

0229.00

Suma e Intersección de Subespacios



3 487002 290009

(c) 2012 Leandro Marin

1. Sumas e Intersecciones de Espacios Vectoriales

Definición. Sean U un espacio vectorial y sean V y W dos subespacios vectoriales de U . Llamaremos intersección de V y W , y lo denotaremos $V \cap W$ al conjunto formado por los vectores $u \in U$ tales que u está a la vez en los dos espacios, es decir $u \in V$ y $u \in W$.

Llamaremos suma de los espacios V y W , y lo denotaremos $V + W$ al conjunto de vectores $u \in U$ que se pueden poner como $u = v + w$ con v un vector de V y w un vector de W .

Está claro que el espacio $V \cap W$ está contenido tanto en V como en W y que ambos espacios están contenidos en $V + W$. Existe una relación entre las dimensiones de todos estos espacios, concretamente:

$$\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \cap W) + \dim(V + W)$$

Habitualmente necesitaremos calcular bases de estos espacios. El método utilizado dependerá del formato en que se nos proporcionen los espacios.

Supongamos que nos proporcionan conjuntos generadores de los espacios V y W , entonces lo que haremos es poner una matriz con los siguientes vectores en fila:

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{gen. de } V & \text{gen. de } V \\ \hline \text{gen. de } W & 0 \end{array} \right)$$

Si hacemos operaciones elementales en esta matriz hasta obtener la matriz triangular, lo que obtenemos en la parte izquierda es una base de $V + W$ (quitando las filas de ceros). Lo que queda en la parte derecha, en las filas que en la parte izquierda hay ceros, son la base de la intersección. Finalmente, podría haber alguna fila adicional de ceros que eliminamos. El esquema que queda de la matriz reducida es:

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{base de } V + W & \star \\ \hline 0 & \text{base de } V \cap W \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Si no aparece ninguna fila de ceros en la parte marcada en rojo es porque la intersección es el espacio 0 y por lo tanto la base de la intersección es el conjunto vacío. Si los vectores de V y W que tomamos originalmente son base de los respectivos espacios, la parte azul no aparecería.

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{base de } V + W & \star \\ \hline \text{0} & \text{base de } V \cap W \\ \hline \text{0} & \text{0} \end{array} \right)$$

Si en lugar de darnos los espacios en forma paramétrica, nos los dan en forma implícita, es decir, mediante ecuaciones, podemos proceder de dos formas. La primera es pasar los espacios a forma paramétrica y aplicar el caso anterior, pero también podemos hacer un algoritmo totalmente dual del anterior poniendo las ecuaciones que nos definen cada uno de los espacios en una matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{ecu. de } V & \text{ecu. de } V \\ \hline \text{ecu. de } W & 0 \end{array} \right)$$

y al reducir nos quedaría:

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{ecu. de } V \cap W & \star \\ \hline \text{0} & \text{ecu. de } V + W \\ \hline \text{0} & \text{0} \end{array} \right)$$

Si la parte roja no tiene ninguna fila de ceros, es porque $V + W$ no tiene ninguna restricción, es decir $V + W$ es todo el espacio. Si las ecuaciones son linealmente independientes, la parte azul no aparecería.

Como se puede ver este algoritmo es totalmente dual del anterior y se entenderá cuando hablemos de los espacios ortogonales. De momento y como algorítmicamente es igual al otro, sólo vamos a utilizar el primero.

2. Ejercicios Resueltos

Ejercicio. Calcula la suma e intersección los \mathbb{Q} -espacios vectoriales V y W siendo V el espacio generado por

$$(1, 0, -1)$$

y W el espacio generado por

$$(1, 0, -1)(-1, 2, 0)$$

Para calcular la suma e intersección de estos subespacios vamos a utilizar la matriz formada por los vectores de los dos subespacios en la parte izquierda y los vectores del primero y 0 en la parte derecha. Esta matriz la vamos a reducir y luego sacaremos las bases de la suma y la intersección de los subespacios.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \xrightarrow{-1F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \xrightarrow{1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \xrightarrow{-1F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \xrightarrow{-1F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \leftrightarrow F_3 \xrightarrow{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La base de la suma es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$ y la base de la intersección es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

