TOPOLOGÍA

Def: Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $T \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que T es una topología (o sistema de abiertos) para X si:

a) $\emptyset, X \in T$

b) $\forall A_1, A_2 \in T$, $A_1 \cap A_2 \in T$ (intersección finita)

c) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset T$, $\bigcup_{j\in J} A_j \in T$ (unión arbitraria).

Los miembros de una topología T se llaman abiertos de la topología T. El par (X,T) se llama espacio topológico.

Ejemplo:

1) $\forall X \neq \emptyset$ conjunto, $T = \{\emptyset, X\}$ es la topología trivial de X.

2) $\forall X \neq \emptyset$ conjunto, $T_D = \mathcal{P}(X)$ es la topología discreta de X.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_U = \{U \subset \mathbb{R}^n \,/\, x \in U$ si $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \subset U\}$ es la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

4) (X,d) espacio métrico, $T_d = \{U \subset X \,/\, \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(x) \subset U$ es la topología inducida por la métrica d. $B_\varepsilon(x)$ es una base de T en X

Obs: No todo espacio topológico verifica que su topología esté inducida por una métrica.

Sea X, card$(X) \geq 2$ y T top. trivial sobre X. (X,T) es t.q. $\nexists$ métrica que induzca esa topología porque el único abierto $\neq \emptyset$ es X y en X hay, al menos, dos puntos distintos.

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que es metrizable si $\exists d$ métrica t.q. T es la topología inducida por d.

Def: Sea X un conjunto y T, T' topologías para X. Se dice que T es más débil que T' (o T menos fina que T') si $T \subset T'$.

También se dice T' más fuerte o más fina que T.

Def: (X,T) e.t. y $C \subset X$. Se dice que C es cerrado en (X,T) si $X \setminus C$ abierto de (X,T).

Obs 1: Dado un e.t. y $C \subset X$, C no es necesariamente abierto ni cerrado.

$(\mathbb{R}, T_u)$ y $[0,1)$

Obs 2: (X, T_D) y $\forall C \subset X$, C es abierto y cerrado.

$T_D = \{\emptyset, X\}$, $C = \emptyset, X$ abierto y cerrado.

Prop: (X,T) e.t. y $C_T = \{C \subset X \mid C \text{ cerrado en } (X,T)\}$. Entonces

a) $\emptyset, X \in C_T$ $\left|\begin{array}{l} \emptyset = X \setminus X \text{ y } X \in T \Rightarrow \emptyset \in C_T \\ X = X \setminus \emptyset \text{ y } \emptyset \in T \Rightarrow X \in C_T \end{array}\right.$

b) $\forall C_1, C_2 \in C_T$, $C_1 \cup C_2 \in C_T$ $\left|\begin{array}{l} C_i \in C_T \text{ t.q. } X \\ \Rightarrow (X \setminus C_1) \cap (X \setminus \end{array}\right.$

c) $\forall \{C_j\}_{j \in J} \subset C_T$, $\bigcap_{j \in J} C_j \in C_T$ $\left|\begin{array}{l} \bigcup (X \setminus C_j) \in T \Rightarrow \bigcup (\\ \quad \bigcap C_j \in C_T \end{array}\right.$

De Morgan laws

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Dem: Sencillo aplicando las leyes de DeMorg

Recíprocamente, $\forall X \neq \emptyset$ conjunto y $\forall \mathcal{F} \subset P(X)$ con $\mathcal{F}$ cumpliendo a), b) y c), $\exists!$ topología en X t.q. la familia de cerrados sea $\mathcal{F}$

Def: (X,T) e.t. y $S \subset X$, se llama adherencia en (X,T) a

$$\bar{S} = \bigcap_{\substack{C \text{ cerrado de } (X,T) \\ C \supset S}} C \quad \text{(intersección de todos los cerrados que contienen a } S)$$

$\bar{S}$ siempre es cerrado.

Obs: la adherencia de S es el menor cerrado del e.t. que contiene a S.

Lema: Sea (X,T) e.t., $A,B \subset X$ y $A \subset B$. Entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Dem: $A \subset B \subset \bar{B}$ cerrado $\Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

$\uparrow$ $\bar{B}$ cerrado que contiene a

$A \subset B \Rightarrow A \subset B \subset \bar{B} \Rightarrow A \subset \bar{B}$

$\Rightarrow A \subset \bar{A} \subset \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

Prop: (X,T) e.t.

1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$ (por def.)

2) $\forall S \subset X$, $S \subset \bar{S}$ (por def.)

3) $\forall S \subset X$, $\bar{\bar{S}} = \bar{S}$

$\bar{S} \subset \bar{\bar{S}}$ por 2)

$\bar{S} \subset \bar{S} \Rightarrow \bar{\bar{S}} \subset \bar{S}$

$\uparrow$ por ser $\bar{S}$ cerrado.

4) $\forall A,B \subset X$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\subset$] $A \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B}$

$B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ $\Big\}$ $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

$\supset$] $A, B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

$A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$

5) $\forall C \subset X$, C cerrado de $(X,T) \Leftrightarrow \bar{C} = C$

Teorema: Sea $X \neq \emptyset$ conjunto y $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ aplicación que cumple 1) 2) 3) 4). Entonces $\exists!$ T topología sobre X t.q. $\forall S \subset X$, la adherencia de S es $\bar{S}$.

Dem: Sea $\mathcal{F} = \{ C \subset X \,/\, \bar{C} = C \}$

$\forall A,B \subset X$, $A \subset B$ es t.q. $B = A \cup (B \setminus A) \underset{4)}{\Rightarrow}$

$\bar{B} = \overline{A \cup (B \setminus A)} = \bar{A} \cup \overline{(B \setminus A)} \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

a) Por 2) $X \subset \bar{X} \subset X \Rightarrow \bar{X} = X \Leftrightarrow X \in \mathcal{F}$

$\emptyset \in \mathcal{F}$ por 1)

b) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} : \overline{F_1 \cup F_2} \underset{4)}{=} \bar{F_1} \cup \bar{F_2} = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

c) $\{F_j\}_{j \in \mathcal{F}} \subset F$, $j_0 \in J$

$\bigcap_{j \in J} F_j \subset F_{j_0} \Rightarrow \overline{\bigcap_{j \in J} F_j} \subset \bar{F}_{j_0} = F_{j_0} \Rightarrow \overline{\bigcap_{j \in J} F_j} \subset \bigcap_{j \in J} F_j$

Recíprocamente por 2).

Def: Sea $X \neq \emptyset$ conjunto y $\varphi : P(X) \longrightarrow P(X)$ cumpliendo 1), 2), 3) y 4).

Se dice que φ es el operador clausura de KURATOWSKI.

Def: Sea (X,T) e.t. y $S \subset X$. Se llama interior de S en (X,T) a

$$\mathring{S} = \bigcup_{\substack{G \in T \\ G \subset S}} G$$

Obs: El interior es el mayor abierto contenido en S.

Prop: Sea (X,T) e.t. y $S \subset X$. Entonces:

1) $X \setminus \mathring{S} = X \setminus \bigcup_{\substack{G \in T \\ G \subset S}} G = \bigcap_{\substack{G \in T \\ G \subset S}} (X \setminus G) = \bigcap_{\substack{C \text{ cerr.} \\ C \supset X \setminus S}} C = \overline{X \setminus S}$

2) $X \setminus \bar{S} = X \setminus \bigcap_{\substack{C \text{ cerr.} \\ C \supset S}} C = \bigcup_{\substack{C \text{ cerr} \\ C \supset S}} (X \setminus C) = \bigcup_{\substack{G \in T \\ G \in X \setminus S}} G = (X \setminus S)^\circ$

Prop: (X,T) e.t.:

a) $\forall A, B \subset X$, $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

b) $\mathring{X} = X$

c) $\forall S \subset X$, $\mathring{S} \subset S$

d) $\forall S \subset X$, $(\mathring{S})^\circ = \mathring{S}$

e) $\forall A, B \subset X$, $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

f) $\forall S \subset X$, $S \in T \Longleftrightarrow S = \mathring{S}$

Dem:

a) $\mathring{A} \subset A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

b) $X \in T$, $\mathring{X} \subset X \Rightarrow \mathring{X} = X$

d) $(\mathring{S})^\circ \subset \mathring{S}$ por c)
$\mathring{S} \subset \mathring{S} \Rightarrow (\mathring{S})^\circ \subset \mathring{S}$
$\Big\}\ \mathring{S} = (\mathring{S})^\circ$

e) $A \cap B \subset A, B \underset{a)}{\Rightarrow} (A \cap B)^\circ \subset \mathring{A}, \mathring{B} \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$

$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{\Rightarrow} \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset (A \cap B)^\circ$

f) $\underset{\in T}{S} \subset S \Rightarrow \mathring{S} \supset S$

$S = \mathring{S} \in T$

Def: Sea (X, T) e.t. y $S \subset X$. Se llama frontera de S en (X, T) a

$Fr(S) = \bar{S} \cap \overline{X \setminus S}$

Ejemplo $Fr[0,1] = \underline{\{0,1\}}$

Obs: $Fr(S)$ cerrado y $Fr(X \setminus S) = Fr(S)$ (por def.)

Prop: (X, T) e.t. y $S \subset X$. Entonces:

1) $\bar{S} = S \cup Fr(S)$

2) $\mathring{S} = S \setminus Fr(S)$ ($\Rightarrow \mathring{S} \cup Fr(S) = S$)

3) $X = \mathring{S} \cup Fr(S) \cup (X \setminus S)^\circ = \mathring{S} \cup Fr(S) \cup (X \setminus \bar{S})$

4) $Fr(S) = \bar{S} \setminus \mathring{S}$

Dem: 1) $S \cup Fr(S) = S \cup (\bar{S} \cap \overline{X \setminus S}) = (S \cup \bar{S}) \cap (S \cup \overline{X \setminus S}) \underset{\overline{X\setminus S} \supset X \setminus S}{\overset{\uparrow}{=}}$

$= \bar{S} \cap X = \bar{S}$

2) $S \setminus Fr(S) = S \setminus (\bar{S} \cap \overline{X \setminus S}) = (S \setminus \bar{S}) \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) =$

$= \emptyset \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) \underset{X \setminus \mathring{S} = \overline{X \setminus S}}{\overset{\uparrow}{=}} S \setminus (X \setminus \mathring{S}) = S \cap \mathring{S} = \mathring{S}$

3) $X = \mathring{S} \cup (X \setminus \mathring{S}) = \mathring{S} \cup \overline{X \setminus S} \underset{1)}{=} \mathring{S} \cup Fr(X \setminus S) \underset{2)}{=}$

$= \mathring{S} \cup Fr(S) \cup Fr(X \setminus S) \cup (X \setminus \mathring{S}) = \mathring{S} \cup Fr(S) \cup (X \setminus S)^{\circ}$

4) $Fr(S) = \bar{S} \cap \overline{X \setminus S} \underset{X \setminus \mathring{S} = \overline{X \setminus S}}{\overset{\uparrow}{=}} \bar{S} \cap (X \setminus \mathring{S}) = \bar{S} \setminus \mathring{S}$

Def: Sea (X,T) e.t. y $S \subset X$. Se dice que S es denso en (X,T) si $\bar{S} = X$

Def: (X,T) e.t. y $x \in X$, $V \subset X$. Se dice que V es entorno de x en (X,T) si $\exists A \in T$ t.q. $x \in A \subset V$

Obs: V es entorno de $x \Leftrightarrow x \in \mathring{V}$

Notación: $\forall x \in X$, $V(x) = \{V \subset X \,/\, V$ es entorno de x en $(X,T)\}$

"sistema de entornos de x"

Prop: (X,T) e.t. $\forall x \in X$, $V(x)$ es el sistema de entornos de x en (X,T). Entonces:

a) $\forall U \in V(x) \Rightarrow x \in U$

b) $\forall U, V \in V(x) \Rightarrow U \cap V \in V(x)$

c) $\forall U \in V(x)$, $\exists V \in V(x)$ t.q. $\forall y \in V$, $U \in V(y)$

d) $\forall U \in V(x)$, $V \subset X$, $U \subset V \Rightarrow V \in V(x)$

Prop: Sea $x \neq \emptyset$ conjunto. $\forall x \in X$, $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(x)$ cumpliendo a) b) c) y d)

Entonces $\exists!\, T$ topología para X t.q. $\forall x \in X$, el sistema de entornos de x en (x, T) es $\mathcal{V}(x)$

Dem: Sea $T = \{G \subset X \mid \forall x \in G,\ G \in \mathcal{V}(x)\}$

1) $\emptyset \in T$, $X \in T$ por d)

2) $\forall G_1, G_2 \in T$, $\forall x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow x \in G_i$ $i = 1, 2$, $\Rightarrow G_i \in \mathcal{V}(x)$

$\Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in T$.

3) $\forall \{G_j\}_{j \in J} \subset T$, $\forall x \in \bigcup_{j \in J} G_j \Rightarrow x \in G_{j_0}$ con $j_0 \in J \Rightarrow$

$\Rightarrow G_{j_0} \in \mathcal{V}(x) \underset{d)}{\Rightarrow} \bigcup_{j \in J} G_j \in \mathcal{V}(x)$

Luego T es topología.

Prop: $\forall x \in X$ y $S \subset X$, S entorno de x en $(x, T) \Leftrightarrow S \in \mathcal{V}(x)$

$\Rightarrow]$ S entorno de x en $(x, T) \Rightarrow \exists G \in T$, $x \in G \subset S \Rightarrow$

$G \in \mathcal{V}(x) \underset{d)}{\Rightarrow} S \in \mathcal{V}(x)$

$\Leftarrow]$ $S \in \mathcal{V}(x)$. Sea $U = \{y \in X \,/\, S \in \mathcal{V}(y)\}$ y $x \in U$.

$\forall y \in U \Rightarrow S \in \mathcal{V}(y) \underset{a)}{\Rightarrow} y \in S$

$\forall y \in U$, $S \in \mathcal{V}(y) \underset{c)}{\Rightarrow} \exists W \in \mathcal{V}(y)$ t.q. $\forall z \in W$, $S \in \mathcal{V}(z)$

$\Rightarrow z \in U \Rightarrow W \subset U \underset{d)}{\Rightarrow} U \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow U \in T$.

Argumento para la unicidad:

Si hubiera dos top. T y T' definidas ambas por $\mathcal{V}(x)$

$\forall G \neq \emptyset$, $G \in T$, $\forall x \in G \Rightarrow \exists U \subset \mathcal{V}(x)$, $x \in U \subset G$

$\Rightarrow \exists G' \in T'$ con $x \in G' \subset U$ $\Big\}$ $T \subset T'$ $\underset{\substack{\text{Análogo} \\ T' \subset T}}{\Rightarrow}$ $T = T'$

Def: (X, T) e.t. y $\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{P}(X)$. Se dirá que $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de x en (X, T) si $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ y $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists B \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $B \subset U$.

Ejemplo:

1) El sistema de entornos de x es una base de entornos de x.

2) $\mathcal{B}(x) = \{ \mathring{U} \mid U \subset \mathcal{V}(x) \}$ base de entornos de x.

3) $\mathcal{B}(x) = \{ B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0 \}$ base de ent. de x en (X, T_d)

4) $\mathcal{B}(x) = \{ [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \,/\, \varepsilon > 0 \}$ base de ent. de x en $(\mathbb{R}, T_u)$

Prop: Sea (X, T) e.t. y $\mathcal{B}(x)$ base de entornos de x en (X, T).

1) $\forall B \in \mathcal{B}(x)$, $x \in B$

2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x)$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

3) $\forall B \in \mathcal{B}(x)$, $\exists B' \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $\forall y \in B'$, $\exists B_1 \in \mathcal{B}(y)$ t.q. $B_1 \subset B$

Dem:

3) $B \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$

$\exists V \in \mathcal{V}(x)$ t.q. $\forall y \in V$, $B \in \mathcal{V}(y)$ $\underset{\uparrow \text{por def.}}{\Longrightarrow}$ $\exists B' \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $B' \subset V$

$\forall y \in B' \subset V$, $B \in \mathcal{V}(y)$ $\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}$ $\exists B_1 \in \mathcal{B}(y)$, $B_1 \subset B$.

Def: Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, $\mathcal{B} : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ que cumple 1) 2) y 3). Entonces $\exists!\, T$ topología sobre X t.q. $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x en (X, T) $\forall x \in X$.

Def: Sea (X,T) e.t. y $\mathcal{B}_1(x)$, $\mathcal{B}_2(x)$ bases de entornos de $x \in X$ en (X,T). Se dice que $\mathcal{B}_1(x)$ y $\mathcal{B}_2(x)$ son bases de entornos equivalentes

Inducen la misma topología.

Prop: Sea (X,T) e.t. $\forall x \in X$, $\mathcal{B}_1(x)$ y $\mathcal{B}_2(x)$ son bases de entornos de x. Entonces $\mathcal{B}_1(x)$ y $\mathcal{B}_2(x)$ son equivalentes sii $\forall B_1 \subset \mathcal{B}_1(x)$, $\exists B_2 \subset \mathcal{B}_2(x)$ t.q. $B_2 \subset B_1$ y $\forall B_2' \subset \mathcal{B}_2(x)$, $\exists B_1' \subset \mathcal{B}_1(x)$ t.q. $B_1' \subset B_2'$.

Dem: $\Rightarrow]$ $\forall B_i \in \mathcal{B}_i(x)$ $i=1,2$.
$\exists B_j \in \mathcal{B}_j(x)$ $j=1,2$.
$\exists A \in T$ t.q. $x \in A \subset B_i$
$\Big|$ t.q. $B_j \subset A \subset B_i$

$\Leftarrow]$ Sean T_1 y T_2 inducidas por $\mathcal{B}_1(x)$ y $\mathcal{B}_2(x)$. $\forall G_1 \in T$, $\forall x \in G_1$, $\exists B_1 \in \mathcal{B}_1(x)$ t.q. $x \in B_1 \subset G_1 \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}_2(x)$ t.q. $x \in B_2 \subset B_1 \Rightarrow \exists G_2 \in T_2$ t.q. $T_2 \subset T_1$

De la misma forma $T_1 \subset T_2 \Rightarrow T_1 = T_2$.

Def: Sea (X,T) e.t. y $x \in X$, $S \subset X$.

1) Se dice que x es un punto interior de S en (X,T) si $\exists U^x$ entorno de x en (X,T) t.q. $U^x \subset S$.

2) Se dice que x es un punto adherente de S en (X,T) si $\forall U^x$ ent. de x en (X,T), $U^x \cap S \neq \emptyset$

3) Se dice que x es un punto de acumulación de S en (X,T) si $\forall U^x$ ent. de x en (X,T), $(U^x \setminus \{x\}) \cap S \neq \emptyset$

4) Se dice que x es un punto frontera de S en (X,T) si $\forall U^x$ ent. de x en (X,T), $\begin{cases} U^x \cap S \neq \emptyset \\ U^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset \end{cases}$

5) Se dice que x es un punto aislado de S en (X,T) si $\exists U^x$ ent. de x en (X,T) t.q. $U^x \cap S = \{x\}$

Def: Sea (X,T) e.t. y $S \subset X$. Se llama conjunto derivado de S al espacio S' de todos los puntos de acumulación de S.

Prop: Sea (X,T) e.t.. $\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ base de ent. de x en (X,T):

1) $A \subset X$, $A \in T \Leftrightarrow \forall x \in A$, $\exists B \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $B \subset A$.

2) $C \subset X$, C cerrado en $(X,T) \Leftrightarrow \forall x \in X \setminus C$, $\exists B \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $B \cap C = \emptyset$

3) $S \subset X$, $\overset{\circ}{S} = \{x \in X \mid \exists B \in \mathcal{B}(x)$ con $B \subset S\}$.

4) $S \subset X$, $\bar{S} = \{x \in X \mid \forall B \in \mathcal{B}(x), B \cap S \neq \emptyset\}$

5) $S \subset X$, $Fr(S) = \{x \in X \mid \forall B \in \mathcal{B}(x), B \cap S \neq \emptyset$ y $B \cap (X \setminus S) \neq \emptyset\}$

Corolario: Sea (X,T) e.t. y $S \subset X$.

1) $\overset{\circ}{S} = \{x \in X \mid x$ punto interior de $S\}$

2) $\bar{S} = \{x \in X \mid x$ punto adherente de $S\}$

3) $Fr(S) = \{x \in X \mid x$ punto frontera de $S\}$.

Def: Sea (X,T) e.t. y $\mathcal{B} \subset T$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base de T si $\forall A \in T$, $\exists \mathcal{B}_A \in \mathcal{B}$ t.q. $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$. En este caso se dice que T está engendrada o generada por $\mathcal{B}$.

Obs: $\mathcal{B} \subset T$, $\mathcal{B}$ base de $T \Leftrightarrow \forall A \in T$, $\forall x \in A$, $\exists B \in \mathcal{B}$ t.q. $x \in B \subset A$

Ejemplo:

1) $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ base de T_u en $\mathbb{R}$.

2) $\{\{x\} \mid x \in X\}$ base de T_D de X $(\forall X \neq \emptyset)$

3) $\{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ base de T_d (metrizable).

Prop: Sea (X,T) e.t. y $\mathcal{B}\subset T$. Entonces $\mathcal{B}\subset T$ es base de T sii $\forall x\in X$

$\mathcal{B}_x = \{B\in\mathcal{B} / x\in B\}$ base de entornos de x.

Dem: $\Rightarrow]$ $\forall x\in X$, $\mathcal{B}_x\subset\mathcal{B}\subset T \Rightarrow \mathcal{B}_x\subset \mathcal{V}(x)$

$\forall U^x$ ent. de x en (X,T), $x\in \mathring{U}^x\in T \Rightarrow \exists B\in\mathcal{B}$ t.q.

$$x\in B\subset \mathring{U}^x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B\in\mathcal{B}_x \\ B\subset U^x \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}_x \text{ base de entornos. de } x \text{ en } (X,T)$$

$\Leftarrow]$ $\forall x\in X$, $\bigcup_{x\in X}\mathcal{B}_x = \mathcal{B}$. $\forall A\in T$, $\exists B\in\mathcal{B}_x$, $x\in B\subset A \Rightarrow \mathcal{B}$ base de

Prop: Sea $X\neq\emptyset$ un conjunto, $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{B}$ es base de X sii

a) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$

b) $\forall B_1,B_2\in\mathcal{B}$, $\forall p\in B_1\cap B_2$, $\exists B_3\in\mathcal{B}$ t.q. $p\in B_3\subset B_1\cap B_2$.

Dem: $\Rightarrow]$ a) Por definición de base.

b) $\mathcal{B}$ base de T topología $\Rightarrow \mathcal{B}\subset T$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall B_1,B_2\in\mathcal{B} \Rightarrow B_1\cap B_2\in T \\ \forall p\in B_1\cap B_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists B_3\in\mathcal{B} \text{ t.q. } p\in B_3\subset B_1\cap B_2$$

$\Leftarrow]$ Sea $T=\{\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \mid \mathcal{F}\in\mathcal{P}(\mathcal{B})\}$. Veamos que es topología:

1) $\emptyset = \bigcup_{B\in\emptyset} B$, $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$

$\in T$

2) $\{\bigcup_{B\in\mathcal{F}_j} B \mid j\in J\}\subset T$

Entonces $\bigcup_{j\in J}\bigcup_{B\in\mathcal{F}_j} B = \bigcup_{B\in\mathcal{F}_j} B\in T$.

3) $(\bigcup_{B\in\mathcal{F}_1} B)\cap(\bigcup_{B\in\mathcal{F}_2} B) = \bigcup_{\substack{B_1\in\mathcal{F}_1\\ B_2\in\mathcal{F}_2}}(B_1\cap B_2)\in T$

Def: Sea (X,T) e.t. e $\mathcal{S} \subset T$. Se dice que $\mathcal{S}$ es una subbase de T si la familia de todas las intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{S}$ es una base para T. En ese caso se dice que T está generada o engendrada por $\mathcal{S}$.

Ejemplo:

1) $\{(\leftarrow, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \rightarrow) \mid b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}$ subbase de T_u en $\mathbb{R}$.

2) los semiplanos abiertos de $\mathbb{R}^2$ son subbase de T_u en $\mathbb{R}^2$.

Prop: Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{S}$ es subbase de alguna topología sobre X sii $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S = X$

Dem: $\Rightarrow$) $\mathcal{S}$ subbase de $T \Leftrightarrow$ la familia de las $\cap$ finitas es una base $\mathcal{B}$ de T.

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X \underset{\substack{\uparrow \\ \forall B \in \mathcal{B},\ \exists S_B \in \mathcal{S} \text{ t.q. } B \in S_B}}{\Rightarrow} \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S = X$$

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{B} = \{\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S \mid \mathcal{F} \in \mathcal{P}_F(\mathcal{S})\} \supset \mathcal{S} \underset{\text{hip.}}{\Rightarrow}$

a) por $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$ (hip).

b) por $\forall B_i \in \mathcal{B}$ $i=1,2$, $B_i = \bigcap_{S\in\mathcal{F}_i} S$

$\mathcal{F}_i \in \mathcal{B}_F(\mathcal{S})$

$$B_1 \cap B_2 = \left(\bigcap_{S\in S_1} S\right) \cap \left(\bigcap_{S\in S_2} S\right) = \bigcap_{S\in\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \ni S'} (S \cap S')$$

Def: Sea (X,T) e.t. y $S\subset X$, $S\neq\emptyset$. Se llama topología relativa de T a S a $T|_S = \{A\cap S \mid A\in T\}$

El par $(S, T|_S)$ se llama subbespacio topológico.

Prop: Sea (X,T) e.t. y $S\subset X$, $S\neq\emptyset$.

1) $C\subset S$, $C\in T|_S \Leftrightarrow \exists A\in T$ t.q. $C = A\cap S$.

2) $C\subset S$, C cerrado de $(S,T|_S) \Leftrightarrow \exists F$ cerrado de (X,T) t.q. $C = F\cap S$.

3) $\forall x\in S$, $V\subset S$. V es ent. de x en $(S,T|_S) \Leftrightarrow \exists U$ ent. de x en (X,T) t.q. $V = U\cap S$.

4) $C\subset S$, $\bar{C}^S = \bar{C}^X\cap S$.

5) $\mathcal{B}$ base de $T \Rightarrow \{B\cap S \mid B\in\mathcal{B}\}$ base de $T|_S$.

Dem:

3) $\Rightarrow]$ V ent. de x en $(S,T|_S)$

$\exists A\in T|_S$ t.q. $x\in A\subset V$

Sea $U = G\cup V$ ent. de x en (X,T) $\Rightarrow \exists C_A\in T$ t.q. $A = C_A\cap S$, $x\in A\subset G$.

