \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} \equiv \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^T \equiv \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \delta_{il} \delta_{jk}$$

s últimos son unitarios en el sentido de que para cualquier tensor $\underline{\underline{A}}$ en igual o superior a 2 se cumple:

$$:\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} : \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

$$= \underline{\underline{A}}^T ; \quad \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^T : \underline{\underline{A}} = {}^T\underline{\underline{A}}$$

transposición de la última pareja de índices

$\underline{\underline{A}}^{T}$ $\quad$ ${}^{T}\underline{\underline{A}}$

transposición de la primera pareja de índices

Tensores cartesianos

…s verificar que cada uno de ellos se mantiene invariante al …cualquier rotación de ejes, es decir, es el mismo en todas las …nes y pertenece a la clase límite $\infty\infty m$. Por ejemplo:

$$\ldots_{pq} = l_{mi}l_{nj}l_{pk}l_{ql}\delta_{ij}\delta_{kl} = \underbrace{l_{mi}l_{ni}}\,\underbrace{l_{pk}l_{qk}} = \delta_{mn}\delta_{pq} = \left(\underline{\underline{\delta}}\,\underline{\underline{\delta}}\right)_{mnpq}$$

producto escalar de las filas m y n de la matriz de cambio de base

producto escalar de las filas p y q de la matriz de cambio de base

(recordar que el producto escalar de dos filas o dos columnas de la matriz de cambio de base es:

- 0 si son distintas filas o distintas columnas
- 1 si las dos son la misma fila o la misma columna)

…mente para los otros dos.

Tensores cartesianos

›s también verificar que los dos últimos son unitarios :

$$\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}=\left(\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j A_{ij}\right):\left(\underline{\delta}_m\underline{\delta}_n\underline{\delta}_p\underline{\delta}_q\delta_{mq}\delta_{np}\right)=$$

$$\underline{\delta}_p\underline{\delta}_q A_{ij}\delta_{mq}\delta_{np}\delta_{in}\delta_{jm}=\underline{\delta}_p\underline{\delta}_q A_{pq}=\underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^T=\left(\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j A_{ij}\right):\left(\underline{\delta}_m\underline{\delta}_n\underline{\delta}_p\underline{\delta}_q\delta_{mp}\delta_{nq}\right)=$$

$$\underline{\delta}_p\underline{\delta}_q A_{ij}\delta_{mp}\delta_{nq}\delta_{in}\delta_{jm}=\underline{\delta}_p\underline{\delta}_q A_{qp}=\underline{\underline{A}}^T$$

ımente para los dos productos por la izquierda. También se

›va que el producto por $\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$ o por $\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^T$ sólo afecta a los dos primeros

s dos últimos índices de $\underline{\underline{A}}$. Si $\underline{\underline{A}}$ es de orden mayor que dos, el

de los índices queda inalterado y la transposición se refiere sólo a

s primeros o dos últimos índices respectivamente.

Tensores cartesianos

o del producto de un tensor de segundo orden por $\underline{\underline{\delta}}\,\underline{\underline{\delta}}$:

$$\underline{\underline{\delta}}\,\underline{\underline{\delta}} = \left(\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j A_{ij}\right) : \left(\underline{\delta}_m \underline{\delta}_n \underline{\delta}_p \underline{\delta}_q \delta_{mn} \delta_{pq}\right) =$$

$$\underline{\delta}_q A_{ij} \delta_{mn} \delta_{pq} \delta_{in} \delta_{jm} = \underline{\delta}_p \underline{\delta}_q \delta_{pq} A_{mm} = tr(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{\delta}}$$

cir otro tensor de segundo orden cuyos elementos diagonales son iguales a la traza de $\underline{\underline{A}}$ y el resto nulos. Es decir, produce un r isótropo de 2º orden que es $tr(\underline{\underline{A}})$ veces el tensor unitario opo) de 2º orden.

Tensores cartesianos

al: las magnitudes tensoriales escritas en notación de Voigt

2_01_01), aunque más fáciles de manipular (matrices y

es ordinarios), pierden su carácter tensorial porque NO se

rman como tensores.

ciso tener siempre en cuenta esta circunstancia: si se realiza

tación del sistema de referencia, las magnitudes escritas en

ón de Voigt dejan de ser válidas en el nuevo sistema.