Matemática discreta

Ramon Masià

Jaume Pujol

Josep Rifà

Mercè Villanueva

XP06/75006/01221

www.uoc.edu

Ramon Masià Fornos

Licenciado en Ciencias Matemáticas (1990) y en Filología Clásica (1997). Ha trabajado en el Centro de Recursos Informáticos de la Universidad de Barcelona (1988-1990), en la Universidad Pompeu Fabra (1990-1992) y en la Universidad Politécnica de Cataluña (1992-1994). Desde 1994 es funcionario de carrera del cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Actualmente, se dedica a la elaboración de material didáctico para el aprendizaje de las matemáticas. Está haciendo su tesis doctoral en el campo de la historia de las matemáticas en la Grecia antigua.

Jaume Pujol Capdevila

Licenciado en Ciencias Matemáticas (1978) y en Informática (1989) y doctor en Informática (1995) por la Universidad Autónoma de Barcelona. Profesor de la Universidad Autónoma de Barcelona desde 1988. Desde 1997 es catedrático de escuela universitaria del área de Ciencias de la Computación y Inteligencia Artificial. Es especialista en teoría de la información, teoría de la codificación, compresión y clasificación de la información y teoría de grafos.

Josep Rifà Coma

Licenciado en Ciencias Matemáticas (1973) por la Universidad de Barcelona y doctor en Informática por la Universidad Autónoma de Barcelona (1987). Profesor de la Universidad Autónoma de Barcelona desde 1987. Desde 1992 es catedrático de universidad del área de Ciencias de la Computación y Inteligencia Artificial. Especialista en teoría de la información, teoría de la codificación y criptografía. Ha escrito libros y artículos en revistas internacionales sobre estos temas. Actualmente, es el director de la Unidad de Combinatoria y Comunicación Digital de la Universidad Autónoma de Barcelona y vicepresidente del capítulo español de *Information Theory* de la sociedad internacional IEEE.

Mercè Villanueva Gay

Licenciada en Ciencias Matemáticas (1994) y doctora en Informática (2001) por la Universidad Autónoma de Barcelona. Desde 1994 es profesora en la Universidad Autónoma de Barcelona y desde 2002 es titular de universidad del área de Ciencias de la Computación y Inteligencia Artificial. Es especialista en combinatoria, álgebra, teoría de la codificación y teoría de grafos.

Primera edición: septiembre 2003
Segunda edición: febrero 2007
© Fundación per a la Universitat Oberta de Catalunya
Avda. Tibidabo, 39 - 43, 08035 Barcelona
Diseño: Manel Andreu
Material realizado por Eurecamedia, SL
Depósito legal: B-1.699-2007

Introducción

La matemática discreta cubre una serie de temas que tienen en común el hecho de no utilizar el concepto matemático de "continuo.en sus proposiciones, en sus argumentos y, sobre todo, en sus aplicaciones.

Sin detallar todos los temas que abarca la matemática discreta y por su utilización en la ingeniería informática, nos interesa destacar los siguientes: combinatoria, teoría de conjuntos, conjuntos parcialmente ordenados, lógica, teoría de grupos, teoría de autómatas, anillo de los enteros, aritmética modular, álgebras de Boole, funciones de conmutación, funciones generadoras, relaciones de recurrencia, teoría de grafos, teoría de redes, optimización, complejidad computacional, estructura de datos, análisis de algoritmos, teoría de cuerpos finitos, teoría de la codificación, diseños, criptografía y geometría computacional.

La mayoría de los temas enumerados son importantes en la formación que debe recibir un ingeniero informático y, así, encontraremos asignaturas del currículum que los cubren. Los temas más elementales están agrupados en esta asignatura que presentamos y sirven para fundamentar muchos de los procesos directamente implicados en la ingeniería informática, tanto respecto al *software* como al *hardware*. Hemos intentado enfocar los conceptos introducidos en este libro desde el punto de vista de sus aplicaciones futuras en el campo de la ingeniería informática y, de hecho, no es casual esta interrelación, puesto que el origen y el desarrollo de esta nueva rama de la matemática ha ido siempre de la mano de la evolución de la informática.

Como se puede observar en la tabla de contenidos, la asignatura tiene seis créditos, repartidos en ocho módulos. Los cuatro primeros se centran en la combinatoria elemental y en las técnicas básicas para contar objetos. Los cuatro últimos constituyen una introducción a la teoría de grafos.

Cada módulo está estructurado de manera parecida:

- Exposición de los conceptos básicos del módulo con ejemplos que los ilustran.
- Propuesta de ejercicios y solucionario.
- Ejercicios finales de autoevaluación del módulo.
- Solucionario de los ejercicios de autoevaluación.

Se ha intentado que todos los módulos sean autocontenidos, para que puedan ser estudiados de manera independiente. Cuando ha sido necesario, se ha incluido alguna referencia bibliográfica al final del módulo, además de las referencias generales de la asignatura que se pueden encontrar al final de esta introducción.