$\Rightarrow U\cap S = (G\cup V)\cap S = A\cup(V\cap S) = A\cup V \underset{\overset{\uparrow}{A\subset V}}{=} V$

$\Leftarrow]$ Aplicando 1).

4) $C\subset S$, $\bar{C}^S = \underset{\substack{F \text{ cerrado} \\ F\supset C}}{\bigcap F} = \underset{\substack{F^* \text{cerrado en } (X,T) \\ F^*\supset C}}{\bigcap (F^*\cap S)} = \underset{\substack{F^* \text{cerrado en } (X,T) \\ F^*\supset C}}{(\bigcap F^*)\cap S} = \bar{C}^X\cap S$

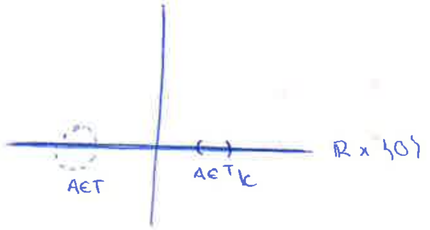
5) $\left.\begin{array}{l} \forall A\in T|_S,\ \exists G\in T \text{ t.q. } A = G\cap S \\ \exists B\in\mathcal{B} \text{ t.q. } G = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_c} (B\cap S)$.

Obs: S subespacio de (X, T) $C \subset S$ $\Big\}$ $\text{int}_S(C) \neq \text{int}_X(C) \cap S$

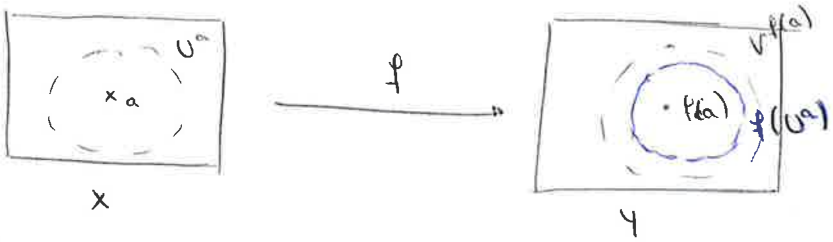
Ejemplo Sea $(\mathbb{R}^2, T_u)$

$S = C = \mathbb{R} \times \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \text{int}_C(C) = C \\ \text{int}_{\mathbb{R}^2}(C) = \emptyset \end{cases}$



Def: Sea (P) una propiedad de e.t.. Se dice que (P) es hereditaria si ∀ e.t. que cumpla (P), todos sus subespacios cumplen (P).

Def: Sea (X, T) e (Y, S) e.t. y $f: X \longrightarrow Y$ aplicación, $a \in X$.
Se dice que $f: (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ es continua en a si $\forall V^{f(a)}$ ent. de $f(a)$, $\exists U^a$ ent. de a en (X, T) t.q. $f(U^a) \subset V^{f(a)}$.



Se dice que $f: (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ es continua si lo es $\forall a \in X$.

Prop: Sean (X, T) e (Y, S) e.t. y $f: X \longrightarrow Y$. Son equivalentes:

a) $\forall A \in S$, $f^{-1}(A) \in T$

b) $f: (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ continua.

c) $\forall C \subset X$, $f(\bar{C}^X) \subset \overline{f(C)}^Y$

d) $\forall F \subset Y$, $\overline{f^{-1}(F)}^X \subset f^{-1}(\bar{F}^Y)$

e) $\forall F$ cerrado de (Y, S), $f^{-1}(F)$ cerrado de (X, T)

$f^{-1}(A)$ antimagen de A
$f^{-1}(A) = \{a \mid f(a) \in A\}$
IMAGEN INVERSA

Dem:

a) ⇒ b) | $\forall a \in X$, $\forall V^{f(a)}$ ent. de $f(a)$ en (Y, S) $\Rightarrow \mathring{V}^{f(a)} \in S$
$\Rightarrow f^{-1}(\mathring{V}^{f(a)}) = U \ni a$

$f(U) = f(f^{-1}(\overset{\circ}{V}^{f(a)})) \subset \overset{\circ}{V}^{f(a)} \subset V^{f(a)}$

$a \in \overline{C}$, $\forall U^a$ ent. de a
en (X,T), $a \in U^a \cap C$
$\Rightarrow$ $f(a) \in f(U^a) \cap f(C)$
front. $\subset V^{f(a)}$
$\Rightarrow f(a) \in \overline{f(C)}$

$\forall a \in \overline{C}^X$, ¿$f(a) \in \overline{f(C)}^Y$?

$\forall V^{f(a)}$ ent. de $f(a)$ $\underset{b)}{\Rightarrow}$ $\exists U^a$ t.q. $f(U^a) \subset V^{f(a)}$

$\exists z \in U^a \cap C \neq \emptyset \Rightarrow f(z) \in V^{f(a)}$

$f(z) \in f(C)$

$\underline{e) \not\Rightarrow d)}$ | $F \subset Y$, $f(\overline{f^{-1}(F)}^X) \subset \overline{f(f^{-1}(F))}^Y$

?

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(F)}^X \subset f^{-1}(\overline{F}^Y)$

$\underline{d) \Rightarrow e)}$ | F cerrado de (Y,S)

$\overline{f^{-1}(F)}^X \subset f^{-1}(\overline{F}^Y) = f^{-1}(F)$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(F)}^X = f^{-1}(F) \Leftrightarrow f^{-1}(F)$ cerrado.

$\underline{e) \Rightarrow a)}$ | $\forall A \in S \Leftrightarrow Y \setminus A$ cerrado de (Y,S) $\underset{e)}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(Y \setminus A)$ cerrado de $(X,T) \Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(Y \setminus A) \in T$

$\underline{\subset}$ | $x \in X \setminus f^{-1}(Y \setminus A) \Rightarrow x \in f^{-1}$

$\Rightarrow f(x) \notin Y \setminus A \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$

$\underline{\supset}$ | $x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$

$f(x) \notin Y \setminus A \Rightarrow x \notin f^{-1}(Y \setminus A) \Rightarrow x \in X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)$

Ejemplos:

1) $\forall (X,T)$ e.t. $\underline{I_X} : (X,T) \longrightarrow (X,T)$ es continua.

2) $\forall (X,T)$ e (Y,S) e.t. $\forall y_0 \in Y$ $\underline{C_{y_0}} : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ es cont.
$y \longrightarrow y_0$

Prop: Sean (X,T), (X',T') y (X'',T'') e.t. y $f : (X,T) \longrightarrow (X',T')$
$g : (X',T') \longrightarrow (X'',T'')$ ap. continuas. Entonces $g \circ f$ es continua.

Dem: $\forall A'' \in T'' \underset{g \text{ cont.}}{\Rightarrow} g^{-1}(A'') \in T' \underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow} \underbrace{f^{-1}(g^{-1}(A'')) = (g \circ f)^{-1}(A'')}_{\in T}$

$\Rightarrow g \circ f$ es continua.

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $S \subset X$, $f : (X,T) \longrightarrow (X',T')$ apli. continua. Entonces $f|_S : (S, T|_S) \longrightarrow (X',T')$ es ap. cont.

Dem: $\forall A' \in T'$: $(f|_S)^{-1}(A') = f^{-1}(A') \cap S \in T|_S \Rightarrow$ ap. cont.

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f: (X,T) \longrightarrow (X',T')$ ap. cont. Entonces $f : (X,T) \longrightarrow (f(X), T'|_{f(X)})$ es ap. cont.

Dem: $\forall G' \in T'|_{f(X)}$: $\exists A' \in T'$ t.q. $G' = A' \cap f(X) \Rightarrow$

$f^{-1}(G') \overset{}{\underset{\uparrow}{=}} f^{-1}(A') \in T$.

$f^{-1}(A' \cap f(X)) = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A') \cap X = f^{-1}(A')$

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f: X \longrightarrow X'$ ap.

$\{A_j\}_{j \in J} \subset T$ t.q. $f|_{A_j}$ cont. $\forall j \in J$. (respectivamente $F_1, \dots, F_n$ $[F_1, F_2]$ cerrados de (X,T) t.q. $f|_{F_1}$, $f|_{F_2}$ ap. cont.)

Entonces: $f : (X,T) \longrightarrow (X',T')$ cont.

Dem: $\forall A' \in T'$, $(f|_{A_j})^{-1}(A') \in T|_{A_j}$ $\forall j \in J$

$(f|_{A_j})^{-1}(A') = f^{-1}(A') \cap A_j$

$\Rightarrow f^{-1}(A') = \bigcup_{j \in J} (f^{-1}(A') \cap A_j) \in T$

$\Rightarrow \exists G \in T$ t.q. $f^{-1}(A') \cap A_j = G \cap A_j \in T$ $A_j \in T$

Análogamente para cerrados.

Def: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f: X \longrightarrow X'$ ap. Se dice que $f : (X,T) \longrightarrow (X',T')$ es ap. abierta si $\forall A \in T$, $f(A) \in T'$

Def: Se dice que $f : (X,T) \longrightarrow (X',T')$ es <u>ap. cerrada</u> si $\forall C$ cerrado de (X,T), $f(C)$ cerrado de (X',T')

Obs:

$$\begin{tikzcd} \text{ap. abierta} \arrow[rr, phantom, "\not\Leftrightarrow"] \arrow[dr, phantom, "\not\Updownarrow"] & & \text{ap. cerrada} \arrow[dl, phantom, "\not\Updownarrow"] \\ & \text{ap. continua} & \end{tikzcd}$$

No se da ninguna implicación.

Def: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f : X \longrightarrow X'$ ap. Se dice que f es <u>homeomorfismo</u> de (X,T) en (X',T') si f ap. biyectiva, continua y f^{-1} continua.

Def: Se dice que dos espacios son <u>homeomorfos</u> si $\exists$ homeomorfismo entre ellos.

Def: i … t. es un <u>invariante topológico</u> … mple en todos los e.t. homeomorf.

Un homeomorf. nos da una correspondencia biyectiva entre todas las colecciones de conjuntos abiertos (o cerr) de X y X'

Toda prop. que se defina completamente en términos de T será un invariante top. ya que se mantendrá en X' por homeomorfismos

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f : X \longrightarrow X'$ ap. Son equivalentes:

a) f es homeomorfismo.

b) f es biyección, continua y abierta.

c) f biyección, continua y cerrada.

Dem: $a \Rightarrow b$ | f homeomorfismo.

$\forall A \in T \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ cont. } f^{-1} \text{ continua}}}{\Rightarrow} (f^{-1})^{-1}(A) \in T' \Rightarrow f$ cont. y abierta.

$b \Rightarrow a$ | $f : (X,T) \longrightarrow (X',T')$

$\forall A \in T : (f^{-1})^{-1}(A) \in T$ f es ap. abierta $\Rightarrow f^{-1}$ cont.

a) $\Leftrightarrow$ c)

$\forall C \in \mathcal{C}_T$

$(f^{-1})^{-1}(C) \in \mathcal{C}_{T'}$

$\quad\shortparallel$

$f(C) \Rightarrow \begin{cases} f \text{ cerrada} \\ f^{-1} \text{ continua} \end{cases}$

Def: Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ familia de conjuntos distintos no vacíos. Se llama <u>topología producto</u> a:

$$\prod_{j\in J} X_j = \{ x : J \longrightarrow \bigcup_{j\in J} X_j \text{ ap.} \mid x(j) \in X_j \ \forall j \in J \}$$

Def: $\forall j \in J$ la ap. $p_j : \prod X_j \longrightarrow X_j$ se llama proyección.

$$x \longrightarrow x(j)$$

Si $X_j = X \quad \forall j \in J$: $X^J = \prod_{j\in J} X_j = \{ x_i : J \longrightarrow X \mid x \text{ ap.} \}$

Axioma de elección: $\forall \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ familia de conjuntos distintos no vacíos distintos dos a dos, $\exists B \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ t.q. $B \cap A_\lambda$ tiene un solo elemento $\forall \lambda \in \Lambda$.

Def: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia no nula de e.t.. Se llama topo. producto a la top. sobre $\prod_{j\in J} X_j$ y que tiene como subbase $\{p_j^{-1}(U_j) \mid U_j \in T_j,\ j \in J\}$

Se denotará $\prod_{j\in J} T_j$. El par $(\prod X_j, \prod T_j)$ se llama e.t. producto.

Obs: Una base de $\prod_{j\in J} T_j$ es $\mathcal{B} = \{ \bigcap_{j\in F} p_j^{-1}(U_j) \mid F \in \underbrace{\mathcal{P}_F(J)}_{F\subset J \text{ y } F \text{ finito}},\ U_j \in T_j \} =$

$= \{ \prod_{j\in J} A_j \mid A_j \in T_j \ \forall j \in J,\ A_j = X \ \forall j \in J \setminus F \text{ finito} \}$

Ejemplo:

1) Si J finito. $\mathcal{B} = \{ \prod_{j\in J} A_j \mid A_j \in T_j \ \forall j \in J \}$

2) Si J infinito, T_j top. discreta $\forall j \in J$ y card $X_j > 1$ $(\forall j \in J)$, entonces la top. producto no es discreta.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia no nula de e.t. Entonces $\forall j_0 \in J$

$p_{j_0} : (\prod X_j, \underbrace{\prod T_j}_{\text{top. producto}}) \longrightarrow (X_{j_0}, T_{j_0})$ suprayectiva, continua y abierta.

Dem: p_{j_0} suprayectiva.

$\forall j_0 \in J$, p_{j_0} continua.

$\forall A \in \prod_{j\in J} T_j$, $A = \bigcup_{s\in S} B_s$, $B_s \in \mathcal{B}$ $\forall s \in S$ base de T_j.

$$P_{j_0}(B_s) \in T_{j_0} \Rightarrow P_{j_0}(A) = \bigcup_{s\in S} P_{j_0}(B_s) \in T_{j_0}$$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia no nula de e.t. Entonces la top. prod. es la más débil de las top. sobre $\prod_{j\in J} X_j$ que hacen continuas todas las proyecciones.

Dem: Sea T top. sobre $\prod_{j\in J} X_j$, $p_{j_0} : (\prod X_j, \underset{\overset{\shortparallel}{T}}{\prod T_j}) \longrightarrow (X_{j_0}, T_{j_0})$ continua $\forall_{j_0} \in J$.

$\Rightarrow P_{j_0}^{-1}(U_{j_0}) \in T \quad \forall U_{j_0} \in T_{j_0}$

$\forall j_0 \in J \Leftrightarrow \{p_j^{-1}(U_j) \mid U_j \in T_j$ $T_j \subset T$

No todas las top. en $\prod X_j$ hacen continua la proyecc.
En concreto, la top. prod.
sí

Prop: propiedad universal de la top. producto.

Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia no nula de e.t. y (X, T) e.t.

$f : ~~X~~ \longrightarrow \prod_{j\in J} X_j$ ap. Entonces $f : (X, T) \longrightarrow (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} T_j)$ continua

sii $\forall j \in J$, $p_j : f_j(X, T) \longrightarrow (X_j, T_j)$ continua

$\Rightarrow]$ $j_0 \in J$ $p_{j_0} \circ f : (X, T) \to (X_{j_0}, T_{j_0})$
continua (comp. de continuas)
$\Rightarrow f_j = p_{j_0} \circ f$ continua
$\forall j \in J$

$\Leftarrow]$ Fácil

$$\forall j \in J, \ \forall U_j \in T_j \quad (p_j \circ f)^{-1}(U_j) = f^{-1}(\underbrace{p_j^{-1}(U_j)}_{f^{-1}(S) \in T \Leftrightarrow f \text{ cont}}) \in T$$

$\forall S \in \mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) \mid U_j \in T_j \ j \in J\}$ subbase de $\prod_{j\in J} T_j$

Def: Sea (P) una propiedad de un e.t. Se dice que (P) es multiplicativa (= producto) si $\forall$ familia de e.t. cumpliendo (P), su producto cumple (P).

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia distinta del vacío de e.t. y (X,T) e.t. y $f_j : X \longrightarrow X_j$ ap. $\forall j \in J$. Entonces la ap.

$$(f_j)_{j\in J} : (X,T) \longrightarrow (\prod X_j, \prod T_j) \quad \text{es continua sii } \forall j\in J,\ f_j \text{ cont.}$$
$$x \longrightarrow (f_j)_{j\in J}(x) := (f_j(x))_{j\in J}$$

Dem: $\forall j_0 \in J$ fijo : $p_{j_0} : (f_j)_{j\in J}$.

⇒] fácil.

⇐] por la prop. universal de la top. producto.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ y $\{(X'_j, T'_j)\}_{j\in J}$ familias no nulas de e.t. y $f_j : X_j \longrightarrow X'_j$ ap $\forall j\in J$. Entonces la ap.

$$\prod_{j\in J} f_j : (\prod X_j, \prod T_j) \longrightarrow (\prod X'_j, \prod T'_j)$$
$$(x_j)_{j\in J} \longrightarrow (\prod f_j)(x_j)_{j\in J} := (f_j(x_j))_{j\in J}$$

es continua sii $\forall j \in J$, f_j continua.

Dem: $\forall j_0 \in J$

$$\begin{tikzcd} \prod X_j \arrow[r, "\prod f_j"] \arrow[d, "p_{j_0}"'] & \prod X'_j \arrow[d, "p'_{j_0}"] \\ X_{j_0} \arrow[r, "f_{j_0}"] & X'_{j_0} \end{tikzcd}$$

$\prod X_j \xrightarrow{\prod f_j} \prod X'_j \xrightarrow{p'_{j_0}} X'_{j_0}$

$\shortparallel$

$\prod X_j \xrightarrow{p_{j_0}} X_{j_0} \xrightarrow{f_{j_0}} X'_{j_0}$

$\Rightarrow p'_{j_0} \circ (\prod f_j) = f_{j_0} \circ p_{j_0}$

⇐] por la prop. universal de la top. producto.

⇒] $\forall U'$

⇒] $(X,T) \xrightarrow{(f_j)_{j\in J}} (\prod X_j, \prod T_j)$

$\downarrow p_j$ continua $\forall j$

(X_j, T_j)

$\Rightarrow f_j = p_j \circ (f_j)_{j\in J}$ continua $\forall j \in J$

yecciones son supraeyectivas y abiertas.

$\in \prod_{j\in J} T_j$

$p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(U'_{j_0}))$

$_{j_0}$)) $\in T_j$

$\shortparallel$

$f_{j_0}^{-1}(U'_{j_0}) \Rightarrow f_{j_0}$ continua.

Prop: Si $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. y $\varphi : J \longrightarrow J$ biyección entonces $\left(\prod_{j\in J} X_{\varphi(j)}, \prod_{j\in J} T_{\varphi(j)}\right)$ y $\left(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} T_j\right)$ son homeomorfos.

(salvo homeomorfismo, hay conmutatividad en el producto).

Dem: Sea $\varphi : \left(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} T_j\right) \longrightarrow \left(\prod_{j\in J} X_{\varphi(j)}, \prod_{j\in J} T_{\varphi(j)}\right)$ biyectiva..

$$(x_j)_{j\in J} \longrightarrow (y_j)_{j\in J} := (x_{\varphi(j)})_{j\in J}$$

φ continua: la prop. univ. de la top. producto.

φ^{-1} continua: "

Def: Sea (X,T) e.t. e Y conjunto, $f: X \longrightarrow Y$ ap. Se llama topología cociente inducida por f a la topología sobre Y.

$$T_f = \{G \subset Y \mid f^{-1}(G) \in T\}$$

El par (Y, T_f) se llama espacio cociente respecto a f.

Def: Sea (X,T) e (Y,S) e.t. y $f: X \longrightarrow Y$. Se dice que f es una identificación si f es suprayectiva y S es la top. cociente inducida por f.

Prop: Sea (X,T) e.t. e Y conjunto. $f: X \longrightarrow Y$ ap. La top. inducida por f es la más fina de las top. sobre Y que hacen continuas a f.

Dem: Sea S top. sobre Y, $f: (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ continua.

$$\Rightarrow \forall A \in S,\ f^{-1}(A) \in T \Rightarrow A \in T_f \Rightarrow S \subset T_f.$$

Prop: propiedad universal de la topología cociente.

Sean (X,T) e.t., Y conjunto y $f: X \longrightarrow Y$ ap

(Z,S) e.t. y $g: Y \longrightarrow Z$ ap.

Entonces $g: (Y, \underset{\uparrow}{T_f}) \longrightarrow (Z,S)$ continua $\Leftrightarrow g\circ f : (X,T) \longrightarrow (Z,S)$ cont.

La continuidad de la f se da al tener la top. cociente así que siempre se va a cumplir (no hay que pedirla).

Dem: $\Rightarrow|$ Fácil. Composición de ap. continuas es continua.

$\Leftarrow|$ $\forall G \in S \quad \underset{\substack{\| \\ f^{-1}(g^{-1}(G))}}{(g\circ f)^{-1}}(G) \in T \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ continua}}}{\Rightarrow} g^{-1}(G) \in T_f \Rightarrow g$ continua

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f:(X,T) \to (X',T')$ ap. supray. continua y abierta.(respectivamente cerrada). Entonces f es identificación.

Dem: $f:(X,T) \longrightarrow (X',T') \left|\begin{array}{l}\text{continua}\\ \text{suprayectiva}\end{array}\right. \Rightarrow T' \subset T_f$

Supongamos f ap. abierta: $\forall A \in T_f$, $f^{-1}(A) \in T \Rightarrow$
$f(f^{-1}(A)) \in T$

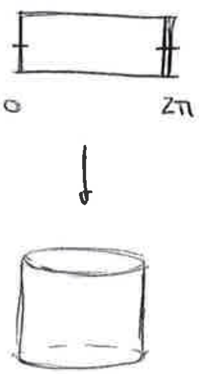
$T_f \subset T'$ y $T' \subset T_f$.

Def: Sea (X,T) e.t. y R relación de equivalencia en X, $p: X \longrightarrow X/R$ proyección canónica. Se llama topología cociente respecto a R a la topología sobre X/R.

P se denotará T/R

Ejemplo:

1) $X=[0,1]$, $R: 0 \equiv 1 \Rightarrow X/R \underset{\substack{\uparrow\\ \text{homeomorfo}}}{\approx} S^1$

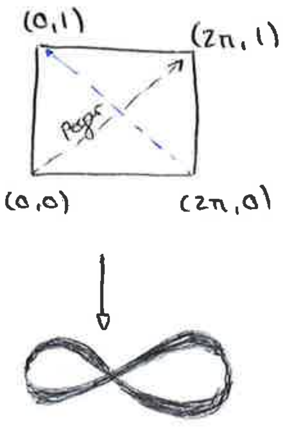
2) 

$X=[0,2\pi]\times[0,1]$

$R: (0,y) \equiv (2\pi, y)$

$X/R \equiv$ cilindro

3)

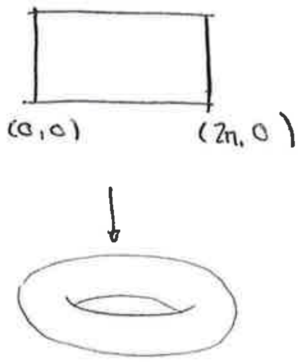


$X = [0, 2\pi] \times [0,1]$

$\mathcal{R} : (0,y) \equiv (2\pi, 1-y)$

${}^{X}/_{\mathcal{R}} \equiv$ banda de Möbius.

4)



$X = [0, 2\pi] \times [0, y]$

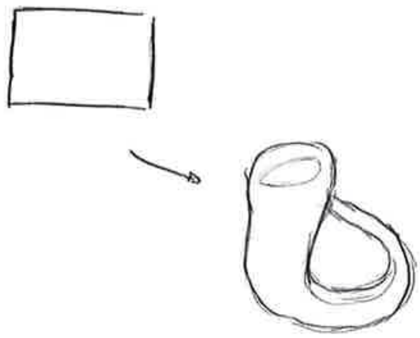
$$\mathcal{R} : \begin{cases} (0,y) \equiv (2\pi, y) \\ (x,0) \equiv (x,1) \end{cases}$$

${}^{X}/_{\mathcal{R}} \equiv$ toro

5) $X = [0, 2\pi] \times [0,1]$

$$\mathcal{R} : \begin{cases} (0,y) \equiv (2\pi, y) \\ (x,0) \equiv (2\pi - x, 1) \end{cases}$$

${}^{X}/_{\mathcal{R}} \equiv$ botella de klein



6) $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$p : X \longrightarrow {}^{\mathbb{R}}/_{P_n}$ → espacio proyectivo real de dim n.

Prop: Sean (X,T), (X',T'), (X'',T'') e.t. y $f : (X,T) \longrightarrow (X',T')$ $g : (X',T') \longrightarrow (X'',T'')$ identificadores. Entonces $g \circ f : (X,T) \longrightarrow (X'',T'')$ es identificador.

Dem: f, g supraproyectiva ⇒ $g \circ f$ supraproyectiva.

$$\forall A'' \in T'' \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ ident.}}}{\Longleftrightarrow} g^{-1}(A) \in T' \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ ident.}}}{\Longleftrightarrow} f^{-1}(g^{-1}(A'')) \in T \Rightarrow T' = T_{g \circ f}$$

Prop Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ identif.

Entonces f ap. abierta sii $\forall A\in T$, $f^{-1}(f(A))\in T$

$f^{-1}(f(A))\in T$ sii $f(A)\in T'$ (i.e. si f abierta). □

f ap. cerrada sii $\forall C$ cerrado, $f^{-1}(f(C))$ cerrado de (X,T)

Prop Sean (X,T), (X',T'), (X'',T'') y (X''',T''') e.t. y

$f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ y $f':(X'',T'')\longrightarrow(X''',T''')$ identif. y

$g: X\longrightarrow X''$ ap.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f'"] \\ X' \arrow[r, "\hat{g}"'] & X''' \end{tikzcd}$$

t.q. si $f(x)=f(y) \Rightarrow f'(g(x))=f'(g(y))$

Entonces a) $\exists!\ \hat{g}: X'\longrightarrow X'''$ ap. t.q. $f'\circ g=\hat{g}\circ f$

b) $g:(X,T)\longrightarrow(X'',T'')$ continua $\Rightarrow \hat{g}$ ap. continua.