Ejercicio. Calcula la suma e intersección los \mathbb{F}_5 -espacios vectoriales V y W siendo V el espacio generado por

$$(3, 3, 3)$$

y W el espacio generado por

$$(3, 4, 2)(4, 4, 4)$$

Para calcular la suma e intersección de estos subespacios vamos a utilizar la matriz formada por los vectores de los dos subespacios en la parte izquierda y los vectores del primero y 0 en la parte derecha. Esta matriz la vamos a reducir y luego sacaremos las bases de la suma y la intersección de los subespacios.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \xrightarrow{=2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_2 \xrightarrow{=2F_1+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_3 \xrightarrow{=1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La base de la suma es $(1 \ 1 \ 1) (0 \ 1 \ 4)$ y la base de la intersección es $(1 \ 1 \ 1)$.

Ejercicio. Calcula la suma e intersección los \mathbb{F}_2 -espacios vectoriales V y W siendo V el espacio generado por

$$(a^2 + a, a, 0)$$

y W el espacio generado por

$$(a, a^2 + a, a) (a^2 + a, a + 1, a^2 + 1)$$

Para calcular la suma e intersección de estos subespacios vamos a utilizar la matriz formada por los vectores de los dos subespacios en la parte izquierda y los vectores del primero y 0 en la parte derecha. Esta matriz la vamos a reducir y luego sacaremos las bases de la suma y la

intersección de los subespacios.

$$\begin{pmatrix} a^2 + a & a & 0 & a^2 + a & a & 0 \\ a & a^2 + a & a & 0 & 0 & 0 \\ a^2 + a & a + 1 & a^2 + 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \xrightarrow{=(a+1)F_1} \begin{pmatrix} 1 & a^2 + a & 0 & 1 & a^2 + a & 0 \\ a & a^2 + a & a & 0 & 0 & 0 \\ a^2 + a & a + 1 & a^2 + 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \xrightarrow{=aF_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & a^2 + a & 0 & 1 & a^2 + a & 0 \\ 0 & 1 & a & a & a^2 + a + 1 & 0 \\ a^2 + a & a + 1 & a^2 + 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \xrightarrow{=(a^2+a)F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & a^2 + a & 0 & 1 & a^2 + a & 0 \\ 0 & 1 & a & a & a^2 + a + 1 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 + 1 & a^2 + a & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \xrightarrow{=1F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & a^2 + a & 0 & 1 & a^2 + a & 0 \\ 0 & 1 & a & a & a^2 + a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + a + 1 & a^2 & a^2 + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \xrightarrow{=a^2F_3} \begin{pmatrix} 1 & a^2 + a & 0 & 1 & a^2 + a & 0 \\ 0 & 1 & a & a & a^2 + a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 + a & a & 0 \end{pmatrix}$$

La base de la suma es $(1 \ a^2 + a \ 0) \ (0 \ 1 \ a) \ (0 \ 0 \ 1)$ y la base de la intersección es \emptyset , el conjunto vacío, porque la intersección es el espacio 0.

Ejercicio. Calcula la suma e intersección los \mathbb{Q} -espacios vectoriales V y W siendo V el espacio generado por

$$(-1, 2, 1)(1, -2, -1)$$

y W el espacio generado por

$$(2, 0, -2)(0, 0, 0)\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

Para calcular la suma e intersección de estos subespacios vamos a utilizar la matriz formada por los vectores de los dos subespacios en la

parte izquierda y los vectores del primero y 0 en la parte derecha. Esta matriz la vamos a reducir y luego sacaremos las bases de la suma y la intersección de los subespacios.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = -1F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = -1F_1 + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = -2F_1 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_5 = -\frac{1}{2}F_1 + F_5 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \frac{1}{4}F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$F_5 = -1F_3 + F_5 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_5 = 2F_5 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \leftrightarrow F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \leftrightarrow F_5 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base de la suma es $(1 \ -2 \ -1) (0 \ 1 \ 0) (0 \ 0 \ 1)$ y la base de la intersección es \emptyset , el conjunto vacío, porque la intersección es el espacio 0.