Dem: a) $\hat{g}: X'\longrightarrow X'''$

$\hat{g}(x') := f'(g(x))$ bien def $\forall x\in f^{-1}(x')$

$\Rightarrow \hat{g}$ ap. y $\hat{g}\circ f = f'\circ g$

b) g continua $\Rightarrow f'\circ g$ continua $\Rightarrow f'\circ g=\hat{g}\circ f \underset{\uparrow}{\Rightarrow}$

$\hat{g}$ continua.

prop. universal top. cociente

Prop Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ ap. suprayectiva y continua. R_f relación de equivalencia. Si

Def: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t.. Se llama topología suma a la topología sobre $\sum_{j\in J} X_j = \bigcup_{j\in J} X_j \times \{j\}$

$$\sum_{j\in J} T_j = \{G \subset \sum_{j\in J} X_j \mid j_k^{-1}(G) \subset T_j, \forall j \in J\}$$

donde $j_k : X_k \longrightarrow \sum_{j\in J} X_j \quad \forall k \in J$.

El par $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} T_k)$ $\forall k \in J$ es llamado e.t. suma.

Obs: $j_k : X_k \longrightarrow X_k \times \{k\}$ es un homeomorfismo $\forall k \in J$

$x \longrightarrow j_k := (x, k)$

$j_k^{-1}(x,k) = x = p_1(x,k)$ Proyección primera.

Obs: $\forall k \in J$, $\forall C \in S$, $j_k^{-1}(C) = p_1(C \cap (X_k \times \{k\}))$

Prop: La top. suma es la más fina de las topologías sobre $\sum_{j\in J} X_j$ que hacen continuas todas las proyecciones.

Dem: Sea T la top. sobre $\sum_{j\in J} X_j$.

$\forall k \in J$, $\forall j \in J$: $j_k : (X_k, T_k) \longrightarrow (\sum_{k\in J} X_k, T)$ continua

$\Rightarrow \forall A \in T$, $j_k^{-1}(A) \in T_k$ $\forall k \in J \Rightarrow T \subset \sum_{j\in J} T_j$

Prop: propiedad universal de la topología suma.

Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t. y (X, T) e.t.

$f : \sum_{j\in J} X_j \longrightarrow X$. Entonces $f : (\sum_{j\in J} X_j, \sum_{j\in J} T_j) \longrightarrow (X, T)$ e.t. continua

sii $\forall k \in J$, $f j_k : (X_k, T_k) \longrightarrow (X, T)$ continua.

Dem: $\Rightarrow$| Fácil.

$\Leftarrow$| $\forall G \in T$, $(f \circ j_k)^{-1}(G) \in T_k \quad \forall k \in J$

$$\begin{aligned} &\quad \| \\ & j_k^{-1}(f^{-1}(G)) \Rightarrow f^{-1}(G) \in \sum_{k \in J} T_k \Rightarrow \end{aligned}$$

f ap. continua.

Def: Sea (P) una propiedad de e.t. Se dice que (P) es aditiva si $\forall$ familia de e.t. cada uno de ellos cumple (P), entonces el e.t. suma cumple (P).

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que es T_0 si $\forall x,y \in X$ $x \neq y$, $\exists$ un entorno de alguno de ellos que no contiene al otro. (esp. Kolmogórov).

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que es T_1 si $\forall x,y \in X$ $x \neq y$, $\exists$ un entorno de cada uno de ellos que no contiene al otro. (esp. Fréchet).

Obs: $T_1 \Rightarrow T_0$, $T_0 \not\Rightarrow T_1$

$X = \{a,b\}$, $T = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

$\exists \{a\}$ entorno de a y $b \notin \{a\}$ pero $\nexists$ entorno de b que no contenga a a $\Rightarrow T_0 \not\Rightarrow T_1$

Prop: Sea (X,T) e.t. Son equivalentes:

a) (X,T) es T_1

b) $\forall x \in X$, $\{x\}$ cerrado.

c) $\forall E \subset X$, E es la intersección de todos los abiertos que lo contienen.

Dem: a) $\Rightarrow$ b)| $\forall x \in X$, $\forall y \in X \setminus \{x\} \Rightarrow x \neq y \Rightarrow \exists U^y$ t.q. $x \notin U^y \Rightarrow U^y \subset X \setminus \{x\} \Rightarrow X \setminus \{x\} \in T \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x\}$ cerrado en (X,T).

b) ⇒ c) | $\forall E \subset X$: • $E = X$

• $E \neq X$, $\forall x \in X \setminus E \underset{b)}{\Rightarrow} E \subset X \setminus \{x\} \in T$

$\Rightarrow E \subset \bigcap_{x \notin E} (X \setminus \{x\}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{De Morgan}}}{=} E$

$E \subset \bigcap_{\substack{G \in T \\ E \subset G}} G \subset \bigcap_{x \notin E} (X \setminus \{x\}) = E \Rightarrow E = \bigcap_{G \subset E} G$

c) ⇒ a) | $\forall x, y \in X$, $x \neq y \underset{c)}{\Rightarrow} \{x\} = \bigcap_{\substack{U \in T \\ x \in U}} U \Rightarrow \exists U^x \in T$ t.q. $U^x \ni x \wedge U^x \not\ni y$

Análogamente : $\exists V^y$ t.q. $x \notin V^y \wedge y \in V^y$

$\Rightarrow X$ es T_1 .

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que es T_2 si $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists U^x, U^y$ entornos disjuntos (Hausdorff).

Obs: $T_2 \Rightarrow T_1$, $T_1 \not\Rightarrow T_2$

Prop: Sea (X,T) e.t. Entonces (X,T) es T_2 sii $\Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$ cerrado en $(X \times X, T \times T)$ (la diagonal es cerrada).

Dem: ⇒ | $\forall (x,y) \in X \times X \setminus \Delta = \{x \neq y\} \Rightarrow \exists U^x, U^y$ ent. de x e y en $(X,T) \Rightarrow U^x \times U^y$ ent. de (x,y) en $(X \times X, T \times T)$

$U^x \times U^y \subset X \times X \setminus \Delta \Rightarrow X \times X \setminus \Delta \in T \times T \Rightarrow \Delta$ cerrado en $(X \times X, T \times T)$

⇐ | $\forall x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow (x,y) \in X \times X \setminus \Delta \in T \times T \Rightarrow$ $\exists W^{(x,y)} \subset X \times X \setminus \Delta \Rightarrow \exists U^x, U^y$ t.q. $U^x \times U^y \subset W^{(x,y)}$ $\subset X \times X \setminus \Delta \underset{z)}{\Rightarrow} U^x \cap U^y = \emptyset$ si $\exists z \in U^x \cap U^y \Rightarrow$ $(z,z) \in W^{(x,y)}$, $(z,z) \in \Delta$ abierto.

Corolario: Sean (X,T) y (Y,S) e.t., (Y,S) es T_2 y $f:(X,T) \longrightarrow (Y,T)$ continua. Entonces

$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ es cerrado en $(X,T)\times(Y,S)$ gráfica de f.

Dem: Δ_Y (diagonal Y) cerrado en $(Y,S)\times(Y,S)$

f continua $\Rightarrow$ $(f, f_y) : (X,T)\times(Y,S) \longrightarrow (Y,S)\times(Y,S)$
$(x, f(x)) \longrightarrow (f(x), f(x))$
continua. $\Rightarrow G_f = (f, f_y)^{-1}(\Delta)$ cerrado en $(X,T)\times(Y,S)$

Prop: Sean (X,T) y (Y,S) e.t., (Y,S) es T_2 y $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ ap. continua. Entonces $E = \{(x_1,x_2)\in X\times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $(X,T)\times(X,T)$.

Dem: $\forall (z_1, z_2) \in X\times X \setminus E \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2) \Rightarrow \exists U^{f(z_1)}, U^{f(z_2)}$ disjuntos $\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ cont.}}}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(U^{f(z_i)})$ $i=1,2$, entorno de z_i en (X,T)

$\underset{\substack{\in \\ (z_1,\, z_2)}}{f^{-1}(U^{f(z_1)}) \times f^{-1}(U^{f(z_2)})} \subset X\times X\setminus E \Rightarrow E$ cerrado.

Prop: Sean (X,T) y (Y,S) e.t., $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ ap. suprayectiva y abierta y $E = \{(x_1,x_2)\in X\times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ cerrado en $(X,T)\times(X,T)$. Entonces (Y,S) es T_2.

Dem: $\forall y_1, y_2 \in Y$ t.q. $y_1 \neq y_2$, $\exists x_i \in X$ t.q. $f(x_i) = y_i \Rightarrow$ $(x_1,x_2) \notin E$ y $\exists U^{x_1}, U^{x_2}$ t.q. $U^{x_1}\times U^{x_2} \subset X\times X\setminus E$ $\underset{f \text{ ab.}}{\Rightarrow}$ $f(U^{x_i})$ ent. de y_i. Si $f(U^{x_1}) \cap f(U^{x_2}) \neq \emptyset \Rightarrow t = f(z_i)$ y $z_i \in U^{x_i} \Rightarrow (z_1,z_2)\in E \Rightarrow U^{x_1}\times U^{x_2} \subset E$ ↯

Prop: Sean (X,T) y (Y,S) e.t., Y es T_2 y $f,g: X \to Y$ ap. continuas. Entonces $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

Dem: $(f,g): X \longrightarrow Y \times Y$ ap. continua
Y es $T_2 \Leftrightarrow \Delta$ cerrado en $Y \times Y$ $\Big\} \Rightarrow (f,g)^{-1}(\Delta_Y)$ cerrado en X.

Corolario: Sean X, Y e.t., Y T_2 y $f,g: X \longrightarrow Y$ ap. continua. Entonces si f, g coinciden en los puntos de un conjunto denso de X, $f = g$.

Dem: $\exists D$ denso de X. $f|_D = g|_D \Rightarrow D \subset \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$
$= E$ cerrado $\Rightarrow \bar{D} = X = \bar{E} \subset E \Rightarrow f = g$.

Obs: Las propiedades T_1, T_2 y T_0 son invariantes topológicos.

Prop: Todo subespacio de un e.t. T_2 es T_2. (Hausdorff hereditario).

Dem: (X,T) e.t. T_2. $\emptyset \neq E \subset X$

$\forall x, y \in X \Rightarrow \exists U^x, U^y$ ent. de (X,T) disjuntos $\Rightarrow$ $U^x \cap E$, $U^y \cap E$ disjuntos

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t.. Entonces $(\prod X_j, \prod T_j)$ es T_2 $\Leftrightarrow$ $\forall j \in J$ (X_j, T_j) es T_2.

Dem: $\Rightarrow|$ $\forall j_0 \in J$, $\forall (a_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j$

$E_{j_0} = \{(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j \mid x_j = a_j \ \forall j \in J \setminus \{j_0\}\} \cap X_j$
$\wr\wr$
(X_{j_0}, T_{j_0})

$\Leftarrow|$ $\forall x, y \in \prod_{j \in J} X_j$, $x \neq y \Rightarrow \exists j_0 \in J$, $x_{j_0} \neq y_{j_0} \overset{\text{hip.}}{\Rightarrow}$

$\exists U^x, U^y$ disjuntos $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in p_{j_0}^{-1}(U^{xp}) \\ y \in e\, p_{j_0}^{-1}(U^{yp}) \end{array} \right.$ disjuntos.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ es T_2 sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es T_2.

Dem: $\underline{\Rightarrow}|$ $\forall j_0 \in J$, $(X_{j_0}, T_{j_0}) \approx X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j\in J} X_j$

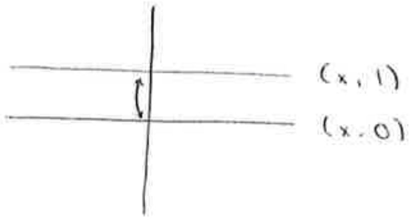
$\underline{\Leftarrow}|$ $\forall x, y \in \sum_{j\in J} X_j$, $x \neq y \Rightarrow \begin{cases} \exists j_0 \in J \text{ t.q. } x, y \in X_j \times \{j_0\} \approx X_{j_0} \\ \exists j_1 \in J \text{ t.q. } x \in X_{j_1} \times \{j_1\} \ \ y \in X_{j_2} \times \{j_2\} \end{cases}$

$\Rightarrow p_0(x), p_1(x)$ tienen entornos disjuntos en (X_p, T_p)

$\Rightarrow x, y$, tienen entornos disjuntos en $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$

Obs: El cociente de un e.t. T_2, no es necesariamente T_2.

$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$



$(X, T_u|_X)$

$R = (x, 0) \doteq (x, 1) \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(X/_R, T_u/_R)$ no es T_2 $\qquad p: X \longrightarrow X/_R$

$p(0,0) \neq p(0,1)$

$\forall U^{p(0,0)}, U^{p(0,1)}$ entornos de $p(0,0)$, $p(0,1)$ en $(X/_R, T_u/_R)$

$p^{-1}(U^{p(0,0)})$, $p^{-1}(U^{p(0,1)})$ son entornos de $(0,0)$ y $(0,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \subset p^{-1}(U^{p(0,0)}) \\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } (-\delta, \delta) \times \{1\} \subset p^{-1}(U^{p(0,1)}) \end{cases} \Rightarrow U^{p(0,0)} \cap U^{p(0,1)} \neq \emptyset$

Def: Sea (X, T) e.t. Diremos que es regular si $\forall x \in X$ y $\forall C$ cerrado en (X, T), $x \notin C$, $\exists U, V$ abiertos disjuntos t.q. $x \in U$ y $C \subset V$

Diremos que es T_3 si es regular y T_0

Prop: Regular + T_0 $\Leftrightarrow$ Regular + T_1 $\Leftrightarrow$ Regular + T_2.

__Dem__: __$\Rightarrow$__ | $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists U$ entorno de y t.q. $x \notin U$

$\Rightarrow X \setminus U$ cerrado, $y \notin X \setminus U$ $\Rightarrow$ $\exists V_1, V_2 \in T$ disjuntos

t.q. $y \in V_1$ y $x \in X \setminus U \subset V_2$ $\Rightarrow$ X es T_2.

__Obs__: $T_3 \Rightarrow T_2$.

__Obs__: $T_2 \not\Rightarrow T_3$, regular $\not\Rightarrow T_2$.

Prop: Sea (X,T) e.t. Son equivalentes:

a) (X,T) regular.

b) $\forall x \in X$, $\forall U$ abierto, $x \notin U$; $\exists V$ abierto t.q. $x \in V \subset \bar{V} \subset U$

c) $\forall x \in X$ tiene una base de entornos cerrados en (X,T).

__Dem__: __a) $\Rightarrow$ b)__ | $x \in U \in T$ $\Rightarrow$ $x \notin X \setminus U$ $\overset{\Rightarrow}{x \in V_1}$

$\exists V_1, V_2 \in T$ disjuntos, $x \in U \subset V_4$. $\Rightarrow$

$V_1 \subset X \setminus V_2 \Rightarrow \bar{V}_1 \subset X \setminus V_2 \subset U$

__b) $\Rightarrow$ c)__ | $\forall x \in X$, $\{\bar{V} \mid V \in T, x \in V\}$ base de entornos cerrados de x.

__c) $\Rightarrow$ a)__ | $x \notin C$ cerrado $\Rightarrow$ $x \in X \setminus C \in T$ $\Rightarrow$ V ent. cerrado de x t.q. $V \subset X \setminus C$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathring{V} \in T \\ C \subset X \setminus V \end{array} \right.$ disjuntos.

__Obs__: La regularidad y ser T_3 son invariantes topológicos.

Prop: Sea (X,T) e.t. regular (resp. T_3), $E \subset X$ $E \neq \emptyset$, entonces $(E, T|_E)$ es regular (resp T_3).

Dem: $\forall C$ cerrado de $(E, T|_E)$, $x \in E$ y $x \notin C \Rightarrow$

$\exists F$ cerrado de (X, T) t.q. $C = F \cap E$ $(x \notin F)$.

$\Rightarrow \exists U, V \in T$ disjuntos, $x \notin U$ y $F \subset V$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in U \cap E \\ C \subset V \cap E \end{cases} \in T|_E \text{ (disjuntos).}$$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ es T_3 (resp. regular) sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es T_3 (resp. regular).

Dem: $\Rightarrow$ | Fácil.

$\Leftarrow$ | $\forall x \in \bigcap_{j \in J} X_j$, $\forall U^x$ ent. de $x \Rightarrow \exists \overset{\in \mathcal{B}}{B}$ base de ΠT_j con

$x \in B \subset U^x$, $B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$ con $U_{j_k} \in T_{j_k}$ $\forall k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \forall k = 1, \dots, n$ $x_{j_k} \in U_{j_k} \in T_{j_k} \Rightarrow \forall k$ $\exists V^{x_{j_k}}, V^{y_{j_k}} \subset U_{j_k}$

entornos cerrados t.q. $x \in \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(V^{x_{j_k}}) \subset B \subset U^x$

Obs: El cociente de un e.t. T_3 no es necesariamente regular.

$(\mathbb{R}, T_u)$ es T_3: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \mid \varepsilon > 0\}$ es base de entornos cerrados de x.

$x, y \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y :\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{Q} \\ \text{ó} \\ x = y \end{cases}$

$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathcal{R}$ proyección canónica.

$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{[\mathbb{Q}]\} \cup \{[x] \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

$p^{-1}([x]) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } [x] = [\mathbb{Q}] \\ \{x\} & \text{si } [x] \neq [\mathbb{Q}] \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $[x]$ cerrado en $(\mathbb{R}/\mathbb{Q}, T_u/\mathbb{Q})$

$\forall U, V \in T_u/\mathbb{Q}$, $[\mathbb{Q}] \in U$ y $[x] \in V \Rightarrow \mathbb{Q} \in p^{-1}(U)$ y

$x \in p^{-1}(V) \in T_n \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.q. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in p^{-1}(U)$

$\Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V) \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$.

Def: Sea (X,T) e.t. Diremos que es completamente regular si $\forall x \in X$ y $\forall C$ cerrado de (X,T), $x \notin C$, $\exists f: (X,T) \longrightarrow [0,1]$ continua.

$$\begin{array}{rcl} x & \longrightarrow & 0 \\ C & \longrightarrow & \{1\} \end{array}$$

Diremos que es T_{3a} si es completamente regular y T_1.

Obs: completamente regular $\Leftrightarrow \forall x \in X$, $\forall C$ cerrado, $x \notin C$, $\exists g: (X,T) \to [0,1]$ continua

$$\begin{array}{rcl} x & \longrightarrow & 1 \\ C & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

$\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\forall x \in X$, $\forall C$ cerrado con $x \notin C$, $\exists h: (X,T) \to [a,b]$ continua.

$$\begin{array}{rcl} x & \longrightarrow & a \\ C & \longrightarrow & \{b\} \end{array}$$

Obs: Completamente regular $\Rightarrow$ regular

$T_{3a} \Rightarrow T_3$

$T_3 \not\Rightarrow T_{3a}$

Obs: Completamente regular $\not\Rightarrow T_1$

$X = \{a,b,c\}$, $T = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\} = \mathcal{C}_T$

$a \notin \underset{\text{cerrado}}{\{b,c\}}$, Sea $f: X \longrightarrow [0,1]$ continua. Completamente regular.

$$\begin{array}{rcl} a & \longrightarrow & 0 \\ b & \longrightarrow & 1 \\ c & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

y (X,T) no es T_1

ya que para $x = b$, $y = c$

$b \neq c$, $\forall U^b, U^c$ ent $(U^b = U^c = \{b,c\})$

$b \in U^c$ y $c \in U^b$

Prop: Todo e.t. metrizable es T_{3a}.

Dem: (X,T) e.t. y $T = T_d$ con d métrica.

$\forall x \in X$, $\forall C$ cerrado $C \neq \emptyset$ y $x \notin C \Rightarrow d(x,C) > 0$

Defino $g: X \longrightarrow [0, \to)$ continua

$$z \longrightarrow \frac{d(z,C)}{d(x,C)}$$

$\Rightarrow g(C) = \{0\}$ y $g(x) = 1$

$f(z) = \min\{g(z,1)\}$, f continua y $\begin{cases} f(x)=1 \\ f(C)=0 \end{cases}$

Obs: El ser completamente regular (o T_{3a}) son invariantes topológicos

Prop: Todo subespacio de un e.t. compl. regular (resp. T_{3a}) es compl. regular (resp. T_{3a}).

Dem: (X,T) comp. regular. $E \subset X$, C cerrado de $(E, T|_E)$ y $x \in E$, $x \notin C$

$\Rightarrow \exists F$ cerrado de (X,T) t.q. $C = F \cap E$ $(\Rightarrow x \notin F)$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Rightarrow}{\text{hip}} \exists f : (X,T) \longrightarrow [0,1] \text{ cont.} \\ \qquad x \longrightarrow 0 \\ \qquad F \longrightarrow \{1\} \end{array}\right\} \Rightarrow f|_E(x) = 0,\ f|_E(C) = \{1\}$$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t. Entonces $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ es compl. regular (resp. T_{3a}) sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es compl. regular (resp. T_{3a}).

Dem: $\Rightarrow|$ Fácil.

$\Leftarrow|$ $\forall x \in \prod_{j \in J} X_j$, $\forall C$ cerrado, $C \neq \emptyset$, de $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j \in J} T_j)$ y

$x \notin C \Rightarrow x \in \Pi X_j \setminus C \in \Pi T_j \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ (base de ΠT_j)

t.q. $x \in B \subset \Pi X_j \setminus C \Rightarrow B = \bigcap_{k=1}^{n} P_{j_k}(U_{j_k})$, $U_{j_k} \in T_{j_k}$ $\forall k = \overline{1,n}$

$\Rightarrow x_{j_k} \in U_{j_k} \in T_{j_k} \Rightarrow x_{j_k} \notin X_{j_k} \setminus$ $\quad \overset{\Rightarrow}{\text{hip}} \forall k$

$$\begin{array}{l} \exists f_k : (X_{j_k}, T_{j_k}) \longrightarrow [0,1] \text{ continua} \\ \qquad x_{j_k} \longrightarrow 0 \\ \qquad X_{j_k} \setminus U_{j_k} \longrightarrow \{1\} \end{array} \quad \Rightarrow \forall z \in \Pi X_j \text{ continua } f(z) := \max\{f_k\}_{j_k}$$

$\Rightarrow f(x) = 0$, $\forall z \in C \Rightarrow z \notin B \Rightarrow \exists k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, $z_{j_{k_0}} \notin U_{k_0}$

$\Rightarrow f_{k_0}(z_{j_k}) = 1 \Rightarrow f(z) = 1 \Rightarrow f(C) = \{1\}$.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\sum X_j, \sum T_j)$ es compl. regular (resp. T_{3a}) sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) compl. regular (resp. T_{3a}

Dem: $\Rightarrow$ | por homeomorfismos.

$\Leftarrow$ | $\forall x \in \sum_{j\in J} X_j$, $\forall C$ cerrado, $C \neq \emptyset$, de $(\sum_{j\in J} X_j, \sum_{j\in J} T_j)$ y $x \notin C$. $\Rightarrow \exists!\, j_0 \in J$ t.q. $x \in X_{j_0} \times \{j_0\}$

$C \cap (X_{j_0} \times \{j_0\})$ cerrado en $X_{j_0} \times \{j_0\}$

Si $C \cap (X_{j_0} \times \{j_0\}) = \emptyset$. Sea $f_{j_0} : X_{j_0} \times \{j_0\} \to [0,1]$

Sea $f : (\sum X_j, \sum T_j) \longrightarrow [0,1]$ y $\begin{cases} f|_{X_{j_0}\times\{j_0\}} := f_{j_0} \\ f|_{X_{j_0}\times\{j\}} := 1 \end{cases}$

$\forall j \in J \setminus \{j_0\}$

$\Rightarrow f$ continua y $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(C) = \{1\} \end{cases}$

Obs: El cociente de un e.t. T_{3a} no es necesariamente compl. regular.

$(\mathbb{R}, T_u)$ T_{3a} y $(\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}, T_u/_{\mathbb{Q}})$ no c. regular.

Def: Sea (X, T) un e.t. Diremos que es normal si $\forall C_1, C_2$ cerrados de (X,T) disjuntos, $\exists U_i \in T$ disjuntos $i = 1,2$ t.q. $C_i \subset U_i$.

Diremos que es T_4 si es normal y T_1.

Prop: Todo e.t. metrizable es T_4.

Dem: Sea (X,T), $T = T_d$. $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X,T)

Si $C_1 = \emptyset$, sea $U_1 = \emptyset$ y $U_2 = X$.

Si $C_1, C_2 \neq \emptyset$: $\begin{cases} \forall x \in C_1, \ \exists \varepsilon_x > 0, \ B_{\varepsilon_x}(x) \cap C_2 = \emptyset \\ \forall y \in C_2, \ \exists \varepsilon_y > 0, \ B_{\varepsilon_y}(x) \cap C_1 = \emptyset \end{cases}$

$C_1 \subset \bigcup_{x\in C_1} B_{\frac{\varepsilon}{3}x}(x)$, $C_2 \subset \bigcup_{y \in C_2} B_{\frac{\delta}{3}y}(y)$

Comprobemos que son disjuntos.

Si $\exists z \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \begin{cases} z \in B_{\frac{\varepsilon}{3}x_0}(x_0) \text{ para algún } x_0 \in C_1 \\ z \in B_{\frac{\delta}{3}y_0}(y_0) \text{ para algún } y_0 \in C_2 \end{cases}$

$\Rightarrow d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0) < \frac{\varepsilon}{3}x_0 + \frac{\delta}{3}y_0$

$\Rightarrow y_0 \in B_{\varepsilon x_0}(x_0)$ $\lightning$ $\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Lema de Jones: Sea (X, T) e.t. Si $\exists D$ denso en (X,T) y $\exists E$ cerrado en (X,T) t.q. $(E, T_{|E})$ discreto y $\operatorname{card} E \geq 2$ $\Rightarrow (X,T)$ no es normal.

Prop: Sea (X,T) e.t. Son equivalentes:

a) (X,T) normal.

b) $\forall C$ cerrado y $\forall U$ abierto. $C \subset U$, $\exists V$ abierto t.q. $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$

c) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X,T), $\exists G_1 \in T$ con $C_1 \subset G_1$ t.q. $\overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$

d) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X,T), $\exists G_i \in T$ $i = 1, 2$. t.q. $C_i \subset G_i$ y $\bigcap_{i=1}^{2} \overline{G_i} = \emptyset$

Dem: a)$\Rightarrow$b) | $C \subset U \in T \Rightarrow C$ y $X \setminus U$ cerrados disjuntos de (X,T)

$\underset{a)}{\Rightarrow} \exists V_1, V_2 \in T$ disjuntos t.q. $C \subset V_1$ y $X \setminus U \subset V_2$

$\Rightarrow C \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset \underset{\text{cerrado}}{X \setminus V_2} \subset U$

b)$\Rightarrow$c) | $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de $(X,T) \Rightarrow$

$C_1 \subset X \setminus C_2 \in T \Rightarrow \exists G_1 \in T$ t.q. $C_1 \subset G_1 \subset \overline{G_1}$
$\subset X \setminus C_2$

$\Rightarrow \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$

c)$\Rightarrow$d) | $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de $(X,T) \underset{c)}{\Rightarrow} \exists G_1 \in T$ t.q. $C_1 \subset G_1$ y $\overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset \underset{c)}{\Rightarrow} \exists G_2 \in T$ t.q. $C_2 \subset G_2$ y $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$

Obs: La normalidad y ser T_4 es invariante topológico.

Prop: Sea (X,T) e.t. normal (resp. T_4) y E cerrado de (X,T), $E\neq\emptyset$, entonces $(E, T|_E)$ es normal (resp. T_4).

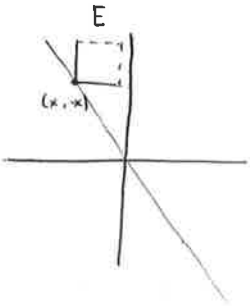
Dem: $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de $(E, T|_E)$ $\underset{E\text{ cerr.}}{\Rightarrow}$ C_1, C_2 cerrados de (X,T) $\Rightarrow$ $\exists U_i \in T$ disjuntos $i=1,2$ t.q. $C_i \subset U_i$ $\Rightarrow$ $C_i \subset U_i \cap E \in T|_E$ disjuntos.

Obs: El producto de dos e.t. normales no es necesariamente normal.

$\underset{\text{normal}}{(\mathbb{R}, T(\mathcal{B}))}$ $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \text{ y } a<b\}$ recta de Sorgenfrey.

$T(\mathcal{B})^2$ top. producto.

$E = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ cerrado en $(\mathbb{R}^2, T(\mathcal{B})^2)$ y $\operatorname{card} E = \operatorname{card} \mathbb{R}$



$T(\mathcal{B})^2\Big|_E$ es la top. discreta pues la intersección de E con $[a,b)$ es un sólo punto.

$\mathbb{Q}^2$ conjunto numerable denso en $(\mathbb{R}, T(\mathcal{B}))^2$ $\underset{\text{lema de Jones}}{\Rightarrow}$ $(\mathbb{R}, T(\mathcal{B}))^2$ no es normal.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia de e.t. $\neq\emptyset$. Entonces $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ es normal (resp. T_4) sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es normal (resp. T_4).

Dem: $\Rightarrow|$ Fácil.

$\Leftarrow|$ $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ $\Rightarrow$ $\forall k \in J$ $C_1 \cap (X_k \times \{k\})$ y $C_2 \cap (X_k \times \{k\})$ cerrados disjuntos de $(X_k \times \{k\}) \cong (X_k, T_k)$ $\Rightarrow$ $\exists U_{k_1}, U_{k_2} \in T$ t.q. $\forall k \in J$, $C_i \cap (X_k \times \{k\}) \subset U_{k_i} \times \{k\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 \subset \bigcup_{k\in J} U_{k_1} \times \{k\} \subset \sum_{k\in J} T_k \\ C_2 \subset \bigcup_{k\in J} U_{k_2} \times \{k\} \subset \sum_{k\in J} T_k \end{cases} \text{disjuntos.}$$

Prop: Sea (X,T) e (Y,S) e.t. y $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ ap. suprayectiva continua y cerrada. Si (X,T) es normal (resp. T_4), entonces (Y,S) también lo es.

Dem: $\forall C_1, C_2$ cerrados, de (Y,S) $\underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(C_1)$, $f^{-1}(C_2)$ cerrados disjuntos de (X,T) $\Rightarrow \exists U_i \in T$ $i=1,2$ disjuntos t.q.

↑ disjuntos

$f^{-1}(C_i) \subset U_i$ $\underset{f \text{ cerrada}}{\Rightarrow}$ $Y \setminus f(X \setminus U_i) \in S$ $i=1,2$. y $C_i \subset Y \setminus f(X \setminus U_i)$

$X \setminus U_i$ cerr $\Rightarrow f(X \setminus U_i)$ cerr.

Veamos que son disjuntos: $[Y \setminus f(X \setminus U_1)] \cap [Y \setminus f(X \setminus U_2)] =$

$= Y \setminus [f(X \setminus U_1) \cup f(X \setminus U_2)] = Y \setminus f((X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)) =$

$= Y \setminus f(X \setminus (U_1 \cap U_2)) = Y_i \setminus f(X) \underset{f \text{ sup}}{=} Y \setminus Y = \emptyset$

(X,T) T_4, $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ t.q. $f(x) = y$

$\{x\}$ es cerrado en (X,T) $\underset{f \text{ cont}}{\Rightarrow}$ $f(\{x\}) = \{y\}$ cerrado en (Y,S)

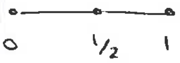
$\Rightarrow (Y,S)$ T_4.

Lema de Urysohn: Sea (X,T) e.t. (X,T) es normal sii $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X,T), $\exists f:(X,T) \longrightarrow [0,1]$ continua t.q. $f(C_1) = \{0\}$ y $f(C_2) = \{1\}$

Dem: $\Rightarrow \rvert$ (X,T) normal. $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X,T). Sea $J = \{\frac{k}{2^n} : k \in \{1, \dots, 2^n\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$

$\forall z \in J : \exists H_z \subset X$ t.q. $\begin{cases} 1) \ H_0 = C_1, \quad H_1 = X \setminus C_2 \\ 2) \ \forall z, z' \in J, \ z < z' \\ \qquad \overline{H_z} \subset \overset{\circ}{H}_{z'} \end{cases}$

$J_0 = \{0,1\}$



$J_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$J_n = \{\frac{k}{2^n} : k \in \{0,1,2^n\}$, $J_n \subset J_{n+1}$ y $n \in \mathbb{N}\cup\{0$

dem → Hacemos inducción sobre n:

$n = 0$, $J_0 = \{0,1\}$ y $H_0 = C_1 = \overline{C_1} = \overline{H_0}$

$H_1 = \overset{\circ}{H_1} = X - C_2 \in T$

$\overline{H_0} \subset \overset{\circ}{H_1}$

Supongamos que se cumple para $p = n-1$.

Sea $p = n$. $\forall z \in J_p \Rightarrow z = \dfrac{k}{2^p}$

$\rightarrow k$ par : $k = 2k' \Rightarrow z = \dfrac{2k'}{2^p} = \dfrac{k'}{2^{p-1}} \in J_{p-1}$

$\rightarrow k$ impar : $s = \dfrac{k-1}{2^p} < \dfrac{k+1}{2^p} = t$, $s, t \in J_{p-1}$

$\exists H_s, H_t$ cumpliendo 1) y 2) t.q.

$\overline{H_s} \subset \overset{\circ}{H_t} \in T \underset{(X,T) \text{ normal}}{\Rightarrow} \exists H_z \in T$ t.q. $\overline{H_s} \subset H_z \subset$
$\overline{H_z} \subset H_t$

Ya tenemos lo anterior demostrado :

$$f : X \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longrightarrow \begin{cases} \inf \{z \in J \mid x \in \overline{H_z}\} & \text{si } x \notin C_2 \ (\Rightarrow x \in C_1) \\ 1 & \text{si } x \in C_2 . \end{cases}$$

Si $x \in C_1$: $H_0 \subset \overline{H_0} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(C_1) = \{0\}$

$\forall x_0 \in X$ t.q. $f(x_0) \in [0,1]$:

1^er^ CASO : $0 < f(x_0) < 1$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists s, t \in J$ t.q. $f(x_0) - \varepsilon < t < f(x_0) + \varepsilon$

porque J es denso en $[0,1]$
↑

$\Big[\forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{2^n} < \delta \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ t.q.
$\frac{k}{2^n} \in [\ x - \delta , x + \delta] \in J \Big]$

Por una parte $t < f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin \overline{H_t}$ (si $x_0 \in \overline{H_t} \underset{\text{def}}{\Rightarrow} f(x_0) \leq t$)

$f(x_0) < s \Rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{H_s}$ ($f(x_0) = \inf \{ \dots \} < s$
$\Rightarrow \exists j \in J$ t.q. $x_0 \in \overline{H_j}$ y $j < s$
$\Rightarrow \overline{H_j} \subset \overset{\circ}{H_s}$)

$\Rightarrow (X \setminus \bar{M}_t) \cap \mathring{M}_s = V^{x_0}$ (entorno abierto de x_0).

$$\forall x \in V^{x_0} \begin{cases} x \in X \setminus \bar{M}_t \Rightarrow f(x) \geq t \Rightarrow \bar{M}_j \subset \mathring{M}_t \subset \bar{M}_t \\ x \in \mathring{M}_s \Rightarrow f(x) \leq s \Rightarrow f(V^{x_0}) \subset [t,s] \subset \end{cases}$$

$$[f(x_0) - \varepsilon , f(x_0) + \varepsilon]$$

⋮

SIN TERMINAR.

Corolario: $T_4 \Rightarrow T_{3a}$

Obs: $T_{3a} \not\Rightarrow T_4$ (T_{3a} es multiplicativa y T_4 no).

Teorema de extensión de Tietze: Sea (X,T) e.t. (X,T) normal sii $\forall C$ cerrado de (X,T) y $\forall f : (C, T|_C) \longrightarrow [-1,1]$ cont. $\exists F : (X,T) \longrightarrow [-1,1]$ cont. t.q. $F|_C = f$.

Prop: Sea (X,T) e.t. Son equivalentes:

a) (X,T) normal

b) $\forall C$ cerrado de (X,T) y $\forall g : (C, T|_C) \longrightarrow (-1,1)$ cont., $\exists \hat{g} : (X,T) \longrightarrow (-1,1)$ continua t.q. $\hat{g}|_C = g$

c) $\forall C$ cerrado de (X,T) y $\forall h : (C, T|_C) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $\exists \hat{h} : (X,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua t.q. $\hat{h}|_C = h$.

Dem: a) $\Rightarrow$ b) | C cerrado de (X,T), $g : C \longrightarrow (-1,1) \subset [-1,1]$ continua. $\underset{\text{Tma Tietze}}{\Rightarrow} \exists \bar{g} : (X,T) \longrightarrow [-1,1]$ t.q. $\bar{g}|_C = g$

$\rightarrow$ Si $\bar{g}(x) \subset (-1,1) \Rightarrow \hat{g} = \bar{g}$

$\rightarrow$ Si $\bar{g}(x) \not\subset (-1,1) \Rightarrow \underbrace{\bar{g}^{-1}(\{-1,1\})}_{\overset{\shortparallel}{C_1}} \neq \emptyset$

y $C_1 \cap C = \emptyset \underset{\text{Lema de Urysohn}}{\Rightarrow} \exists h : (X,T) \rightarrow [0,1]$ cont.

t.q. $\begin{cases} h(C_1) = \{0\} \\ h(C) = \{1\} \end{cases}$

Sea $\hat{g} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\tilde{g}(x) := \bar{g}(x)\, h(x)$

$\tilde{g}$ continua.

$\tilde{g}|_C = g$

b) ⇒ c) $(\mathbb{R}, T_u) \cong (a,b)$

c) ⇒ a) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X, T)

$\Rightarrow C_1 = \emptyset$ ✓

$\Rightarrow C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow C_1 \cup C_2 \neq \emptyset$ cerrado.

$g : (C_1 \cup C_2, T|_{C_1 \cup C_2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$C_1 \longrightarrow \{-1\}$

$C_2 \longrightarrow \{1\}$

$\Rightarrow \exists \hat{g} : (X, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ cont. t.q. $\hat{g}|_{C_1 \cup C_2} = g$

$\Rightarrow \hat{g}^{-1}((-1,0)) \in T$ y $\hat{g}^{-1}((0, \rightarrow)) \in T$

Def: Sea X conjunto $\neq \emptyset$. Diremos que X es numerable si $\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$

Def: Sea (X, T) e.t. Se verifica el Primer Axioma de Numerabilidad si cada punto de X tiene alguna base de entornos numerable.

Ejemplo:

1) $\forall X$ conjunto, (X, T_D) cumple el 1er Axioma.

$\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x.

2) $\forall X$ conjunto, (X, T) con T top. trivial cumple 1er Axioma, $\forall x \in X$

$V(x) = \{X\}$

Def: Sea (X, T) e.t. Se dice que verifica el Segundo Axioma de Numerabilidad si $\exists$ base numerable de T.

Obs: Todo espacio que verifica el II.A.N., verifica el I.A.N.

Obs: El recíproco es falso (e.t. discreto con cardinal no medible).

Prop: Todo subespacio de un e.t. que cumple I.A.N. (resp. II.A.N) cumple I.A.N. (resp. II A.N.).

Dem: a) $\forall U^x$ entorno de (X,T), $U^x \cap E$ entorno en $(E, T|_E)$

b) $\mathcal{B}$ base de $T \Rightarrow \{B \cap E \mid B \in \mathcal{B}\}$ base de $T|_E$.

Prop: Sean (X,T) y (Y,S) e.t., $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ suprayectiva continua y abierta. (X,T) cumple I.A.N (resp. II.A.N.) $\Rightarrow$ (Y,S) también lo cumple.

Dem: a) $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ t.q. $f(x) = y$

$\exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de entornos numerable $\underset{f \text{ abierta}}{\Rightarrow}$

$\mathcal{B}^x(y) = \{f(B_a^x) \mid a \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{V}(y)$

$\forall V^y \underset{f \text{ continua}}{\Rightarrow} \exists U^x$, $f(U^x) \subset V^y \Rightarrow \exists u_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$B^x_{u_0} \subset U^x \Rightarrow f(B^x_{u_0}) \subset V^y \Rightarrow \mathcal{B}^x(y)$ base de entornos numerable de y.

b) $\exists \mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de T numerable $\Rightarrow$

$\mathcal{B}^x = \{f(B_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset S$

$\forall G \in S \underset{f \text{ continua}}{\Rightarrow} f^{-1}(G) \in T \Rightarrow \exists \mathcal{B}_G \subset \mathcal{B}$ t.q.

$f^{-1}(G) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} B \underset{f \text{ supr.}}{\Rightarrow} G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} f(B)$

Corolario: I y II A.N. son invariantes topológicos.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t.. Entonces $(\prod X_j, \prod T_j)$ verifica el I A.N. (resp. II. A.N.) sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) verifica el I. A.N. (resp. II A.N.) y $\{j \in J \mid T_j \text{ no trivial}\}$ es numerable.

Dem:

⇒| $p_j : (\prod X_j, \prod T_j) \longrightarrow (X_j, T_j)$ suprayectiva, continua y abierta ⇒ (X_j, T_j) cumple I. A.N. (resp. II A.N.) $\forall j \in J$.

Sea $k = \{j \in J \mid T_j \text{ no trivial}\}$

a) $(\prod X_j, \prod T_j)$ verifica I. A.N.

$\exists a = (a_j)_{j\in J} \in \prod X_j$ y $\exists \mathcal{B}(a) = \{B_n^a \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de entornos de a.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n = \{j \in J \mid p_j(B_n^a) \neq X_j\}$ finito ⇒

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = H$ numerable $k \subset H$.

$\forall j \in k$, $T_j \neq \{\emptyset, X_j\}$ ⇒ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $p_j(B_n^a) \neq X_j$

⇒ $j \in H_{n_0} \subset H$

b) $(\prod X_j, \prod T_j)$ verifica II A.N.

$\exists \mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de $\prod_{j\in J} T_j$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $H_n = \{j \in J \mid p_j(B_n) \neq X_j\}$ finito ⇒

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = H$ numerable y $k \subset H$

$\{p_j(B_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de T_j : $\forall j \in k$,

$T_j \neq \{\emptyset, X_j\}$ ⇒ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $p_j(B_{n_0}) \neq X_j$

⇒ $j \in H_n \subset H$.

$\Leftarrow$] $K = \{ j \in J \mid T_j$ no trivial$\}$ numerable.

a) $\forall a \in \prod_{j\in J} X_j$, $\forall j \in J$ $\exists \mathcal{B}(a_j) = \{ B_n^{a_j} \mid n \in \mathbb{N} \}$ base numerable de ent. de a_j

Sea $\mathcal{B}(a) = \{ \prod_{j\in J} B_j \mid B_j \quad X_j \quad \forall j \in J \setminus F \quad F$ finito$\}$ base de ent. de a en $(\prod X_j , \prod T_j)$ numerable.

b) $\forall j \in J$, $\exists \mathcal{B}_j = \{ B_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ base numerable de T_j.

Sea $\mathcal{B} = \{ \prod_{j\in J} B_j \mid B_j = X_j \quad \forall j \in J \setminus F \quad F$ finito$\}$ base de $\prod T_j$ numerable.

Prop: Sea $\{(X_j , T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces:

a) $(\sum X_j , \sum T_j)$ verifica I A.N. sii $\forall j \in J$, (X_j , T_j) verifica I A.N.

b) $(\sum X_j , \sum T_j)$ verifica II A.N. sii $\forall j \in J$, (X_j , T_j) verifica II A.N. y J es medible.

Dem:

a) $\Rightarrow$]

$\Leftarrow$] $\forall x \in \sum X_j$, $\exists j_0 \in J$ t.q. $x \in X_{j_0} \times \{j_0\}$ $\Rightarrow$

$p_j(x)$ tiene una base de ent. numerable en (X_j , T_j)

$\Rightarrow$ x tiene una base de ent. numerable en $(\sum X_j , \sum T_j)$

b) $\Rightarrow$]

$\forall j \in J$, $X_j \times \{j\}$ es abierto en $(\sum X_j , \sum T_j)$

$\exists \mathcal{B}$ base numerable de $\sum T_j$ $\Rightarrow$ $\exists B_j \in \mathcal{B}$ t.q. $B_j \subset X_j \times \{j\}$ $\Rightarrow$ $\{ B_j \mid j \in J \} \subset \mathcal{B}$ $\Rightarrow$ J numerable

$\Leftarrow$] $\forall j \in J$, $\exists \mathcal{B}_j$ base numerable de T_j

Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{j\in J} \{ B \times \{j\} \mid B \in \mathcal{B}_j \}$ numerable y base de $\sum_{j\in J} T_j$

Prop: Sea (X, T) e.t. que verifica I. A. N. . $\forall x \in X$, $\exists \mathcal{B}(x) =$
$= \{B_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ t.q. $B_n^x \supset B_{n+1}^x$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dem: $\exists \{V_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ base numerable de x.

Sea $B_n^x = V_1^x \setminus \cap V_n^x \Rightarrow \{B_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de ent. y
$B_n^x \supset B_{n+1}^x$

Prop: Sea (X, T) que verifica I. A. N.

1) $H \subset X$ y $x \in X$. $x \in \overline{H} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ t.q. $(x_n) \longrightarrow x$

2) $H \subset X$ y $x \in X$. $x \in H' \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H \setminus \{x\}$ t.q. $(x_n) \longrightarrow x$

3) $H \subset X$. H cerrado $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$, $\lim (x_n) \in H$

4) $\forall (X', T')$ e.t. y $f : X \longrightarrow X'$. $f : (X, T) \longrightarrow (X', T')$ cont. en

$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $(x_n) \longrightarrow x \Rightarrow (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow f(x)$

Dem:

1) $\forall x \in X$, $\exists \{B_n^x\}_{n \in \mathbb{N}}$ base de ent. de x t.q. $B_n^x \supset B_{n+1}^x$

$\Rightarrow$| $x \in \overline{H}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_n^x \cap H \neq \emptyset$ $(x \in B_n^x \cap H)$

$\forall U^x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $B_{n_0}^x \subset U^x \Rightarrow B_n^x \subset U^x$

$\Leftarrow$| $\forall U^x$, $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in U^x \Rightarrow U^x \cap H \neq \emptyset$

Obs: Si (X, T) e.t. (no cumple I. A. N.)

$H \subset X$, $x \in X \Rightarrow x \in \overline{H} \not\Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ t.q. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$

Sea $(\mathbb{R}, T_{CN})$ y $H = (0, 1)$

Supongamos $(x_n) \subset X$ y $(x_n) \longrightarrow 0 \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall U^0$, $\exists n_0 \in N$ t.q.
$x_n \in U^{x_0}$. $\forall n > n_0 \Rightarrow \forall N$ numerable y $0 \notin N$
$\exists n_0 \in N$ t.q. $x_n \in \mathbb{R} \setminus N \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq m$, $x_n = 0 \Rightarrow (x_n) \not\subset (0,1)$

Si eso fuera falso:
$\forall n \in N$, $\exists n' \in \mathbb{N}$ t.q. $n' > n$ y $x_{n'} \neq 0$ numerable $\Rightarrow$
$\exists m \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in \mathbb{R} \setminus N_0$ $\forall n \geq m \Rightarrow x_n = 0$

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que es separable si $\exists D$ denso y numerable en (X,T).

[Separabilidad $\neq$ Separación]

Prop: Todo e.t. que cumpla II A.N. es separable

Dem: (X,T) cumple II A.N. $\Leftrightarrow$ $\exists \mathcal{B}$ base numerable de T $\Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in B_n$ t.q. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} := D$.

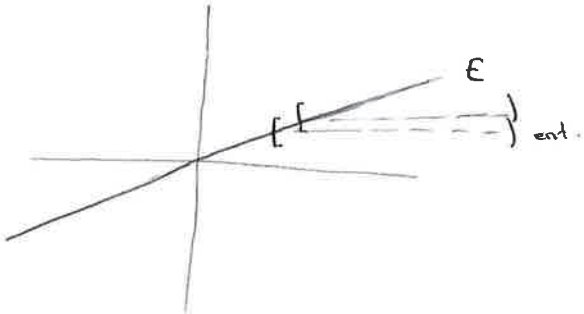
$\forall U \in T \setminus \{\emptyset\}$, $\exists B_{n_0} \in \mathcal{B}$ con $B_{n_0} \subset U \Rightarrow U \cap D \neq \emptyset$

Obs: Separable $\not\Rightarrow$ II A.N.

Sea $S = (\mathbb{R}, T(\mathcal{B}))$, $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}$ y $a<b\}$

Si S fuera II A.N. $\Rightarrow$ $S \times S$ cumple II A.N.

$\mathcal{E} = \{(x,u) \mid u \in \mathbb{R}\} \subset S \times S$ no cumple II A.N. ya que es no numerable y discreto.



Obs: Separable no es propiedad hereditaria.

$$\underset{\overset{\uparrow}{\text{no sep.}}}{\mathcal{E}} \subset \underset{\overset{\uparrow}{\text{sep.}}}{S \times S}$$

Prop: Todo subespacio abierto de un e.t. separable es separable.

Dem: (X,T) separable, $G \in T \setminus \{\emptyset\}$

$\exists D \subset X$ t.q. D denso y numerable en (X,T) $\Rightarrow$

$D \cap G \neq \emptyset$ numerable y denso en $(G, T|_G)$

$$\forall A \in T|_G \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow A \in T \setminus \{\emptyset\}$$

$$A \subset G$$

$$A \cap D \neq \emptyset$$

$$\parallel$$

$$A \cap (G \cap D)$$

Prop: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. Sea $f: (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ suprayectiva continua. Si (X,T) es separable, entonces (Y,S) también lo es.

Corolario: Ser separable es invariante topológico.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t. T_2 con card $X_j \geq 2$ $\forall j \in J$. $(\prod X_j, \prod T_j)$ separable sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) separable y card $J \leq 2$

Dem:

$\Rightarrow|$ $\forall j \in J$, $p_j : (\Pi X_j, \Pi T_j) \longrightarrow (X_j, T_j)$ suprayectiva y continua.

$\forall j \in J$, $\exists U_j, V_j \in T_j \setminus \{\emptyset\}$ y disjuntos

(X_j, T_j) es T_2 y card $X_j \geq 2$ por hipótesis.

$\exists D$ denso numerable en $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ t.q.

$$D_j := p_j^{-1}(U_j) \cap D \underset{*}{\neq} \emptyset \quad \forall j \in J$$

$$* \text{ Si } j, j' \in J,\ j \neq j' \Rightarrow \underbrace{p_j^{-1}(U_j) \cap p_{j'}^{-1}(U_{j'}) \cap p_{j'}^{-1}(V_{j'})}_{\in \ \Pi T_j \setminus \{\emptyset\}}$$

$$\Rightarrow D \cap p_j^{-1}(U_j) \cap p_j^{-1}(V_j') \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in D_j \\ x \notin D_{j'} \end{cases} \Rightarrow D_j \neq D_{j'}$$

$$\Rightarrow F : J \longrightarrow \mathcal{P}(D), \quad j \longmapsto D_j$$ aplicación inyectiva $\Rightarrow$ card $J \leq$

$\leq$ card $\mathcal{P}(D) = 2 \Rightarrow$ card $D \leq 2$.

$\Leftarrow|$ $\forall j \in J$, $\exists D_j = \{d_{j_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso en (X_j, T_j)

card $J \leq 2^{\aleph_0}$

Suponemos $J \subset [0,1]$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $\forall J_1, \dots, J_k$ segmentos de extremos racionales, disjuntos, centrados en $[0,1]$

$$P^{n_1, \dots, n_k}_{J_1, \dots, J_k} \in X_j$$

$$p_j := \begin{cases} d_{j n_i} & \text{si } j \in J_i \text{ para algún } i \in \{1, \dots, k\} \\ d_{j_1} & \text{si } j \notin J_i \ \forall i \in \{1, \dots, k\} \end{cases}$$

Sea $D = \{ p_{J_1 \dots J_k}^{n_1 \dots n_k}$ $\mid x \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}, J_1, \dots, J_k$ racio

numerable y $\subset \prod X_j$.

Vemos que es denso: $\forall U \in \prod T_j \setminus \{\emptyset\}, \exists B \in \mathcal{B}, B \neq \emptyset$ t.q. $B \subset U$.

$$B = \bigcap_{k=1}^{m} p_{j_k}^{-1} (U_{j_k})$$

$\forall i = 1, \dots, m$: $U_{j_i} \in T_{j_i} \neq \{\emptyset\} \Rightarrow \forall i : U_{j_i} \cap D_{j_i} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists J_n, \dots J_m$ segmentos disjuntos de extremos racionales

t.q. $\subset [0,1]$.

$$p_{J_1 \dots J_m}^{n_1 \dots n_m} \in D \cap B \subset D \cap \underset{\substack{\uparrow \\ U \text{ arbitrario.}}}{U} \Rightarrow D \text{ denso}$$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t. . Entonces $(\sum X_j, \sum T_j)$ separable sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es separable y J numerable.

Dem: $\Rightarrow |$ $(X_j, T_j) \cong X_j \times \{j\}$ abierto de $\sum T_j$, $\forall j \in J$.

$\forall j \in J$, $X_j \times \{j\}$ abierto $\neq \emptyset$ de $\sum T_j$

$\exists D$ denso numerable en $(\sum X_j, \sum T_j) \Rightarrow$

$D \cap (X_j \times \{j\}) \neq \emptyset$ $(z_j \in D \cap (\;\;))$ $\forall j \in J$.

$\{z_j \mid j \in J\} \subset D \Rightarrow \operatorname{card} J \leq \operatorname{card} D \leq \aleph_0$

$\Leftarrow |$ $\forall j \in J$, $\exists D_j \subset X_j$, D_j denso numerable en (X_j, T_j)

Sea $D = \bigcup_{j \in J} (D_j \times \{j\})$ numerable y denso en $(\sum, \sum$

y no vacío.

Def: Sea (X,T) e.t. y $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{U}$ es un recubrimiento de X si $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = X$.

Si $\mathcal{U}\in T$ se dice recubrimiento abierto.

Def: Sea (X,T) e.t. $\mathcal{U}$ abierto de X y $\mathcal{V}\subset\mathcal{P}(X)$. Se dice que es un subrecubrimiento de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ recubrimiento de X.

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que (X,T) es Lindelöf si $\forall\,\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de (X,T), existe algún subrecubrimiento de $\mathcal{U}$ numerable.

Obs: El ser Lindelöf no es hereditario.

$(\mathbb{R},T)$, $T=\mathbb{R}\cup\{U\subset\mathbb{R}\mid 0\notin U\}$ es Lindelöf:

$\exists\, U_0\in\mathcal{U}$ t.q. $0\in U_0$ $(U_0=\mathbb{R})$.

$(\mathbb{R}\setminus\{0\}, T|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})$ no es Lindelöf: ·

$\mathcal{V}=\{\mathbb{R}\}$

$\mathcal{U}=\{\{x\}\mid x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

$\mathcal{U}$ no tiene subrecubrimiento numerable.

Prop: Todo cerrado de un e.t. Lindelöf, es Lindelöf.

Dem: (X,T) Lindelöf. $E\neq\emptyset$ cerrado de (X,T)

$\forall\,\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de $(E,T|_E)$

$\forall j\in J$ t.q. $\exists\, V_j\in T$ con $U_j=V_j\cap E$ $\Rightarrow$

$\mathcal{U}^*=\{V_j\mid j\in J\}\cup\{X\setminus E\}$ recubrimiento abierto de (X,T)

$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{hipótesis}}}{\Rightarrow}$ $\exists\,\mathcal{V}^*=\{V_{j_n}\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{X\setminus E\}$ subrecurrecubrimiento de $\mathcal{U}^*$ $\Rightarrow$ $\mathcal{V}=\{U_{j_n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ subrr. numerable de $\mathcal{U}$.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia de e.t. Entonces $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ es Lindelöf sii $\forall j \in J, (X_j, T_j)$ es Lindelöf y J numerable.

Dem: $\Rightarrow|$ $\forall j \in J$, $(X_j, T_j) \approx X_j \times \{j\}$ cerrado en $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$

$\{X_j \times \{j\} \mid j \in J\}$ recubrimiento abierto en $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$

$\underset{\text{hip.}}{\Rightarrow}$ J numerable.

$\Leftarrow|$ $\forall \mathcal{U}$ recubrimiento abierto de $(\Sigma X_j, \Sigma T_j) \Rightarrow \forall j \in J$,

$\mathcal{U}_j = \{U \cap (X_j \times \{j\}) \mid U \in \mathcal{U}\}$ recubrimiento abierto de

$X_j \times \{j\} \approx (X_j, T_j)$

$\Rightarrow \exists \mathcal{V}_j$ subrecubrimiento numerable de $\mathcal{U}_j$ $\forall j \in J$.

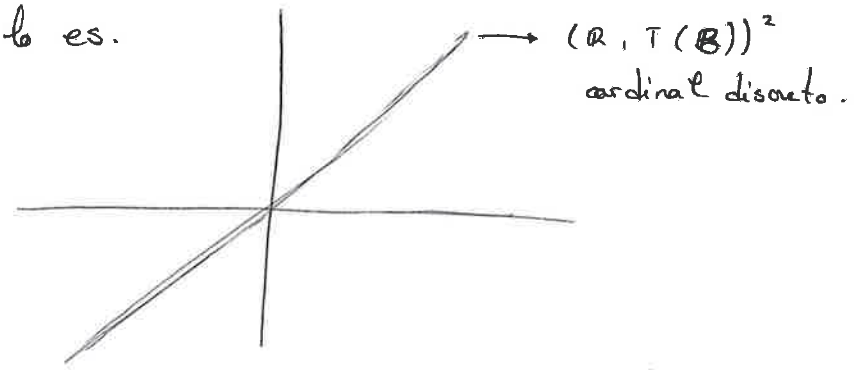
Sea $\mathcal{V} = \bigcup_{j \in J} \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap (X_j \times \{j\}) \in \mathcal{V}_j\} \subset \mathcal{U}$

$\Rightarrow \mathcal{V}$ subrecubrimiento numerable de $\mathcal{U}$.

Obs: El producto de dos e.t. Lindelöf no es necesariamente Lindelöf.

$(\mathbb{R}, T(\mathcal{B}))$, $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ Lindelöf.

y $(\mathbb{R}, T(\mathcal{B}))^2$ no lo es.



E cerrado en X^2 pero no Lindelöf ↯

$\boxed{\text{Prop}}$: Todo e.t. Lindelöf y regular es normal.

Dem: (X,T) Lindelöf y regular.

$\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X,T)

- Si $C_1 = \emptyset$ trivial.
- Si $C_1, C_2 \neq \emptyset$ $\underset{(X,T)\text{ regular}}{\overset{\uparrow}{\Rightarrow}}$ $\forall x \in C_1$, $\exists U^x \in T$ t.q. $\overline{U^x} \cap C_2 = \emptyset$

$$\Rightarrow C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} U^x \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_1 \,,\; C_1 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U^{x_n}$$

$$\forall y \in C_2 \,,\; \exists V^y \in T \text{ t.q. } \overline{V^y} \cap C_1 = \emptyset \Rightarrow$$

$$C_2 \subset \bigcup_{y\in C_2} V^y \Rightarrow \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_2 \Rightarrow C_2 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^{y_n}$$

Sea $A_1 = U^{x_1}$ t.q. $B_1 = \underset{\hookrightarrow \text{abierto}}{V^{y_1} \setminus \overline{A_1}}$

$A_2 = U^{x_2} \setminus \overline{B_1}$ y $B_2 = V^{y_2} \setminus \overline{A_1 \cup A_2}$

$A_3 = U^{x_3} \setminus \overline{B_1 \cup B_2}$ y $B_3 = V^{y_3} \setminus \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$

$\vdots$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = G_1 \in T \quad \text{y} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = G_2 \in T$$

- Si $\exists z \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \begin{cases} z \in A_{n_0} & \text{para algún } n_0 \in \mathbb{N} \\ z \in B_{m_0} & \text{''} \quad m_0 \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z \notin \overline{B_n} & \forall n < n_0 \\ z \notin \overline{A_m} & \forall m \leq m_0 \end{cases} \Rightarrow n_0 > m_0 \text{ y } m_0 \geq n_0 \;\lightning$$

$$\Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

- $\forall z \in C_1 \Rightarrow z \in U^{x_{n_0}}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, $z \notin \overline{V^{y_n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underset{\substack{\overline{B_n} \subset \overline{V^{y_n}} \\ \forall n \in \mathbb{N}}}{\overset{\uparrow}{\Rightarrow}} \quad z \notin \overline{B_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow z \in A_{n_0} \subset G_1$$

- $C_2 \subset G_2$ (análogo).

Prop: Todo e.t. II A.N. es Lindelöf.

Dem: (X,T) e.t. cumple II A.N. $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base numerable de T

t.q. $\forall\, \mathcal{U}$ recubrimiento abierto de $(X,T) \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}$

$\forall x \in U$, $\exists B_U^x \in \mathcal{B}$ t.q. $x \in B_U^x \subset U$

$\{B_U^x \mid x \in U, U \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{B}$.

La subfamilia numerable de $\mathcal{B}$.

$\forall B \in \mathcal{F}$, $\exists\, U_B \in \mathcal{U}$ t.q. $B \subset U_B$

$\mathcal{V} := \{U_B \mid B \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{U}$ numerable recubri. de (X,T)

porque $B \in \mathcal{F}$ y X II A.N.

$\Rightarrow \mathcal{V}$ recubrimiento numerable de $\mathcal{U}$.

Obs: Lindelöf $\not\Rightarrow$ II A.N.

Prop: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. t.q. (X,T) es Lindelöf. $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ ap. sobreyectiva continua. Entonces (Y,S) es Lindelöf.

Dem: $\forall\, \mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ recub. abierto de (Y,S) $\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ continua}}}{\Rightarrow}$

$\mathcal{U}^* = \{f^{-1}(U_j) \mid j \in J\}$ recub. abierto de (X,T) $\underset{\text{Lip.}}{\Rightarrow}$

$\exists\, \mathcal{V}^* = \{f(U_{j_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ subrecub. numerable de $\mathcal{U}^*$

$\underset{f \text{ sup.}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{V} = \{U_{j_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ subrecub. numerable de $\mathcal{U}$.

$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(U_{j_n})$

$Y = f(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f(f^{-1}(U_{j_n}))) = U_p$.

Corolario: Lindelöf es invariante topológico.

Prop: Sea (X, T) metrizable. Son equivalentes:

a) (X, T) cumple II A.N.

b) (X, T) es Lindelöf.

c) (X, T) es separable.

Dem: b) $\Rightarrow$ a) | $\exists\, d$ métrica t.q. $T = T_d$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n = \{ B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in X \}$ recub. abierto

de (X, T) $\underset{b)}{\Rightarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, \mathcal{U}_n^*$ subrecub. numerable

de $\mathcal{U}_n$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n^* := \mathcal{B} \subset T$

$\forall W \in T$, $\forall x \in W$, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.q.

$B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W$

$\Rightarrow \exists\, B_{\frac{1}{2m}}(y_n) \subset U'_{2m}$, $x \in B_{\frac{1}{2m}}(y) \in \mathcal{B}$

$\uparrow$

U'_{2m} recubrimiento de X

Veamos que $B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}$ $(*)$

$\forall z \in B_{\frac{1}{2m}}(y)$, $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x)$

$< \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow z \in B_{\frac{1}{m}}(x)$

Por tanto $\mathcal{B}$ base de T (y numerable).

c) $\Rightarrow$ a) | $\exists\, d$ métrica t.q. $T = T_d$

$\exists\, D = \{ d_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ denso y numerable en $(X, T$

$\{ B_{\frac{1}{m}}(d_n) \mid m, n \in \mathbb{N} \} := \mathcal{B} \subset T$

Por ser D denso $\Rightarrow \exists\, d_n \in D$ t.q.

$d_n \in B_{\frac{1}{2m}}(x) \Rightarrow x \in B_{\frac{1}{2m}}(d_n) \in \mathcal{B}$

$\forall W \in T$ $\forall x \in W$, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.q. $B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W$

$\forall z \in B_{\frac{1}{2m}}(d_n)$: $d(z, x) \leq d(z, d_n) +$

$d(d_n, x) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow z \in B_{\frac{1}{m}}(x)$

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que (X,T) es compacto si

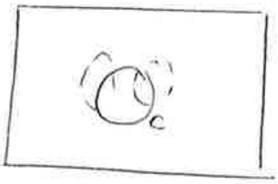
$\forall \mathcal{U}$ recub. abierto de (X,T), $\exists$ subrecub. finito de $\mathcal{U}$.

Obs: Compacto $\Rightarrow$ Lindelöf

Lindelöf $\not\Rightarrow$ Compacto. $(\mathbb{R}, T_u)$

Prop: Todo cerrado de un e.t. compacto es compacto.

Dem:



$\forall \mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ recub. abierto de $(C, T_{|C})$

$\forall j \in J$, $\exists V_j \in T$ t.q. $U_j = V_j \cap C$ $\Rightarrow$

$\{V_j \mid j \in J\} \cup \{X \setminus C\} := \mathcal{U}''$ subrecub. abierto de (X,T)

$\Rightarrow \exists \mathcal{V}^* = \{V_{j_1}, \dots, V_{j_n}\} \cup \{X \setminus C\}$ t.q. es subrecub. finito de $\mathcal{U}$.

$\Rightarrow \mathcal{V} = \{U_{j_1}, \dots, U_{j_n}\}$ subrecub. finito de $\mathcal{U}$.

Prop: Sea (X,T) T_2 y $C \subset X$, $C \neq \emptyset$ con $(C, T_{|C})$ compacto, entonces C cerrado en (X,T)

Dem: $\forall x \in X \setminus C$ y $\forall y \in C$ por ser (X,T) Hausdorf, $\exists U^x_y, U^y \in T$ disjuntos t.q. $C \subset \bigcup_{y \in C} U^y$

$\underset{\substack{\uparrow \\ C \text{ compacto}}}{\Rightarrow} \exists y_1, \dots, y_n \in C$ t.q. $C \subset \bigcup_{i=1,n} U^{y_i}$

$x \in U^x_{y_1} \cap \dots \cap U^x_{y_n} = V^x \in T \Rightarrow V^x \cap C \underset{*}{=} \emptyset \Rightarrow V^x \subset X \setminus C$

$*$ Si $\exists z \in V^x \cap C \Rightarrow z \in U_{y_0}$ para algún $y_0 \Rightarrow$

$z \in U_{y_i}$ $\lightning$

Obs: La compacidad no es hereditaria.

$[0,1]$ compacto y $(0,1)$ no.

Prop: Sea (X,T), (Y,S) e.t. $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ ap. supreyectiva y continua. Si (X,T) compacto, (Y,S) también lo es.

Dem: $\forall\, \mathcal{U}=\{U_j \mid j\in J\}$ recubr. abierto de (Y,S) $\underset{f\text{ cont.}}{\Rightarrow}$

$\mathcal{U}^*=\{f^{-1}(U_j)\mid j\in J\}$ recub. abierto de (X,T)

$\underset{\text{hip}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \mathcal{V}^*=\{f^{-1}(U_{j_1}),\dots,f^{-1}(U_{j_n})\}$ subrecub. finito

de $\mathcal{U}^*$ $\underset{f\text{ sup.}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{V}=\{U_{j_1},\dots,U_{j_n}\}$ subrecub. finito de $\mathcal{U}$.

Corolario: La compacidad es invariante topológica.

Prop: Sea (X,T) e.t. (X,T) compacto sii $\forall\, \mathcal{C}=\{C_j\mid j\in J\}$ familia de cerrados de (X,T) que cumple la prop. de la intersección finita (todas las intersecciones de subfamilias finitas de $\mathcal{C}$ son $\neq\emptyset$) entonces $\bigcap_{j\in J} C_j\neq\emptyset$

No estudiar sólo aplicación

Dem: $\Rightarrow|$ $\{X\setminus C_j\mid j\in J\}$ recub. abierto de (X,T) $\underset{\text{hip}}{\Rightarrow}$

$\exists\{X\setminus C_{j_1},\dots,X\setminus C_{j_n}\}$ subrecub. finito de él $\Rightarrow$

$\bigcup_{k=1}^{n}(X-C_{j_k})=X \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} C_{j_k}=\emptyset$ ↯

$\Leftarrow|$ Si (X,T) no es compacto, $\exists\,\mathcal{U}=\{U_j\mid j\in J\}$ recub. abierto sin subrecub. finito.

$\Rightarrow \mathcal{C}=\{X-U_j\mid j\in J\}$ familia de cerrados con la p.i.f. t.q. $\bigcap_{j\in J}(X\setminus U_j)=\emptyset$ ↯

Prop: Sea (X,T) e (Y,S) e.t. t.q. (X,T) compacto y (Y,S) T_2. Sea $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ ap. continua. Entonces f es cerrada.

No estudiar sólo apli

Dem: $\forall F$ cerrado de (X,T), $(F,T|_F)$ compacto $\underset{f\text{ cont.}}{\Rightarrow}$

$(f(F),S|_{f(F)})$ compacto y $\subset(Y,S)$ $\underset{(Y,S)\ T_2}{\Rightarrow}$ $f(F)$ cerrado.

Muy importante

Teorema de Tychonoff: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia de e.t. Entonces $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ es compacto sii $\forall j\in J, (X_j, T_j)$ es compacto.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia de e.t. Entonces $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ es compacto sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es compacto y J finito.

Dem: $\Rightarrow|$ $\forall j\in J$, $(X_j, T_j) \cong X_j \times \{j\}$ cerrado en $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$

$\Rightarrow \{X_j \times \{j\} \mid j\in J\}$ subrecubrimiento abierto de $(\Sigma X_j, \Sigma$

$\underset{hip}{\Rightarrow}$ J finito.

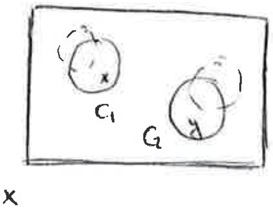
$\Leftarrow|$ $\forall \mathcal{U}$ recub. abierto de $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$, $\forall j\in J$:

$\mathcal{U}_j = \{U \cap (X_j \times \{j\}) \mid U \in \mathcal{U}\} \Rightarrow \forall j \in J, \exists \mathcal{V}_j$ subrecub. finito de $\mathcal{U}_j$.

Sea $\mathcal{V} = \bigcup_{j\in J} \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap (X_j \times \{j\}) \in \mathcal{V}_j\}$ subre. finito de $\mathcal{U}$.

Prop: Sea (X, T) e.t. T_2 y C_1, C_2 subespacios compactos de (X,T) disjuntos. Entonces $\exists G_i \in T$ $i = 1, 2$. disjuntos t.q. $C_i \subset G_i$ $\forall i$.

Dem:



$\forall x \in C_1$, $\forall y \in C_2$, $\exists U_y^x, U_x^y \in T$ disjuntos.

$C_1 \subset \bigcup_{x\in C_1} U_y^x \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in C_1$ t.q.

$C_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_y^{x_i} := G_y \in T$.

$U_{x_1}^y \cap \dots \cap U_{x_n}^y := V^y \in T$ t.q. $G_y \cap V^y = \emptyset$

$C_2 \subset \bigcup_{y\in C_2} V^y \Rightarrow \exists y_1, \dots, y_m \in C_2$ t.q. $C_2 \subset \bigcup_{j=1}^{m} V^{y_j} := G_2 \in T$

$G_{y_1} \cap \dots \cap G_{y_m} := G_1 \in T$

$G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Corolario: Todo e.t. compacto y T_2 es T_4.

Prop: Sea (X,T) e.t. regular, C_1 cerrado de (X,T) y C_2 subespacio compacto de (X,T) disjuntos. Entonces $\exists G_i$ $i=1,2$ $G_i \in T$ disjuntos t.q. $C_i \subset G_i$.

Dem: $\forall x \in C_2$, $\exists U^x$ y $U_x \in T$ disjuntos t.q. $x \in U^x$ y $C_1 \subset U_x$

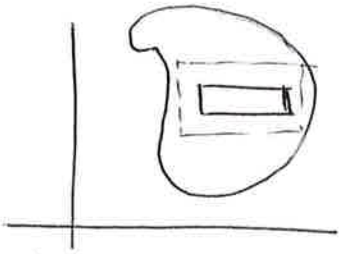
$$C_2 \subset \bigcup_{x \in C_2} U^x \underset{C_2 \text{ comp.}}{\Rightarrow} \exists\, x_1, \dots, x_n \in C_2 \text{ t.q. } C_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U^{x_i} := G_2 \in T$$

$$C_1 \subset G_1 := U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n} \in T.$$

$$\Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

Prop: Sea (X,T) e (Y,S) e.t., $A \subset X$, A subespacio compacto y $B \subset Y$, B subespacio compacto t.q. $A \times B \subset W$. Entonces $\exists U \in T$ t.q. $A \subset U$ y $\exists V \in S$ t.q. $B \subset V$ y $U \times V \subset W$.

Dem:



$\forall (x,y) \in A \times B$, $\exists U_y^x \in T$ y $\exists V_x^y \in T$

$U_y^x \times V_x^y \subset W$

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{x \in A} U_y^x \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in A$ t.q.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_y^{x_i} := U_y \in T$$

$$\forall y \in B,\ y \in V_{x_1}^y \cap \dots \cap V_{x_n}^y := V^y \in S$$

$U_y \times V^y \subset W$ $\forall y \in B$, $B \subset \bigcup_{y \in B} V^y \Rightarrow \exists y_1, \dots, y_m \in B$ t.q.

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{m} V^{y_j} := V \in S$$

$$\Rightarrow U \times V \subset W$$

$$A \subset U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_m} := U \in T$$

Lema del nº ρ de Lebesgue: Sea (X,T) e.t. compacto y metrizable. $\forall \mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ cubrimiento abierto de (X,T), $\exists \rho > 0$ t.q. $\forall x \in X$, $B_\rho(x) \subset U_i$ para algún i.

Dem: $\forall i = 1, \dots, n$ sea $f_i : (X,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q. $f_i(x) = d(x, X \setminus U_i) \Rightarrow f_i$ continua $\forall i \in \mathbb{N}$

Sea $f : (X,T) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \max\{f_i(x) \mid i = 1, \dots, n\}$ $\Rightarrow$

f ap. continua $\Rightarrow f(X) \subset \mathbb{R}$ compacto $\Rightarrow f(X)$ acotada en $\mathbb{R}$, $f(X) \subset (0, \longrightarrow) \Rightarrow \exists \rho > 0$ t.q. $f(x) > \rho$

$\uparrow$

$\forall x \in X$, $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $x \in U_{i_0} \Rightarrow x \notin X \setminus U_{i_0} \Rightarrow$

$f(x) \geq f_{i_0}(x) > 0$

$\forall x \in X$, $\rho \in f(x)$. $f_{i_x}(x) = d(x, X \setminus U_{i_x})$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$

¿$B_\rho(x) \subset U_{i_x}$? $\forall y \subset B_\rho(x) \Rightarrow d(x,y) < \rho$

$\Rightarrow \rho < d(x, X \setminus U_{i_x}) \leq d(x,y) + d(y, X \setminus U_{i_x})$

$< \rho + d(y, X \setminus U_{i_x}) \Rightarrow d(y, X \setminus U_{i_x}) > 0 \Rightarrow$

$y \in U_{i_x}$.

Def: Sea (X,T) e.t. Diremos que es localmente compacto si $\forall x \in X$, x tiene una base de entornos compactos.

Obs: loc. compacto $\not\Rightarrow$ compacto.

$(\mathbb{R}, T_u)$ loc. compacto y no compacto.

Obs: compacto $\not\Rightarrow$ loc. compacto.

$(X,T) \begin{cases} X = \mathbb{Q} \cup \{q\}, \ q \notin \mathbb{Q} \\ T = T_u|_{\mathbb{Q}} \cup \{X\} \end{cases} \Rightarrow (X,T)$ compacto y no loc. comp.

Prop: Sea (X,T) e.t. T_2. Entonces (X,T) es loc. compacto sii $\forall x \in X$, x tiene algún entorno compacto.

Interesante

Dem: $\Rightarrow$ | Por def.

$\Leftarrow$ | $\forall x \in X$, $\forall U$ entorno de x en (X,T), $\exists C$ entorno compacto de x en (X,T) t.q.

$U \cap C$ entorno de x : $(U \cap C)^\circ =: V \in T$ y

$\bar{V} \subset \bar{C} \underset{\substack{\uparrow \\ C \text{ comp.}}}{=} C$.

$\Rightarrow \bar{V}$ compacto y $T_2 \Rightarrow \bar{V}$ regular $\Rightarrow \exists W \in T$ t.q. $x \in W$ y $W \cap V \subset \bar{W} \cap \bar{V} \subset V$ con $x \in W \cap V$

$\bar{W} \cap \bar{V} \subset \bar{V}$ compacto. $\Rightarrow \bar{W} \cap \bar{V}$ compacto y ent. de x en (X,T).

Obs: compacto y $T_2 \Rightarrow$ loc. compacto.

Obs: loc. compacto y $T_2 \Rightarrow$ regular.

Obs: La compacidad local no es hereditaria.

$(\mathbb{R}, T_u)$ y $(\mathbb{Q}, T_u|_{\mathbb{Q}})$

Prop: Sea (X,T) e.t. loc. compacto:

1) Si $A \in T \setminus \{\emptyset\}$, entonces $(A, T|_A)$ loc. compacto.

2) Si (X,T) T_2, $\forall F$ cerrado $\neq \emptyset$ de (X,T), $(F, T|_F)$ loc. comp.

Dem: 1) $\forall x \in A \in T$, $\forall U^x$ entorno de x en $A \Rightarrow U^x$ ent. de x en $(X,T) \underset{\substack{\uparrow \\ (X,T) \text{ loc. comp.}}}{\Rightarrow} \exists C^x$ ent. compacto de x en (X,T) t.q.

$C^x = U^x \subset A$.

2) $\forall F$ cerrado de (X,T), $\forall x \in F$, $\exists C^x$ ent. compacto de x en $(X,T) \underset{\substack{\uparrow \\ (X,T)\, T_2}}{\Rightarrow} C^x \cap F$ cerrado y compacto.

Prop: Sea (X,T) e (Y,S) e.t. y $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ supraayect. continua y abierta. Si (X,T) es loc. compacto, (Y,S) también lo es.

__Dem:__ $\forall y \in Y$, $\forall V^y$ entorno de y en (Y,S) $\underset{f \text{ sup.}}{\Rightarrow}$ $\exists x \in f^{-1}(y)$ t.q. $f^{-1}(V^y)$ entorno de x en (X,T) $\underset{\text{hip.}}{\Rightarrow}$ $\exists C^x$ entorno compacto de x t.q. $C^x \subset f^{-1}(V^y)$ $\underset{\substack{f \text{ cont.} \\ f \text{ ab.}}}{\Rightarrow}$ $f(C^x) \subset V^y$ t.q. es loc. compacto.

__Corolario:__ La compacidad local es invariante topológico.

Prop: Sea $\{(X_j,T_j)\}_{j \in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ es compacto sii $\forall j \in J$, (X_j,T_j) es loc. compacto y (X_j,T_j) compacto $\forall j \in J \setminus F$, F finito.

__Dem:__ $\Rightarrow|$ $\forall j \in J$, $p_j : (\Pi X_j, \Pi T_j) \longrightarrow (X_j, T_j)$ supraayectiva continua y abierta $\Rightarrow$ (X_j,T_j) loc. compacto.

$\forall x \in \Pi X_j$, $\exists C^x$ ent. compacto de x

$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ base de ΠT_j t.q. $x \in B \subset C^x$ y

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}) \approx \prod_{k=1}^{n} U_{j_k} \times \prod_{j \in J} X_j \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall j \in J$, $p_j^{-1}(B) \subset p_j(C^x)$ compacto en (X_j,T_j)

$\Rightarrow \forall j \in J \setminus \{j_1, \dots, j_n\}$, $X_j = p_j(C^x)$ compacto.

$\Leftarrow|$ $\forall x \in \prod_{j \in J} X_j$, $\forall U^x$ entorno de x en $(\Pi X_j, \Pi T_j)$

$x_{j_k} \in U_{j_k} \in T_{j_k}$ $\forall k = 1, \dots, n$

$F_0 = \{j_1, \dots, j_n\}$; $F_0 \cup F = H$ finito.

$\forall j \in J \setminus H = (J \setminus F_0) \cap (J \setminus F) \subset J \setminus F$

$$\forall j\in H \begin{cases} \text{si } j\in F_0 \Rightarrow j=j_k \text{ para algún } k\in\{1,\dots,n\} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \exists V^{x_{j_k}} \text{ ent. comp. de } x_{j_k} \text{ t.q. } \subset U_{j_k} \\ \text{si } j\in F \Rightarrow \exists V^{x_j} \text{ ent. comp. de } x_j \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{j\in H} p_j^{-1}(V^{x_j}) \subset B \subset U^x \text{ es ent. de } x$$

$\Rightarrow \exists B\in\mathcal{B}$ base de $\prod T_j$ t.q. $x\in B\subset U^x$

y $B=\bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$

Prop: Sea $\{(X_j,T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq\emptyset$ de e.t. Entonces $(\sum X_j,\sum T_j)$ loc. compacto sii $\forall j\in J$, (X_j,T_j) es loc. compacto.

Dem: $\Rightarrow$| $\forall j\in J$, $(X_j,T_j)\approx X_j\times\{j\}$ abierto en $(\sum X_j,\sum T_j)$

$\Leftarrow$| $\forall x\in\sum_{j\in J} X_j \Rightarrow \exists!\, j_0\in J$ t.q. $x\in X_{j_0}\times\{j_0\}$ loc. comp

Teorema de Baire: Sea (X,T) loc. compacto y T_2. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es familia numerable de abiertos y densos en (X,T), entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en (X,T).

Dem: $\forall U\in T\setminus\{\emptyset\} \underset{A_n \text{ denso}}{\Rightarrow} U\cap A_1\neq\emptyset \underset{\substack{U\cap A_1\in T\\ (X,T)\text{ loc. comp. } T_2}}{\Rightarrow} \exists B_1\in T$ t.q.

$\overline{B_1}$ compacto y $\overline{B_1}\subset U\cap A$. $\underset{\substack{B_1\in T\setminus\{\emptyset\}\\ A_2 \text{ denso}}}{\Rightarrow} B_1\cap A_2\neq\emptyset\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists B_2\in T$ t.q. $\overline{B_2}$ compacto y $\overline{B_2}\subset\overline{B_1}\cap A \underset{\text{por induc.}}{\Rightarrow}$

$\exists\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $B_n\in T$ $\forall n\in\mathbb{N}$ con $\overline{B_n}$ compacto y $\overline{B_n}\subset B_{n-1}\cap A_n \Rightarrow \forall n>1$, $\{\overline{B_n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ familia de cerrados con la propiedad de la int. finita

$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{B_n}\neq\emptyset$ y $\bigcap\overline{B_n}\subset(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n)\cap U \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ denso en (X,T).

Obs: Si $A_n \notin T$ no se cumple.

$(\mathbb{R}, T_u)$, $A_1 = \mathbb{Q}$, $A_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Obs: Si la familia no es numerable no se cumple.

$(\mathbb{R}, T_u)$ $A_x = \mathbb{R} \setminus \{x\} \in T_u$ $\forall x \in \mathbb{R}$ denso

$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}} A_x = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} (\mathbb{R} \setminus \{x\} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} = \emptyset)$$

Def: Sea (X, T) e.t. Se llama compactación (o compactificación) de (X, T) a un par (K, f) donde K es e.t. compacto y $f : X \to K$ es una inmersión top. t.q. $f(X)$ es denso en K.

Se dice que una compactación es T_2 si K es T_2.

Se dice que una compactación es "para un solo punto" si $K \setminus f(X)$ es un punto.

Ejemplo: $([0,1], f)$ es compactación de $(0,1)$

Ejemplo: El espacio proyectivo de dim. n es una compactación del espacio afín de dim. n.

Def: Sea (X, T) e.t. y (X_1', f_1), (X_2', f_2) dos compactaciones de X. Se dice que son topológicamente equivalentes si $\exists h : X_1' \to X_2'$ homomorfismo t.q. $h \circ f_1 = f_2$.

$$\begin{tikzcd}
X_1' \arrow[rr, "h"] & & X_2' \\
& X \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Def: Sea (X, T) e.t. y (X_1', f_1), (X_2', f_2) dos compactaciones de X. Se define la relación $\geq$ si $\exists h : X_1 \to X_2$ continua y suprayectiva t.q. $h \circ f_1 = f_2$.

Obs: La relación $\geq$ es reflexiva y transitiva.

Prop: Sea X e.t. y (X', f), (X_1', f_1) dos compactaciones T_2 de X t.q. $(X', f) \geq (X_1', f_1)$ y $(X_1', f_1) \geq (X', f)$. Entonces son top. equivalentes.

Dem: $\exists\, g : X' \longrightarrow X_1'$ continua y suprayectiva t.q. $g \circ f = f_1$

$\exists\, g_1 : X_1' \longrightarrow X'$ '' $g_1 \circ f_1 = f$

$\Rightarrow g_1 \circ g : X' \longrightarrow X'$ continua con X' T_2.

$$g_1 \circ g \Big|_{f(X)} = 1_{f(X)}$$

$\forall x \in X$, $(g_1 \circ g)(f(\,.\,)) = g_1(g(f(\,))) = g_1 f_1(x) = f(x)$

$\overline{f(X)} = X'$ $(f(X)$ denso en $X')$ $\Rightarrow g_1 \circ g = 1_{X'}$

Análogamente: $g \circ g_1 = 1_{X_1'}$ $\Rightarrow g \approx g' = g_1$

Teorema de Alexandroff: Sea X un e.t. no compacto, ω un punto t.q. $\omega \notin X$. Sobre $X^* = X \cup \{\omega\}$, la familia $T^* = T \cup \{U \subset X^* \mid \omega \in U$ y $X \setminus U$ compacto y cerrado en $(X, T)\}$ es topología. El espacio (X^*, T^*) es compacto y X es dens en él.

Dem:

1) $\emptyset, X^* \in T^*$

2) Inter. finita.: $\forall\, W_1, W_2 \in T^*$, hay 3 casos:

I) $W_i \in T \Rightarrow W_1 \cap W_2 \in T \subset T^*$

II) $\omega \subset W_i\ \forall i$, $X \setminus W_i$ compacto y cerrado en (X, T)

$\underset{\omega \in W_1 \cap W_2}{\Rightarrow}$ $X \setminus (W_1 \cap W_2) = (X \setminus W_1) \cup (X \setminus W_2)$

cerrado y compacto en (X, T) $\Rightarrow W_1 \cap W_2 \in T^*$

II) Si $x_1 \in G \Rightarrow x_1 \notin \underbrace{X_1 \setminus G}_{\text{compacto}} \Rightarrow h(X_1 \setminus G) =$

$= (f_1' \circ f_1^{-1})(X_1 \setminus G)$ compacto en $X_1' \underset{X_1'\ T_2}{\Rightarrow}$

$h(X_1 \setminus G)$ cerrado en X_1'

$h(G) = X_1' \setminus h(X_1 \setminus G)$ abierto en X_1'

$\Rightarrow$ h es ap. abierta.

Análogamente h^{-1} es ap. abierta

$\Rightarrow$ las dos compact. son equivalentes top.

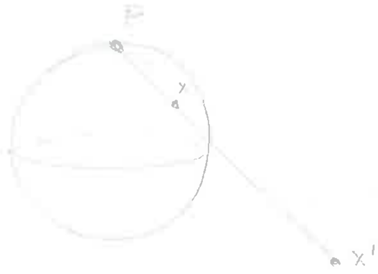
Ejemplo: $\mathbb{S}^n$ es la compactación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$

$\shortparallel$

$\{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|x\| = 1\}$

$h : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x \longrightarrow L(\{p, x\}) \cap \mathbb{R}^n = \{x'\}$ homeomorf.



$\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ denso en $\mathbb{S}^n$

Prop: Si (X, T) e.t. compacto y (k, f) compact. T_2 de X, entonces $f(X) = k$

Dem: $\overline{f(X)} = k$

$f(X)$ compacto en k $\underset{k\ T_2}{\Rightarrow}$ $f(X)$ cerrado en k $\Rightarrow$

$f(X) = k$.

Def: Sea (X, T) e.t. Se dice que es conexo si $\nexists$ C_i cerrados disjunt

$\neq \emptyset$ de (X, T) t.q. $X = C_1 \cup C_2$

Prop: Si (X,T) e.t. compacto y (k, f) compactación T_2 de X, entonces $f(X) = k$

Dem: $\overline{f(X)} = k$

$f(X)$ compacto en $k \underset{k\ T_2}{\Rightarrow} f(X)$ cerrado en $k \Rightarrow f(X) = k$

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que es conexo si $\nexists\ C_i$ $i=1,2$ cerrados disjuntos $\neq \emptyset$ de (X,T) t.q. $X = C_1 \cup C_2$

Obs: (X,T) conexo sii $\nexists\ A_i \in T \setminus \{\emptyset\}$ disjuntos t.q. $X = A_1 \cup A_2$ sii los únicos subconjuntos de (X,T) simultáneamente abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X

Prop: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. $f: (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ continua y suprayec. Si (X,T) conexo, también lo es (Y,S).

Dem: Si (Y,S) no conexo: $\exists A_i \in S \setminus \{\emptyset\}$ disjuntos $i=1,2$ t.q. $Y = A_1 \cup A_2 \underset{f\ \text{cont.}}{\Rightarrow} f^{-1}(A_i) \in T \setminus \{\emptyset\}$ disjuntos t.q. $X = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$.

Obs: La conexión es invariante topológico.

Obs: La conexión no es hereditaria.

$(\mathbb{R}, T_u)$ y $[0,1] \cup (2,3)$.

Prop: Util Sea (X,T) e.t., $\{X_j\}_{j\in J}$ familia de subespacios conexos de (X,T) t.q. $X = \bigcup_{j\in J} X_j$. Si $\bigcap_{j\in J} X_j \neq \emptyset$, entonces (X,T) conexo.

Dem: Si (X,T) no conexo: $\exists\ C_i \neq \emptyset$ cerrados disjuntos $i=1,2$ t.q. $X = C_1 \cup C_2$.

$\exists x \in \bigcap_{j\in J} X_j$. Sea $x \in C_1$ y $C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists j_0 \in J$ t.q. $\underbrace{C_2 \cap X_{j_0}}_{\substack{\shortparallel \\ F_2}} \neq \emptyset$

$$x \in C_1 \cap \left(\bigcap_{j\in J} X_j\right) \subset \underbrace{C_1 \cap X_{j_0}}_{\overset{\shortparallel}{F_1} \neq \emptyset} .$$

F_1, F_2 cerrados disjuntos de $(X_{j_0}, T|_{X_{j_0}})$

$$X_{j_0} = (C_1 \cap X_{j_0}) \cup (C_2 \cap X_{j_0}) = F_1 \cup F_2 \quad ↯$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$: $(\mathbb{R}^n, T_u)$ conexo

$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} [x]$ (todas las rectas generadas por el vector x)

$[x] \approx \mathbb{R}$. y $\bigcap_{x\in\mathbb{R}^n} [x] \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}^n$ conexo.

$\boxed{\text{Prop}}$: Sea (X,T) e.t. y $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios conexos de (X,T) t.q. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Si $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces (X,T) conexo.

Dem: Veamos que $C_m = \bigcup_{n=1}^{m} X_n$ conexo $\forall m \in \mathbb{N}$

Por inducción sobre m:

$m = 1$: X_1 conexo.

$\vdots$

$$\left.\begin{array}{l} m = m : \ C_m = \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} X_n\right)}_{\text{conexo } C_{m-1}} \cup \underbrace{X_m}_{\text{Conexo}} \Rightarrow C_m \text{ conexo.} \\ \\ \underbrace{X_{m-1} \cap X_m \neq \emptyset}_{\overset{\cap}{C_{m-1} \cap X_m}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (X,T)$ conexo.

$\boxed{\text{Prop}}$: Sea (X,T) e.t. y E subespacio conexo de (X,T). Si C es tal que [illegible] $E \subset C \subset \overline{E}$ entonces C es subespacio conexo de (X,T).

Dem: Supongamos C no conexo. $\exists F_1, F_2$ cerrados de C y disjuntos t.q. $C = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_i$ abiertos en $(C, T|_C)$ $\forall i$.

$\forall x \in G_1,\ \exists U \in T,\ x \in F_1 = U \cap C \underset{E \subset C}{\Rightarrow} \underbrace{(U\cap C)\cap E}_{F_1 \cap E = H_1} = U \cap E \neq \emptyset$

$x \in F_1 \subset C \subset \bar{E} \Rightarrow x \in \bar{E} \Rightarrow x \cap U \neq \emptyset$

Análogamente $F_2 \cap E \neq \emptyset$

$\Big\} \Rightarrow E = H_1 \cup H_2 \underset{\overset{\uparrow}{H_i \text{ disjunt.}}}{\Rightarrow} ↯$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ conexo sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) conexo.

Dem: $\Rightarrow|$ –

$\Leftarrow|$ $\exists x \in \prod_{j\in J} X_j$. Sea E la unión de todos los subespacios conexos de $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ que contienen a x.

$\Rightarrow E$ conexo.

¿E denso? $\forall U \in \prod_{j\in J} T_j \neq \emptyset$, $\exists B \in \mathcal{B}$ t.q. $B \subset U$

y $B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$ con $U_{j_k} \in T_{j_k} \setminus \{\emptyset\}$ $\forall k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \forall k,\ \exists b_{j_k} \in U_{j_k}$.

Sea $E_1 = \{(z_j)_{j\in J} \in \Pi X_j \mid z_j = x_j \ \forall j \in J \setminus \{j_1\}\}$

$\approx$

$X_{j_1} \times \{(x_j)_{j \in J\setminus\{j_1\}}\} \approx X_{j_1}$ que es conexo.

⋮

$E_n = \{(z_j)_{j\in J} \in \Pi X_j \mid z_j = x_j \ \forall j \in J \setminus \{j_1, \dots, j_n\},$

$z_{j_1} = b_{j_1}, \dots, z_{j_{n-1}} = b_{j_{n-1}}\} \approx$

$\approx \{(b_{j_1}, \dots, b_{j_{n-1}})\} \times X_{j_n} \times \{(x_j)_{j\in J\setminus\{j_1,\dots,j_n\}}\}$

$\approx X_{j_n}$ que es conexo.

$E_m \cap E_{m+1} \neq \emptyset \quad \forall m = 1, \dots, n-1$

$\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{n} E_m$ conexo $\Rightarrow F \subset E$

Sea $y \in \prod_{j\in J} X_j$ $\begin{cases} y_{j_k} = b_{j_k} & k = 1, \dots, n \\ y_j = x_j & \forall j \in J \setminus \{j_1, \dots, j_n\} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in E_n \subset F$, $y \in B \subset U \Rightarrow U \cap F \neq \emptyset \Rightarrow U \cap E \neq \emptyset \Rightarrow E$ denso

$\underset{E \text{ conexo}}{\Rightarrow} E = \prod X_j$

Obs: La conexión no es propiedad aditiva.

Def: Sea (X, T) e.t. Se llama componente de x en (X,T) a C_x unión de todos los subespacios conexos de (X,T) que contienen a x.

Obs: C_x es conexo y es el mayor subespacio conexo de (X,T) que contiene a x.

Obs: Los componentes de cualquier e.t. son cerrados suyos.

C_x componente de $x \Rightarrow x \in \overline{C_x}$ conexo $\Rightarrow \overline{C_x} \subset C_x \Rightarrow \overline{C_x} = C_x$

Obs: Si (X,T) es e.t. sus componentes no son necesariamente abiertos.

$(\mathbb{Q}, T_u|_{\mathbb{Q}})$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\{q\}$ es su componente y $\notin T_u|_{\mathbb{Q}}$

Prop: Si (X,T) e.t., $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, C_x y C_y son componentes en (X,T), entonces $C_x = C_y$ ó $C_x \cap C_y = \emptyset$

Dem: $C_x \cap C_y \neq \emptyset \Rightarrow C_x \cup C_y$ conexo $\Rightarrow C_x \cup C_y \begin{cases} \subset C_x \\ \subset C_y \end{cases} \Rightarrow$

$C_x = C_y = C_x \cup C_y$

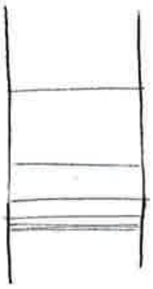
Def: Sea (X, T) e.t. Se dice que es localmente conexo si $\forall x \in X$, $\exists$ alguna base de entornos de x por subespacios conexos de (X,T)

Obs: loc. conexo $\not\Rightarrow$ conexo

$[0,1] \cup (2,3)$ loc. conexo.

Obs: conexo $\not\Rightarrow$ loc. conexo.

$X = [0,1] \times (\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}) \cup \{0,1\} \times \mathbb{R}$ con $T|_X$



$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$ conexo ya que X_n conexo por la propiedad de unión de familia numu.

$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n \neq \emptyset$, $\forall (x,0) \in [0,1] \times \{0\}$, $\nexists$ base de ent. conexo.

Obs: La conexión local no es hereditaria.

Prop: Sea (X,T) e.t. (X,T) es loc. conexo sii cada abierto de (X,T) verifica que sus componentes son abiertos.

importante

Dem: $\Rightarrow|$ (X,T) loc. conexo, $U \in T \setminus \{\emptyset\}$ componente de $(U, T|_U)$ $\Rightarrow$ $\forall x \in C \subset U$ abierto $\underset{hip}{\Rightarrow}$ $\exists V$ entorno conexo de x en (X,T) t.q. $x \in V \subset U$ $\Rightarrow$ $V \subset C$ $\Rightarrow$ C abierto en (X,T)

$\Leftarrow|$ $\forall x \in X$, $\forall U^x$ entorno de x en (X,T) $\Rightarrow$ la componente C de x en $(U^x, T|_{U^x})$ es abierto en (X,T) $\Rightarrow$ C entorno conexo de x, t.q. $C \subset U^x$ $\Rightarrow$ loc. conexo.

Corolario: Sea (X,T) e.t. loc. conexo, entonces sus componentes son abiertos y cerrados simultáneamente.

Corolario: Si (X,T) e.t. loc. conexo y compacto, tiene un número finito de componentes.

Dem: (X,T) loc. conexo $\Rightarrow$ $\{C_x \mid x \in X\}$ (familia de las componentes de X) es recubrimiento abierto de (X,T) por conjuntos disjuntos dos a dos $\underset{X \text{ comp.}}{\Rightarrow}$ $\{C_x \mid x \in X\}$ es finito

Prop: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. t.q. (X,T) loc. conexo, $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ identificación, entonces (Y,S) es loc. conexo.

Dem: $\forall U\in S\setminus\{\emptyset\}$, C componente suya de $(U,T|_U)$

$\forall x\in f^{-1}(C)\subset f^{-1}(U)$

Sea C_x componente de x en $f^{-1}(U)\in T \underset{\text{hip.}}{\Rightarrow} C_x\in T$

conexo $\underset{f\text{ cont.}}{\Rightarrow} f(x)\in f(C_x)\subset U \Rightarrow f(C_x)\subset C \Rightarrow$

$C_x\subset f^{-1}(C) \Rightarrow f^{-1}(C)\in T \underset{f\text{ ident.}}{\Rightarrow} C\in S$

Prop: Sea $\{(X_j,T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq\emptyset$ de e.t. Entonces $(\prod X_j,\prod T_j)$ loc. conexo sii $\forall j\in J,(X_j,T_j)$ conexo $\forall j\in J\setminus F$, $F\subset J$ finito.

Dem: $\Rightarrow|$ $\forall j_0\in J$, $p_{j_0}:(\prod X_j,\prod T_j)\longrightarrow(X_{j_0},T_{j_0})$ suprayec. continua y abierta $\Rightarrow (X_{j_0},T_{j_0})$ loc. conexo.

$\forall x\in\prod X_j$, U entorno conexo de x en $(\prod X_j,\prod T_j)$

$\Rightarrow \exists B\in\mathcal{B}$ t.q. $x\in B\subset U$ y $B=\bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$

$\Rightarrow X_j = p_j(B)\subset \underbrace{p_j(U)}_{\text{conexo}}\ \forall j\in J\setminus\{j_1,\dots,j_n\}$

$\Rightarrow X_j$ conexo $\forall j\in J\setminus\{j_1,\dots,j_n\}$

$\Leftarrow|$ $\forall j_k\in\prod X_j$, $\forall U^x$ entorno de x en $(\prod X_j,\prod T_j)$

$\Rightarrow \exists B\in\mathcal{B}$ t.q. $x\in B\subset U^x$ y $B=\bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$

$\Rightarrow \forall k=1,\dots,n$, $x_{j_k}\in U_{j_k}\in T_{j_k}$

$F_0=\{j_0,\dots,j_k\}$ t.q. $H=F\cup F_0$ finito $\Rightarrow$

$J\setminus H=(J\setminus F)\cap(J\setminus F_0)$

$$\forall j\in H \begin{cases} \text{si } j\in F_0 \Rightarrow \exists k\in\{1,\dots,n\}\ j=j_k \Rightarrow \\ \qquad \exists V^{x_{j_k}}\subset U_{j_k} \\ \text{si } j\in F \Rightarrow \exists \underset{\text{ent. conexo}}{V^{x_j}}\subset X_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(V^{x_j}) \subset B \subset U^x$$

$$\rotatebox{90}{$\approx$}$$

$$\underbrace{\prod_{j\in} V^{x_j} \times \prod_{j\in J\setminus H} X_j}_{\text{conexos}} \quad \text{conexo}$$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ es conexo sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es loc. conexo.

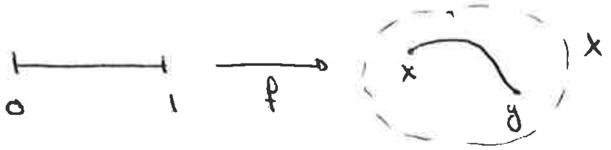
Dem: $\Leftarrow|$ $\forall x \in \Sigma X_j \Rightarrow \exists !\, j_0 \in J$ t.q. $x \in \underset{(X_{j_0}, T_{j_0})}{\underset{\rotatebox{90}{$\approx$}}{X_{j_0} \times \{j_0\}}}$

$\Rightarrow|$ $\forall j_0 \in J$, $(X_{j_0}, T_{j_0}) \approx X_{j_0} \times \{j_0\}$

↳ tiene una base de entornos conexos

Def: Sea (X, T) e.t. Diremos que es conexo por caminos si $\forall x, y \in X$ $\exists f: I \longrightarrow (X, I)$ continua t.q. $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Entonces se dice que f es un camino en X de origen x y extremo y.

$I = [0,1]$ con la top. usual relativa.



Prop: Todo e.t. conexo por caminos es conexo.

Dem: Si (X, T) conexo por caminos. Si $\exists A_1, A_2 \in T \setminus \{\emptyset\}$ t.q. $X = A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ $\Rightarrow \forall a_i \in A_i$ $\forall i = 1, 2$.

$\exists f: I \longrightarrow (X, T)$ continua t.q. $f(0) = a_1$, $f(1) = a_2$

$\Rightarrow f^{-1}(A_i) \neq \emptyset$ abiertos en I $\forall i$. t.q. $\underset{I}{\underset{\shortparallel}{f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)}}$

$\Rightarrow I$ no conexo. ↯

Obs: Conexo $\not\Rightarrow$ Conexo por caminos.

$$X = \underbrace{\{(x, \text{sen}\,\tfrac{1}{x}) \mid x > 0\}}_{:= X_0} \cup \underbrace{\{(x, 0) \mid x \leq 0\}}_{X_1}$$

$X_0 \approx (0, \longrightarrow)$ conexo $\qquad X_1 \approx (\longleftarrow, 0]$ conexo.

$(0,0) \in \overline{X_0} \Rightarrow X_0 \cup \{(0,0)\}$ conexo

$X = ((0,0) \cup X_0) \cup X_1$ conexo.

X no es conexo por caminos: $(0,0)$ y $(x_0, \text{sen}\,\frac{1}{x_0}) \in X_0$

$\nexists\, f : I \longrightarrow X$ continua t.q. $f(0) = (0,0)$ y $f(1) = (x, \text{sen}\,\frac{1}{x})$

Si existiese $f : I \longrightarrow f(I) \Rightarrow f$ cerrado $\Rightarrow$

$\Rightarrow f : I \longrightarrow f(I)$ identificación $\underset{\uparrow}{\Rightarrow}$ $f(I)$ loc. conexo

la conexión local se concerva por identificaciones

y $(0,0)$ no tiene una base de entornos conexos $\Rightarrow$

I no conexo por caminos $\lightning$

Obs: Conexo por caminos $\not\Rightarrow$ loc. conexo.

En el ejemplo anterior, no es loc. conexo porque $(0,0)$ está en el espacio y no tiene una base de entornos formado por conexos.

Obs: loc. conexo $\not\Rightarrow$ conexo por caminos.

$([0,1] \cup (2,3))$ no conexo, loc. conexo $\Rightarrow$ no conexo por caminos.

Obs: La conexión por caminos no es hereditaria.

$\boxed{\text{Prop}}$ Sean (X,T) e (Y,S) e.t., (X,T) conexo por caminos, $f : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ ap. continua suprayectiva. Entonces (Y,S) es conexo por caminos.

Dem: $\forall y_1, y_2 \in Y \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X$ t.q. $f(x_i) = y_i \; \forall i \Rightarrow \exists h : I \to (X,T)$ continua t.q. $h(0) = x_1$, $h(1) = x_2 \to f \circ h : I \longrightarrow (Y,S)$ cont.

$(f \circ h)(0) = y_1$, $(f \circ h)(1) = y_2$

Corolario: La conexión por caminos es invariante topológico.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\prod X_j, \prod T_j)$ conexo por caminos sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) conexo por caminos.

Dem: $\Rightarrow|$ —

$\Leftarrow|$ $\forall (x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J} \in \prod X_j \Rightarrow \forall j \in J$,

$\exists f_j : I \longrightarrow (X_j, T_j)$ continua t.q. $f_j(0) = x_j$ y

$f_j(1) = y_j \Rightarrow (f_j)_{j\in J} : I \longrightarrow (\prod X_j, \prod T_j)$ continua

t.q. $(f_j)_{j\in J}(0) = (x_j)_{j\in J}$ y $(f_j)_{j\in J}(1) = (y_j)_{j\in J}$

Obs: La conexión por caminos no es aditiva.

CAMBIO DE TERCIO.

Def: Sean (X,T) e (Y,S) e.t., $f, g : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ ap. continuas. Se dice que f es homótopa a g si $\exists H : X \times I \longrightarrow Y$ continua t.q. $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ $\forall x \in X$.

Se dice que H es una homotopía de f en g.

Se denota $f \simeq g$.

Ejemplo: Sea $C \subset \mathbb{R}^n$, C conexo $\forall X$ e.t., $\forall f : X \longrightarrow C$ continua es $f \simeq g$ ($H : X \times I \longrightarrow C$ t.q. $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ $\Rightarrow H$ continua).

Prop: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. La relación de homotopía entre ap. continuas de (X,T) en (Y,S) es relación de equivalencia.

Dem:

Reflexiva: $\forall f : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ continua. Sea $H : X \times I \longrightarrow Y$ t.q. $H(x,t) = f(x)$ y $H = f \circ p_1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow H$ es homotopía de f a f : $f \simeq f$.

Simétrica: $f, g : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ continua. $f \simeq g \Rightarrow$

$\exists H : X \times I \longrightarrow Y$ continua t.q. $H(x,0) = f(x)$ y

$H(x,1) = g(x)$

Sea $H' : X \times I \longrightarrow Y$ continua.
$(x,t) \longrightarrow H(x, 1-t)$

$H'(x,1) = g(x)$ y $H'(x,1) = f(x) \Rightarrow g \simeq f$.

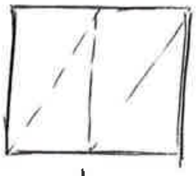
Transitiva: $f, g, h : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ continua. t.q.

$f \simeq g$ y $g \simeq h \Rightarrow \begin{cases} \exists H_1 : X \times I \longrightarrow Y \text{ continua} \\ \exists H_2 : X \times I \longrightarrow Y \text{ continua.} \end{cases}$

y $\begin{cases} H_1(x,0) = f(x) \\ H_1(x,1) = g(x) \end{cases}$ $\begin{cases} H_2(x,0) = g(x) \\ H_2(x,1) = h(x) \end{cases}$

Sea $H : X \times I \longrightarrow Y$ continua.
$(x,t) \longrightarrow \begin{cases} H_1(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

Bien definida:



$X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ cerrado de X en I.

I tiene la top. usual : $I = ([0,1], T_u)$

$H|_{X \times [0, \frac{1}{2}]}$ y $H|_{X \times [\frac{1}{2}, 1]}$ continua $\Rightarrow H$ continua

$H(x,0) = H_1(x,0) = f(x)$
$H(x,1) = H_2(x,1) = h(x)$ $\Rightarrow f \simeq h$.

Def: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. Se dice que (X,T) tiene el mismo tipo de homotopía que (Y,S) si $\exists f : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ continua y $\exists g : (Y,S) \longrightarrow (X,T)$ continua t.q. $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$

En ese caso se dice que f es una equivalencia homotópica y que g es una inversa homotópica suya.

Prop: La relación es de forma que el mismo tipo de homotopía es de equivalencia en cualquier conjunto de e.t.

Dem: Reflexiva: $1_X : X \longrightarrow X \Rightarrow 1_X$ es equivalencia homotópica.

Simétrica: X homotóp. equivalente a $Y \Rightarrow \exists f : X \longrightarrow Y$ continua y $g: Y \longrightarrow X$ continua t.q. $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y \Rightarrow Y$ homotóp. equivalente a X.

Transitiva: X homotóp. equivalente a $Y \Rightarrow \exists f : X \to Y$ cont. $g : Y \longrightarrow X$ continua t.q. $g \circ f \simeq 1_X$, $f \circ g \simeq 1_Y$.

Y homotóp. equivalente a $Z \Rightarrow \exists f' : Y \longrightarrow Z$ conti. $g' : Z \longrightarrow Y$ continua t.q. $g' \circ f' \simeq 1_Y$, $f' \circ g' \simeq 1_Z$.

$$(f' \circ f) \circ (g \circ g') = f' \circ (f \circ g) \circ g' \simeq$$

$$\simeq f' \circ 1_Y \circ g' \simeq f' \circ g' \simeq 1_Z$$

$\Rightarrow X$ homotóp. equivalente a Z.

Obs: Dos e.t. homeomorfos son homotóp. equivalentes. (Homeom. es más fuerte que hom. equivalente).

Prop: Sea (X, T) e.t. Entonces (X, T) es contráctil sii tienen el el mismo tipo de homotopía que un punto.

Dem: $\Rightarrow)$ $\exists x_0 \in X$, $1_X \simeq C_{x_0}$ (aplicación cte. de valor x_0)

$C_{x_0} : X \longrightarrow \{x_0\}$

$j : \{x_0\} \hookrightarrow X$ ap. continua

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} j \circ C_{x_0} = C_{x_0} \simeq 1_X \\ C_{x_0} \circ j = 1_{\{x_0\}} \end{array} \right. \Rightarrow j \text{ es equivalencia homotóp. } C_{x_0} \text{ inversa homotóp. suya.}$$

4 | Con la top. trivial $\{\emptyset, \{y\}\}$ que coincide con la discreta y X del mismo tipo de homotopía.

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists f : X \longrightarrow \{y\} \text{ continua} \\ \exists g : \{y\} \longrightarrow X \text{ continua} \end{cases} \text{ t.q. } \begin{matrix} g \circ f \simeq 1_X \\ f \circ g \simeq 1_{\{y\}} \end{matrix} \Rightarrow$$

X cte.

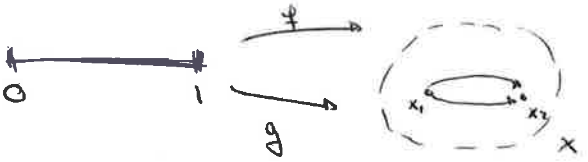
Def: Sea X e.t. y $A \subset X$. Se dice que A es un retracto de X si $\exists z : X \longrightarrow A$ continua t.q. $z|_A = 1_A$. En este caso se dice que z es una retracción de X en A.

Def: Sea (X, T) e.t. $A \subset X$. Se dice que A es un retracto por deformación de X si $\exists z : X \longrightarrow A$ retracción t.q. $j \circ z \simeq 1_X$ donde $j : A \hookrightarrow X$

Obs: Si X e.t. y A retracto por deformación de X, entonces X y A son homotópicamente equivalentes.

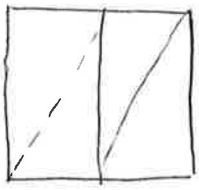
Def: Sean X e Y e.t. $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas y $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Se dice que f es homótopa a g relativamente en A si $\exists H : X \times I \longrightarrow Y$ continua t.q. $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ $\forall x \in X$ y $H(a,t) = f(a) = g(a)$ $\forall a \in A$, $\forall t \in I$

Obs: $f \simeq_A g \Rightarrow f|_A = g|_A$



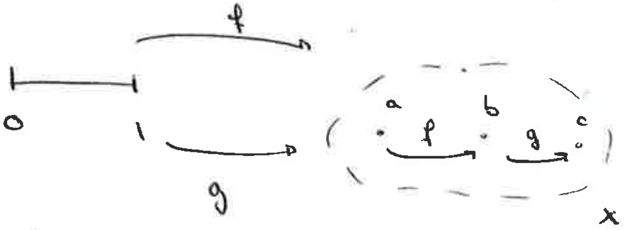
Def: Sea X e.t., $a, b, c \in X$ y f camino en X de origen a y extremo b, g camino de X de origen b y extremo c. Se llama producto del camino f y el camino g a $(f \cdot g)(t) =$

$$= \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

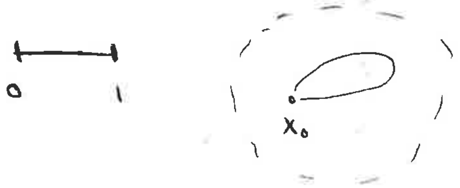


Bien definida.
Continua por ser producto de continuas.

Obs: Para que esté bien definido el producto de dos caminos es imprescindible que coincidan el extremo de f con el origen de g.



Def: Sea X e.t. Se llama lazo de X con base x_0 a cualquier camino f de origen y extremo x_0.

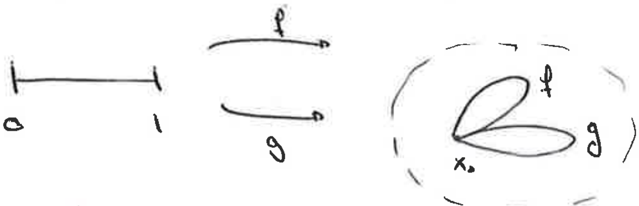


Def: Sea X e.t., $x_0 \in X$ y f, g lazos en X con base x_0. Se dice que f es lazo homótopo a g si $f \simeq_{\{0,1\}} g$ $f|_{\{0,1\}} = g|_{\{0,1\}}$

Obs: La relación de homotopía de ap. continuas relativamente a un subespa. es relación de equivalencia en el conjunto de ap. continuas entre 2 e.t.

Obs: La relación de homotopía de lazos con base $x \in X$, es relación de equivalencia en el conjunto de lazos continuos.

Obs: Sea X e.t. y $x_0 \in X$. f y g lazos con base x_0, el producto de f y g está definido y es lazo con base x_0.

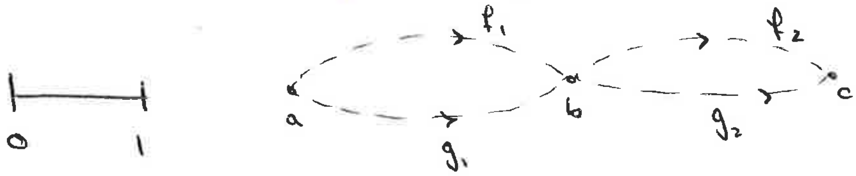


$(f*g)(t) : [0,1] \to X$
lazo con base x_0 t.q.
$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$: $f(2t)$
$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$: $g(2t-1)$
BIEN DEF

Prop: Sea X e.t. y f_1, g_1 caminos en X g_1.

Sean f_2, g_2 caminos en X t.q. $f_2 \simeq_{\{0,1\}} g_2$ y $f_1(1) = f_2(0)$

Entonces $f_1 \cdot f_2 \simeq_{\{0,1\}} g_1 \cdot g_2$



Dem: $\exists H_1 : I \times I \longrightarrow X$ continua

$$\begin{aligned}
(x,0) &\longrightarrow f_1(x)\\
(x,1) &\longrightarrow g_1(x)\\
(0,t) &\longrightarrow f_1(0) = g_1(0)\\
(1,t) &\longrightarrow f_1(1) = g_1(1)
\end{aligned}$$

$\exists H_2 : I \times I \longrightarrow X$ continua.

$$\begin{aligned}
(x,0) &\longrightarrow f_2(x)\\
(x,1) &\longrightarrow g_2(x)\\
(0,t) &\longrightarrow f_2(0) = g_2(0)\\
(1,t) &\longrightarrow f_2(1) = g_2(1)
\end{aligned}$$

$$(f_1 * f_2)(s) = \begin{cases} f_1(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Sea $H : I \times I \longrightarrow X$

$$(s,t) \longrightarrow \begin{cases} H_1(2s,t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ & t \in I \\ H_2(2s-1,t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

H Continua?: $s = \frac{1}{2}$

$[0,\frac{1}{2}] \times I$, $[\frac{1}{2},1] \times I$ cerrados y recubren.

H Bien definida?: $\begin{array}{l} H_1(1,t) = f_1(1) \\ \qquad\qquad\quad \shortparallel \\ H_2(0,t) = f_2(0) \end{array} \Rightarrow$ bien def.

$$H(s,0) = \begin{cases} H_1(2s,0) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H_2(2s-1,0) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \\ \quad \shortparallel & \\ f_2(2s-1) & \end{cases} = f_1 * f_2$$

$$H(s,1) = \begin{cases} H_1(2s,1) \\ H_2(2s-1,1) \\ \quad \shortparallel \\ g_2(2s-1) \end{cases} = (g_1 * g_2)(c$$

$$H(0,t) = H_1(0,t) = f_1(0) = (f_1 * f_2)(0) =$$

$$= g_1 * g_2\,(0)$$

$$H(1,t) = (g_1 * g_2)(1) = (f_1 * f_2)(1)$$

$$\Rightarrow f_1 * f_2 \simeq_{\{0,1\}} g_1 * g_2$$

Corolario: Sea X e.t. : $\forall x_0 \in X$, f_1, g_1 y f_2, g_2 lazos en X con base x_0. $f_1 \simeq_{\{0,1\}} g_1$, $f_2 \simeq_{\{0,1\}} g_2 \Rightarrow f_1 * f_2 \simeq_{\{0,1\}} g_1 * g_2$

Notación: $\pi_1(X, x_0)$ es el conjunto cociente de los lazos en X con base x_0 respecto a la relación de equivalencia de lazos.

$\forall f$ lazo en X con base x_0, $[f]$ es la clase.

Def: Sea $\pi_1(X, x_0)$, $\forall [f], [g] \in \pi(X, x_0)$. Se define

$[f]*[g] := [f*g]$

Teorema: Sea X e.t. y $x_0 \in X$. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ con la operación $*$, es un grupo.

Dem: Asociatividad: $\forall [f], [g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$

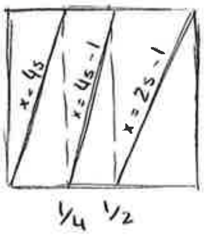
$([f]*[g])*[h] = [f]*([g]*[h]) \Leftrightarrow$

$\forall f, g, h$ lazos en X con base en x_0 : $(f*g)*h \simeq_{\{0,1\}} f(g*h)$?

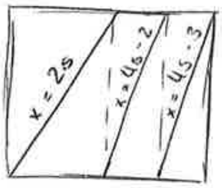
$$1 \rightarrow ((f*g)*h)(s) = \begin{cases} f(4s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ g(4s-1) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

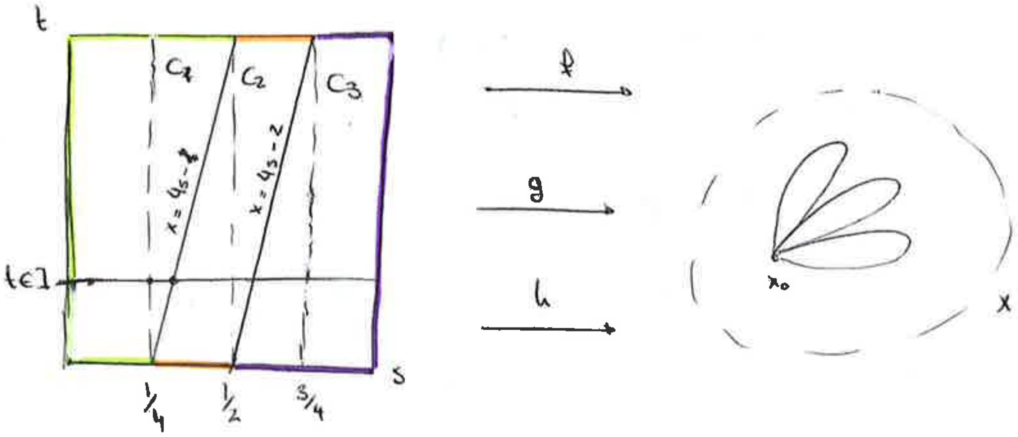
$$2 \rightarrow (f*(g*h))(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(4s-2) & \frac{1}{2} \leq s \leq 3/4 \\ h(4s-3) & 3/4 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

1



2

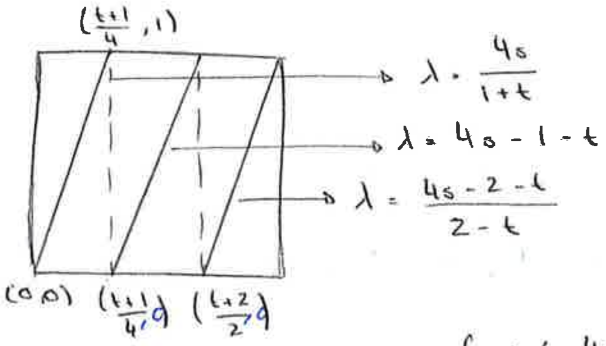




$\forall t \in I = [0,1]$

$$[0,1] = \left[0, \frac{t+1}{4}\right] \cup \left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right] \cup \left[\frac{t+2}{4}, 1\right]$$

para t prefijado



Definimos : $H(s,t) := \begin{cases} f\left(\frac{4s}{1+t}\right) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ g(4s-1-t) & \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ h\left(\frac{4s-2-t}{2-s}\right) & \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad t \in I$

C_1, C_2, C_2 cerrados de I^2 y recubren $\Rightarrow$ H continua.

y $H|_{C_i}$ continua $\forall i$.

$$H(s,0) = \begin{cases} f(4s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ g(4s-1) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = ((f*g)*h)(s)$$

$*$ $H(s,1) = (f*(g*h))(s)$ $\quad$ $*$ $H(0,t) = f(0) = ((f*g)*h)(0) =$

$= (f*(g*h))(0)$

$*$ $H(1,t) = h(1) = ((f*g)*h)(1) =$

$= (f*(g*h))(1)$

Coinciden extremos $\Rightarrow$ homotopía.

Elemento neutro: Sea c ap. cte de valor x_0, $c: I \longrightarrow X$

Veamos que $\forall [f] \in \Pi_1(X, x_0)$, $[f]*[c] = [f] = [c]*[f]$

$\Leftrightarrow \forall f$ lazo en X con base x_0, $f * c \simeq_{\{0,1\}} f \simeq_{\{0,1\}} c*f$?

Elemento simétrico: $\forall f$ camino en X

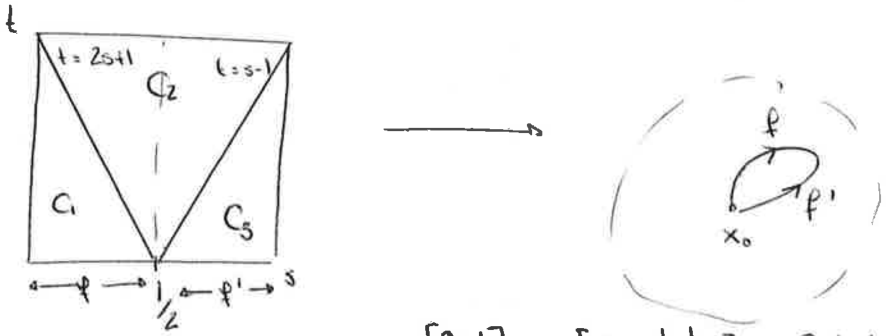
$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow X \\ t &\longrightarrow f(1-t) \end{aligned}$$

f' camino opuesto.

Veamos que $\forall [f] \in \Pi_1(X, x_0)$, $[f]*[f'] = [c] =$
$= [f']*[f]$

$f * f' \simeq_{\{0,1\}} c \simeq_{\{0,1\}} f' * f$

$$(f*f')(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f'(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



$[0,1] = [0, \frac{1-t}{2}] \cup [\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}] \cup [\frac{1+t}{2}, 1]$

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ f(1-t) & \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2} \qquad t \in I \\ f'(2s-1) & \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

C_i cerrados en I^2, $H|_{C_i}$ continua $\forall i \Rightarrow H$ ap. continua.

$\forall t \in I$ $f * f' \simeq_{\{0,1\}} c \simeq_{\{0,1\}} f' * f$. Análogamente $(f')' = f$

Def: Sea X e.t. y $x_0 \in X$. Entonces $\Pi_1(X, x_0)$ con la operación $*$, se llama grupo fundamental de X con base x_0.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & x \arrow[r, "g"] & x \arrow[r, "h"] & x \end{tikzcd}$$

$(f*g)*h \simeq_{\{0,1\}} f*(g*h)$

en X, t.q. $f(1) = g(0)$, $g(1) = h(0)$,

$\simeq_{\{0,1\}} f*(g*h)$

$$\begin{tikzcd} C_a \arrow[r, "f"] & C_b \end{tikzcd}$$

$C_a * f \simeq_{\{0,1\}} f \simeq_{\{0,1\}}$

$f * C_b$

q. $f(0) = a$, $f(1) = b$, entonces $C_a * f \simeq_{\{0,1\}} f \simeq$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a & b \arrow[l, "f'"'] \end{tikzcd}$$

$f * f' \simeq_{\{0,1\}} C_a$

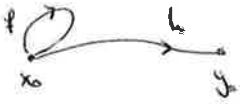
$f' * f \simeq_{\{0,1\}} C_b$

q. $f(0) = a$, $f(1) = b$, entonces $f * f' \simeq_{\{0,1\}}$

$\simeq_{\{0,1\}} C_b$.

Prop: Sea X e.t. conexo por caminos, $\forall x_0, y_0 \in X$ es $\Pi_1(X, x_0)$ isomorfo a $\Pi_1(X, y_0)$.

Dem:

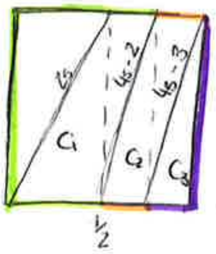


$\exists h : I \longrightarrow X$ continua, $h(0) = x_0$, $h(1) = y_0$

$\forall f$ lazo en X con base x_0, $h' * (f * h)$ lazo en X con base y_0.

Si g es lazo en X con base x_0, $f \simeq_{\{0,1\}} g \Rightarrow \exists H$ homotopía de f en g.

$$(h' * (f * h))(s) = \begin{cases} h'(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(4s-2) & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ h(4s-3) & \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



Sea $F : I \times I \longrightarrow X$

$$F(s,t) := \begin{cases} f'(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h'(4s-2) & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ h(4s-3) & \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad \forall t \in I.$$

$C_1 = [0, \frac{1}{2}] \times I \qquad C_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times I \qquad C_3 = [\frac{3}{4}, 1] \times I$

homotopía de F a cada uno de estos es continua porque f' y h, h' son continuas.

$$h' * (f * h) \simeq_{\{0,1\}} h' * (g * h) \Rightarrow \exists \varphi : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(X, y_0)$$
$$[f] \longrightarrow [h' * f * h]$$

ap.

Veamos que φ isomorfismo: $\forall [f_1], [f_2] \in \Pi_1(X, x_0)$

$$\varphi([f_1] * [f_2]) = \varphi([f_1 * f_2]) = [h' * (f_1 * f_2) * h] \underset{\text{asocial.}}{\overset{\uparrow}{=}} [(h' * f_1) * (f_2 * h)] \underset{h * h' \simeq_{\{0,1\}} C_{x_0}}{\overset{\uparrow}{=}}$$
$$= [(h' * f_1) * (h * h') * (f_2 * h)] =$$
$$= [h' * (f_1 * h) * h' * (f_2 * h)] =$$
$$= [h' * (f_1 * h)] * [h' * (f_2 * h)] =$$
$$= \varphi([f_1]) * \varphi([f_2])$$

Isomorfismo: $\forall a, b \in X$
$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
φ inyectiva, sobreyectiva
Homomorfismo: $f(ab) = f(a)f(b)$
$f(e) = e'$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

$$\psi : \Pi_1(X, y_0) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)$$
$$[g] \longrightarrow [h * (g * h')]$$
t.q. ψ isomorfismo.

Veamos que $\psi \circ \varphi = 1_{\Pi_1(X, x_0)}$ y $\varphi \circ \psi = 1_{\Pi_1(X, y_0)}$

$$(\psi \circ \varphi)([f]) = \psi(\varphi([f])) = \psi([h' * (f * h)]) =$$
$$= [h * (h' * f * h) * h'] = [(h * h') * f * (h * h')] \simeq$$
$$= [C_{x_0} * f * C_{x_0}] = [f] \quad \forall f \in \Pi_1(X, x_0)$$

Si X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es trivial. (cualesquiera $a, b \in X$, están unidos por una recta en X)

. conexo por caminos. Se llama grupo fundamental de X

undamental de X con base x $\forall x \in X$.

Obs: Sean X, Y e.t. y $\varphi : X \longrightarrow Y$ ap. continua, f lazo en X con base $x_0 \in X$, entonces $\varphi \circ f$ es lazo en Y.

φ induce una ap. $\varphi_* : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, \varphi(x_0))$
$$[f] \longrightarrow \varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$$

Prop. Sean X, Y e.t. $\varphi : X \longrightarrow Y$ ap. continua $\forall x_0 \in X$. Entonces $\varphi_* : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, \varphi(x_0))$ es homomorfismo de grupos.
$$[f] \longrightarrow [\varphi \circ f]$$

Dem: f_1, f_2 lazos en X con base x_0

$$(f_1 * f_2)(t) = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Homomorfismo de grupos

$\forall a, b \in X$

$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

$$(\varphi \circ (f_1 * f_2))(t) = \begin{cases} (\varphi \circ f_1)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\varphi \circ f_2)(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\varphi \circ f_1) * (\varphi \circ f_2)$$

$$\varphi([f_1] * [f_2]) = \varphi([f_1 * f_2]) = [\varphi * (f_1 * f_2)] =$$

$$= [(\varphi \circ f_1) * (\varphi \circ f_2)] = [\varphi \circ f_1] * [\varphi \circ f_2] =$$

$$= \varphi_*([f_1]) * \varphi_*([f_2])$$

Prop: 1) $\forall X$ e.t., $\forall x_0 \in X$. $\varphi = 1_X \Rightarrow \varphi_* = 1_{\pi_1(X, x_0)}$

2) $\forall X, Y, Z$ e.t. $\forall x_0 \in X$, $\varphi : X \to Y$ ap. continua y $\psi : Y \to Z$ ap. continua. $\Rightarrow (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, (\psi \circ \varphi)(x_0))$

3) $\varphi, \psi : X \to Y$ continua t.q. $\varphi \simeq_{\{x_0\}} \psi \Rightarrow \varphi_* = \psi_*$

4) $r : X \to A$ retracción y $j : A \hookrightarrow X \Rightarrow \forall a \in A$,
$r_* = \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ es epimorfismo y
$j_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ es monomorfismo.

Dem: 1) $\varphi = 1_X : X \to X$

$\varphi_*([f]) = [1_X \circ f] = [f] \Rightarrow \varphi_* = 1_{\pi_1(X, x_0)}$

$\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$.

2) $\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$

$(\psi \circ \varphi)([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = [\psi \circ (\varphi \circ f)]$

$= \psi_*[\varphi_*[f]] \Rightarrow (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$

3) $x_0 \in X$, $\varphi \simeq_{\{x_0\}} \psi$ $\Longleftrightarrow$ $\exists H : X \times I \longrightarrow Y$ homotopía.

$$(x_0, t) \longrightarrow \varphi(x_0) \circ \psi(x_0)$$

$\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$: f lazo en X con base x_0 $\overset{?}{\Rightarrow}$

$\varphi \circ f \simeq_{\{0,1\}} \psi \circ f$.

Sea $F : I \times I \longrightarrow Y$

$(s,t) \longrightarrow H(f(s),t)$ $\Rightarrow$ F continua.

$(0,t) \longrightarrow H(x_0,t) = \varphi(x_0) \circ H(x_0)$

$(1,t) \longrightarrow H(x_0,t) = \varphi(x_0) \circ H(x_0)$ $\forall t \in I$.

$\Rightarrow$ F homotopía.

$\Rightarrow \varphi_*([f]) = \psi_*([f]) \Rightarrow \varphi_* = \psi_*$ (mismo homomor.)

4) $r \circ j = 1_A \underset{1)}{\Rightarrow} (r \circ j)_* = (1_A)_* = 1_{\pi_1(A,a)}$

$\Rightarrow \begin{cases} j_* \text{ inyectiva} \Rightarrow \text{monomorfismo} \\ r_* \text{ suprayectiva} \Rightarrow \text{epimorfismo.} \end{cases}$

<u>Corolario</u>: Si X, Y e.t. y $\varphi : X \longrightarrow Y$ homeomorfismo, entonces $\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, \varphi(x))$ es isomorfismo $\forall x \in X$.

<u>Dem</u>: $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_* \underset{1)\,2)}{\Rightarrow} (\varphi^{-1})_* \circ \varphi_* = 1_{\pi_1(X,x)}$

$\varphi \circ \varphi^{-1} = 1_Y \Rightarrow \varphi_* (\varphi^{-1})_* = 1_{\pi_1(Y, \varphi(x))}$

$\Rightarrow \varphi_*$ isomorfismo $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$

<u>Corolario</u>: Sean X, Y e.t., $x \in X$ y $\varphi_1, \varphi_2 : X \longrightarrow Y$ ap. continua t.q. $\varphi_1 \simeq \varphi_2$. Entonces $\exists h$ es un camino en Y que conecta $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ t.q. $\varphi_{1*} = \varphi_h \circ \varphi_{2*}$ siendo φ_h un isomorfismo t.q.

$\varphi_h([g]) = [h * (g * h')]$

<u>Dem</u>: $\exists H : X \times I \longrightarrow Y$ continua t.q. H homotopía de φ_1 en φ_2

Sea $h : I \longrightarrow Y$
$t \longrightarrow H(x,t)$
$\Rightarrow$ h camino en Y que conecta $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$

$\varphi_{1*} : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi_1(x))$

$\varphi_{2*} : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi_2(x))$

$$\varphi_h : \pi_1(Y, \varphi_2(x)) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi_1(x))$$
$$[g] \longrightarrow [h * (g * h')]$$

$$\varphi_{1*}([f]) = [\varphi_1 \circ f] \quad \forall [f] \in \pi_1(x, x)$$

$$\varphi_h \circ \varphi_{2*}([f]) = \varphi_h([\varphi_2 \circ f]) = [h * (\varphi_2 \circ f) * h']$$

$$F : I^2 \longrightarrow Y$$
$$(s,t) \longrightarrow \begin{cases} h(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ H\left(f\left(\frac{4s+2t-2}{3t+1}, 1-t\right)\right) & \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{3+t}{4} \\ h'(4s-3) & \frac{3+t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ F homotopía entre los dos lazos.

Prop: Sean X e Y e.t. $x \in X$ y $\varphi : X \to Y$ equivalencia homotópica y ψ inversa homotópica. Entonces $\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ es isomorfismo y $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \longrightarrow \pi_1(X, \psi(x))$ es isomorfismo.

Dem: $\psi \circ \varphi \simeq 1_* \Rightarrow \exists h$ camino en X que conecta $(\psi \circ \varphi)(x)$ y x t.q. $(\psi \circ \varphi)_* = (\psi_* \circ \varphi_*) =$
$= \varphi_*(1_x) = \varphi_*$

$\varphi \circ \psi \simeq 1_Y \Rightarrow \exists k$ camino en Y que conecta $(\varphi \circ \psi)(\varphi(x))$ y $\varphi(x)$ t.q. $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ (1_Y)_*$

φ_h y φ_k son isomorfos $\Rightarrow \varphi_*, \psi_*$ son isomorfismos.

Corolario: Si X, Y e.t. son homotópicamente equivalentes y conexos por caminos entonces $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, \varphi(x))$ (homeomorfos)

Prop: Sean X, Y e.t., $a \in X$ y $b \in Y$. $\pi_1(X \times Y, (a,b)) \cong \pi_1(X,a) \times \pi_1(Y,$

Dem: $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$, $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ continuas $\Rightarrow \begin{cases} p_{1*} : \pi_1(X \times Y, (a,b)) \to \pi_1(X, a) \\ p_{2*} : \pi_1(X \times Y, (a,b)) \to \pi_1(Y, b) \end{cases}$

homomorfismos $\Rightarrow F = (p_{1*} * p_{2*}) : \pi_1(X \times Y, (a,b)) \to \pi(X,a) * \pi(Y,$

és homomorfismo.

F inyectiva: $F([f]) = F([g]) \Leftrightarrow \forall i = 1,2,\ p_{i*}([f]) =$

$= p_{i*}([g])$

$\Leftrightarrow \forall i = 1,2 \quad [p_i \circ f] = [p_i \circ g] \Rightarrow \exists H_i$ homotopía $\forall i = 1,2$

de $p_i \circ f$ en $p_i \circ g \Rightarrow H = (H_1, H_2) : I^2 \longrightarrow X \times Y$ continua

$$\begin{aligned} (x,0) &\longrightarrow (H_1(x,0), H_2(x,0)) \\ (x,1) &\longrightarrow g(x) \\ (0,t) &\longrightarrow (H_1(0,t), H_2(0,t)) \\ (1,t) &\longrightarrow (H_1(1,t), H_2(1,t)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow [f] = [g] \Rightarrow F$ inyectiva.

F suprayectiva: $\forall [f_1], [f_2] \in \pi_1(X,a) \times \pi_1(Y,b)$

$$f : I \longrightarrow X \times Y$$

$$t \longrightarrow \begin{cases} (f_1(2t), b) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (a, f_2(2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} f_1(1) = a \\ f_2(0) = b \end{matrix} \quad \text{bien definida}$$

$f(0) = (a,b) = f(1) \Rightarrow f$ lazo en $X \times Y$ con base (a,b).

$$(p_1 \circ f)(t) = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ a & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (f_1 * c_a)(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_1 \circ f = f_1 * c_a \simeq_{\{0,1\}} f$

$\Rightarrow [p_1 \circ f] = [f_1]$

$$(p_2 \circ f)(t) = \begin{cases} b & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow p_2 \circ f = c_b * f_2 \simeq_{\{0,1\}} f_2$$

$\Rightarrow [p_2 \circ f] = [f_2]$

$F([f]) = (p_{1*}([f]), p_{2*}([f])) = ([p_1 \circ f], [p_2 \circ f]) =$

$= ([f_1], [f_2])$

Obs: Sea $\mathbb{D}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$$
$$x \longrightarrow \cos 2\pi x + i \operatorname{sen} 2\pi x$$

φ homomorfismo de $(\mathbb{R}, +)$ en $(\mathbb{S}^1, \cdot)$

$$\varphi(x+y) = \cos 2\pi(x+y) + i \operatorname{sen} 2\pi(x+y) = (\cos 2\pi x + i \operatorname{sen} 2\pi x]$$
$$\cdot (\cos 2\pi y + i \operatorname{sen} 2\pi y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

$\Rightarrow \varphi$ continua y abierta.

$\varphi\big|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} : (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ homeomorfismo.

$\Rightarrow h = \varphi\big|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} : \mathbb{S}^{-1} \setminus \{-1\} \longrightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ homeomorfismo.

Teorema: Sea f camino en $\mathbb{S}^1$ de origen 1, $\exists!\, \tilde{f}$ camino en $\mathbb{R}$ de origen 0 t.q. $\varphi \circ \tilde{f} = f$.

Dem: existencia: $\forall z, z' \in \mathbb{S}^1$, $d(z, z') < 1 \underset{\substack{\uparrow \\ z \neq -z'}}{\Rightarrow} \frac{z}{z'} \neq -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow h\left(\frac{z}{z'}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$f : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ continua $\underset{\substack{\uparrow \\ I \text{ metrizable compacto.}}}{\Rightarrow}$ f uniformemente continua

$\exists \varepsilon > 0$ t.q. $|s - t| < \varepsilon \Rightarrow d(f(s) f(t)) < 1$

$\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n} < \varepsilon$: $\left| \frac{n-(i+1)}{n} - \frac{n-i}{n} t \right| =$

$= |t| \frac{1}{2} < \varepsilon \quad \forall t \in I$. $\forall i = 0, \ldots, n-1$

Supongamos que $n = 1$, aparecen 0 y 1 

$n = 2$, $i = 0$ 

$\bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{n-(i-1)}{n}, \frac{n-i}{n} \right)$

$$\Rightarrow d\left(f\left(\frac{n-(i+1)}{n} t\right), f\left(\frac{n-i}{n} t\right)\right) < 1$$

$$\Rightarrow h\left(\frac{f(\frac{n-i}{n}, t)}{f(\frac{n-(i+1)}{n} t)} \right) \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

.... Continua.

Lema: Sean f, g lazos en S^1 de base 1 y H homotopía de f en g relativa a $\{0,1\}$, $\exists!\ \hat{H}$ homotopía de $\hat{f}$ en $\hat{g}$ relativa a $\{0,1\}$ t.q. $\varphi \circ \hat{H} = H$

Obs: Si f, g lazos en S^1 con base 1, $f \simeq_{\{0,1\}} g \Rightarrow \hat{f}, \hat{g}$ caminos de origen 0 en $\mathbb{R}$ t.q. $\hat{f} \simeq_{\{0,1\}} \hat{g} \Rightarrow \hat{f}(0) = \hat{g}(0) = 0$ y $\hat{f}(1) = \hat{g}(1) \in Z_p$

$$(\varphi \circ \hat{f})(1) = f(1) = 1$$
$$\overset{\shortparallel}{\varphi(\hat{f}(1))} \Rightarrow \hat{f}(1) \in Z_p \qquad \text{Análogamente } \hat{g}(1) \in Z_p$$

Esto permite definir una ap. $\alpha : \Pi_1(S^1, 1) \longrightarrow Z_p$ (grado del
$[f] \longrightarrow \hat{f}(1)$ lazo f)

Teorema: El grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al grupo aditivo de los enteros.

Importante

Dem: α es isomorfismo de grupos.

$\forall [f], [g] \in \Pi_1(S^1, 1) \Rightarrow \exists!\ \hat{f}, \hat{g}$ caminos en $\mathbb{R}$ de origen 0 t.q. $\varphi \circ \hat{f} = f$ y $\varphi \circ \hat{g} = g$

$\hat{f}(1) = a$ y $\hat{g}(1) = b \in Z_p$

Sea $\hat{k} : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longrightarrow a + \hat{g}(t)$ $\Rightarrow \hat{k}$ camino en $\mathbb{R}$ de origen a y extremo $a+b$. Definida en $\hat{f} * \hat{k}$

$$(\varphi \circ (\hat{f} * \hat{k}))(t) = ((\varphi \circ \hat{f}) * (\varphi \circ \hat{k}))(t) \underset{\uparrow}{=} (f * g)(t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \hat{k})(t) &= \varphi(a + g(t)) = \\ &= \varphi(a) \circ \varphi(\hat{g}(t)) = \\ &= \varphi(\hat{f}(1)) \circ g(t) = \underset{1}{f(1)} \circ g(t) \\ &= g(t)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \hat{f} * \hat{k}$ camino en $\mathbb{R}$ de origen 0

$$\Rightarrow \widetilde{f \circ g} = \tilde{f} * \tilde{k}$$

$$[f] * [g] = [f * g]$$

$$\alpha([f] * [g]) = \widetilde{f * g}(1) = (\hat{f} * \hat{k})(1) = \hat{k}(1) =$$
$$= a + \hat{g}(1) = a + b = \hat{f}(1) + \hat{g}(1) = \alpha([f]) + \alpha([g])$$

α suprayectiva: $\forall m \in \mathbb{Z}_p$. Sea $\begin{array}{l} \hat{f}: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \longrightarrow mt \end{array} \Rightarrow \hat{f}$ continua y $\hat{f}(0)=0$

$\varphi(\hat{f}(1)) = \varphi(m1) = \varphi(m) = 1$

$\varphi(\hat{f}(0)) = \varphi(0) = 1 \Rightarrow \varphi \circ \hat{f}$ lazo con base 1.

$\alpha([f]) = \hat{f}(1) = m$

α monomorfismo: $\ker([f]) = 0$:

$\forall \quad [f] \in \Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ t.q. $\alpha([f]) = 0$, $\hat{f}(1) = 0$

$\Rightarrow \tilde{f}$ lazo en $\mathbb{R}$ con base 0 $\underset{\mathbb{R} \text{ contráctil}}{\Rightarrow} \tilde{f} \simeq_{\{0,1\}} \hat{c}_0$

$\Rightarrow f = \varphi \circ \hat{f} \simeq_{\{0,1\}} \varphi \circ \hat{c}_0 : I \longrightarrow \mathbb{S}^1 \Rightarrow [f] = [c_1]$ elemento neutro de $\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

Prop: La circunferencia no es retracto del disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1\}$

Dem: Si $\exists\ r: D \longrightarrow \mathbb{S}^1$ retracción $\Rightarrow r_*: \underset{\overset{\wr\wr}{0}}{\Pi_1(D)} \longrightarrow \underset{\overset{\wr\wr}{\mathbb{Z}_p}}{\Pi_1(\mathbb{S}^1)}$ $\lightning$

Teorema del punto fijo de Brower (dim 2): Toda ap. continua del disco en sí mismo tiene algún punto fijo.

Dem: Si $\exists f: D \longrightarrow D$ continua t.q. $f(x) \neq x \quad \forall x \in D$

Sea R_x la semirrecta abierta de extremo $f(x)$ determinado por x

$\begin{array}{l} r: D \longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ \quad x \longrightarrow R_x \cap \mathbb{S}^1 \end{array} \Rightarrow r$ continua y los puntos de la circunf. quedan fijos.

$r|_{\mathbb{S}^1} = 1_{\mathbb{S}^1} \Rightarrow r$ retracción $\lightning$

Def: Sea X e.t. Se dice que es simplemente conexo si es conexo por caminos y su grupo fundamental es trivial.

Prop: Si X e Y e.t. del mismo tipo de homotopía y X es simplemente conexo, Y también lo es.

$\exists f: X \longrightarrow Y$ cont.
$\exists g: Y \longrightarrow X$ cont. t.q. $g \circ f \simeq 1_X$ $f \circ g \simeq 1_Y$

Dem: $\exists f: X \longrightarrow Y$ continua.
$\exists g: Y \longrightarrow X$ continua. t.q. $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$

$\Rightarrow \exists H: Y \times I \longrightarrow Y$ continua.
$(y,0) \longrightarrow f(g(y))$
$(y,1) \longrightarrow y$

$\Rightarrow Y = \bigcup_{y \in Y} H(\{y\} \times I) \cup f(X)$

$\Rightarrow \forall y \in I$, $H(\{y\} \times I) \cap f(X) \neq \emptyset$ y $H(y,0) = f(g(y))$ $\underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \forall y \in Y$, $H(\{y\} \times I)$, $f(X)$ conexo por caminos $\Rightarrow$

Y conexo por caminos.

$0 \simeq \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$

Corolario: El ser simplemente conexo es invariante topológico.

Prop: Todo e.t. contráctil es simplemente conexo.

Dem: X contráctil, $\forall x, y \in X$: $c_x, c_y : X \longrightarrow X$ ap. cte de valor x e y ($c_x \simeq c_y$)

$\Rightarrow \exists H: X \times I \longrightarrow X$ continua.
$(s,0) \longrightarrow x$
$(s,1) \longrightarrow y$

$\Rightarrow h: I \longrightarrow X$ continua
$t \longrightarrow H(x,t)$
$0 \longrightarrow x$
$1 \longrightarrow y$

$\underset{X \text{ contr.}}{\Rightarrow}$ X conexo por caminos.

Prop: Sean X e Y e.t. Entonces $X \times Y$ simplemente conexo sii X e Y simp. conexos.

Dem: $X \times Y$ conexo por caminos $\Leftrightarrow$ X, Y conexos por caminos.

$\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$

Obs: El ser simplemente conexo no es hereditario.

D contráctil y S^1 no (porque $\pi(S^1)$ no es trivial)

Obs: El cociente de un e.t simplemente conexo, no es necesariamente simplemente conexo.

Prop: Si X e.t. simplemente conexo y A retracto suyo, entonces A es simplemente conexo.

Dem: $\forall x, y \in A \subset X$, $\exists f : I \longrightarrow X$ $\Rightarrow$ $\exists r : X \longrightarrow A$ retracción

$$0 \longrightarrow x$$
$$1 \longrightarrow y$$

t.q. $\tilde{f} = r \circ f : I \longrightarrow A$ continua

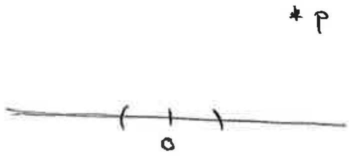
$$0 \longrightarrow x$$
$$1 \longrightarrow y$$

$r_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow (A, x)$ es epimorfismo $\Rightarrow \pi_1(A, x) \approx 0$

Def: Sea M e.t. Diremos que es una variedad topológica

La def. no recoge la def de borde. Si no la banda de Möbius y el cilindro serían variedad.

Obs: Variedad top. $\not\Rightarrow T_2$



$X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ t.q. $p \notin \mathbb{R}$

$T|_{\mathbb{R}} = T_u$ y $\mathcal{B}(p) = \{ (\overset{\circ}{U} \setminus \{0\}) \cup \{p\} \mid$ $\overset{\circ}{U}$ es ent. de 0 en T_u de $\mathbb{R} \}$

(X, T) variedad no T_2.

Obs: Variedad top. $\not\Rightarrow$ II A.N.

J no numerable, $\forall j \in J$, $X_j = (\mathbb{R}, T_u)$

$\sum_{j \in J} X_j$ variedad y no II A.N.

Obs: Variedad top. $\not\Rightarrow$ Compacto.

$\mathbb{R}^n$

Obs: Variedad top. $\not\Rightarrow$ conexo.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$ variedad top de dim n.

Ejemplo S^1 variedad top. de dim 1.

Ejemplo La superficie esférica y el toro son variedades top. de dim. 2.

Obs: Si M, N variedades top. de dimensión m y n $(n \neq m)$

$M + N$ no es variedad top.

Prop: Si M y N variedades top. de dim. n, entonces $M + N$ var. top de dim n

Obs: Variedad top. y conexo $\not\Rightarrow$ II. A.N.

Sea A conjunto no numerable con una buena ordenación.

$X = (0,1) \cup (A \times [0,1])$

$\uparrow$ $\uparrow$

Con el orden usual en $\mathbb{R}$. $\Rightarrow X$ variedad top.

$A \times [0,1]$ con el orden lexicográfico.

$\forall a \in A$, $\{a\} \times [0,1] \supset B$ de una base $\mathcal{B}$ de la top.

$\forall \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ no numerable $\Rightarrow X$ no cumple II A.N.

$C \neq \emptyset, X$ abierto y cerrado en $X \Rightarrow \forall a \in A$, $C \cap \{\{a\} \times [0,1]\}$ abierto y cerrado en $\{\{a\} \times [0,1]\}$

$\Rightarrow \exists U^{(a_0,0)}$ en X t.q. $U^{(a_0,0)} \subset C \Rightarrow \exists a' \in A$ t.q.

$(a', b') \subset U^{(a_0,0)}$ para algún $b \in [0,1] \Rightarrow \{a'\} \times [0,1] \subset C$ ↯

Def: Sea M variedad top. de dim n y $h: U \longrightarrow V$ homeomorfismo de un e.i.t. U de M en un abierto V de $\mathbb{R}^n$, se dice que h es una carta de M sobre $\mathbb{R}^n$. El abierto U se llama carta (h, U)

Def: Sea M variedad top. de dim. n, $\{(h_j, U_j) \mid j \in J\}$ familia de cartas de M. Se dice que es un atlas de M si $M = \bigcup_{j \in J} U_j$

Def: Sea M variedad top. de dim n, (h_j, U_j), (h_k, U_k) dos cartas de M t.q. $U_j \cap U_k \neq \emptyset$. La ap. $h_{jk} = h_k \circ h_j^{-1} : h_j(U_j \cap U_k) \rightarrow h_k$ $(U_j \cap U$ se llama cambio de cartas.

Def: Sea M variedad top. de dim n. y A un atlas suyo. Se dice que A es un atlas diferenciable si $\forall (h, U)$, (h', U') cartas de A $U \cap U' = \emptyset$ o $h \circ h'^{-1}$ es diferenciable.

Obs: Si (h_j, U_j), (h_k, U_k) son cartas de M: $h_{jj} = id$ y $h_{kj} = (h_{jk})^{-1}$

Obs: Si A es un atlas diferenciable, sus cartas son difeomorfismos.

Obs: Sea M variedad top y A atlas diferenciable de M, la colección de todas las cartas de M t.q. sus cambios de cartas de A son dif. es un atlas dif maximal.

Def: Sea M var. topológica, se dice que tiene una estructura dif. si tiene algún atlas dif. maximal.

Def: Se llama variedad diferenciable al par formado por una var. top. y una estructura dif.

Ejemplo U abierto de $\mathbb{R}^n$, $id : U \rightarrow U$

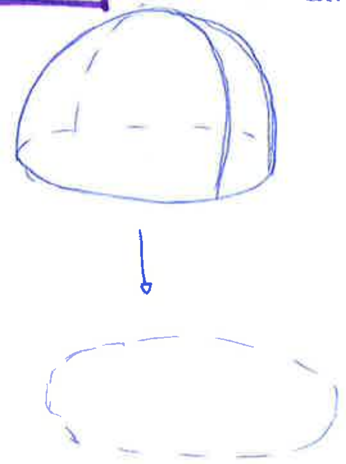
(id, U) es una carta de U y id. es difeo. $\Rightarrow$ U var. dif.

Ejemplo $\forall h : U \longrightarrow V$ dif. de U abierto de M en V abierto de $\mathbb{R}^n$

(h, U) carta. A atlas de M con las cartas difeo.

$D(A)$ atlas dif.

Ejemplo: $\mathbb{S}^n$ de dim n.



$U_{jk} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid (-1)^k x_j > 0\}$

$j = 1, \ldots, n$ $\quad k \in \mathbb{N}$.

$h_{jk} : U_{jk} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$

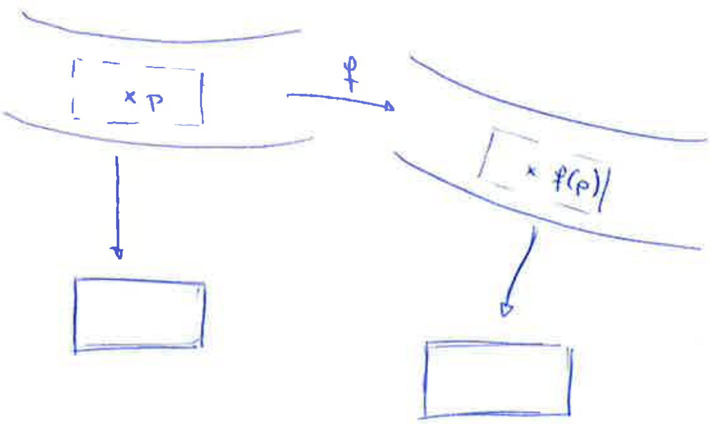
$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$

$h_{jk}^{-1} : B \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$

$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \longrightarrow (y_h)_{h=1, \ldots, n}$

$$y_h = \begin{cases} x_h & h = 1, \dots, j-1 \\ \left(1 - \sum_{h=1}^{n-1} x_h^2\right) & h = j \\ x_{h-1} & h = j+1, \dots, n \end{cases}$$

Def: Sean M, N var. dif. Se dice que f es diferenciable en un punto $p \in M$ si $\exists (h, U)$ carta de M y $\exists (k, V)$ carta de N t.q. $f(p) \in V$ y $k = f \circ h^{-1} : \underset{\subset \mathbb{R}^m}{h(U)} \longrightarrow \underset{\subset \mathbb{R}^n}{k(V)}$ sea dif.



En este caso, lo anterior se verifica para cualesquiera cartas.

Se dice que f es ap. dif. si es dif. $\forall p \in M$.

Obs: $\forall M$ var. dif., 1_M es dif.

Obs: $\forall M, N, P$ var. dif. $f: M \longrightarrow N$ y $g: N \longrightarrow P \Rightarrow g \circ f$ ap. dif.

Def: Sean N, M var. dif., $f: M \longrightarrow N$ ap. Se dice que f es un difeomorfismo si es dif., biyectiva y f^{-1} es dif.

Def: Las variedades dif. que $\exists f$ difeomorf. son difeomorfas.

Obs: En S^7 hay estructuras dif. que no son difeomorfas.