Objetivos

Globalmente, los objetivos básicos que se pretenden cubrir en la asignatura son los siguientes:

1. Entender los principios básicos de contar como el de la adición, el de la multiplicación, el de las cajas y el de la inclusión-exclusión. Aplicarlos correctamente.

2. Reconocer cuando un tipo de muestra es ordenada y utilizar los recursos adecuados para hacer el recuento.

3. Reconocer cuando un tipo de muestra es no ordenada y utilizar los recursos adecuados para hacer el recuento.

4. Reconocer los problemas de distribuciones y particiones dónde se puedan utilizar los números multinomiales y resolverlos con esta herramienta.

5. Identificar la función generadora de un problema combinatorio y resolverlo con su ayuda.

6. Entender el concepto de algoritmo para resolver un problema y saber calcular su complejidad.

7. Saber reconocer los problemas que admitan una formulación recursiva y una resolución a partir de las ecuaciones recurrentes.

8. Entender el concepto de grafo y modelar ciertas situaciones a partir de los grafos.

9. Identificar los grafos más habituales y describir sus características fundamentales.

10. Saber aplicar los algoritmos de exploración de un grafo.

11. Entender la noción de conectividad de un grafo y aplicarla correctamente.

12. Saber calcular las distancias entre los nodos de un grafo con la ayuda de los algoritmos adecuados.

13. Saber caracterizar los árboles y, específicamente, los árboles con raíz. Saber aplicar los algoritmos de determinación de un árbol generador minimal.

14. Identificar los grafos eulerianos y hamiltonianos y caracterizarlos.

15. Entender el problema del viajante de comercio. Conocer y saber aplicar el algoritmo de resolución aproximada de este problema.

Contenidos

Módulo didáctico 5
Fundamentos de grafos

Módulo didáctico 6
Recorridos y conectividad

Módulo didáctico 7
Árboles

Módulo didáctico 8
Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos

Bibliografía

1. Balakrishnan, V.K. (1991). *Introductory Discrete mathematics.* Nueva Jersey: Prentice-Hall Int. Ed.

2. Basart, J.M.; Rifà, J.; Villanueva, M. (1997). *Fonaments de Matemàtica Discreta.* Materiales, núm. 36 . Bellaterra: Ed. Servei de Publicacions UAB.

3. Biggs, N.L. (1994). *Matemática Discreta.* (1a. edición, traducción de M. Noy). Barcelona: Ediciones Vicens Vives.

4. Calvo, T.; Mayor, G.; Trias, J. (1996). *Materiales de combinatoria i grafs.* Barcelona: No publicados.

5. Comellas, F.; Fàbrega, J.; Sànchez, A.; Serra, O. (1996). *Matemática discreta.* Barcelona: Ediciones UPC.

6. Garcia, C. (2002). *Matemática Discreta.* Materiales Didácticos 66. Palma de Mallorca: UIB.

7. Gimbert, J; *y otros* (1998). *Apropament a la teoria de grafs y als seus algoritmes.* Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida.

8. Grimaldi, R.P. (1989). *Matemáticas discreta y combinatorial.* México: Addison-Wesley Iberoamericana.

Combinatoria. Muestras ordenadas

Ramon Masià
Jaume Pujol
Josep Rifà
Mercè Villanueva

P06/75006/01394

UOC
www.uoc.edu

Índice

Introducción

En este módulo se presentan una buena parte de los conceptos y técnicas básicas de lo que se denomina, en matemáticas, *combinatoria*.

El módulo empieza introduciendo los conceptos básicos de producto cartesiano de dos conjuntos y el de función. Asimismo, se estudian diferentes tipos de función y se describen los conjuntos finitos, numerables e infinitos. Se clarifica el concepto de contar dando su definición, la cual precisa del significado exacto de la noción “el conjunto A tiene n elementos”.

En el segundo apartado, se introduce el principio de la adición, que permite calcular el cardinal de una unión disjunta de dos o más conjuntos cuando el cardinal de cada uno de estos conjuntos es conocido. En el tercer apartado se presenta el principio de la multiplicación que proporciona la forma de calcular el cardinal de un conjunto que sea producto cartesiano de dos o más conjuntos. En el cuarto apartado se muestra el principio de las cajas, muy sencillo de estudiar pero de una gran profundidad.

Finalmente, los tres últimos apartados son una introducción a la combinatoria elemental. Se presentan dos sistemas para seleccionar objetos dentro de un conjunto. El primero consiste en hacer selecciones ordenadas con la posibilidad de repetir algunos elementos (muestras ordenadas con repetición) y, el segundo, en hacer selecciones también ordenadas pero sin la posibilidad de repetir los elementos (muestras ordenadas sin repetición). Además, se dan fórmulas prácticas para calcular el número de selecciones posibles en ambos casos, así como algunos ejemplos. Para acabar, se introducen las permutaciones sin repetición como caso particular de selección ordenada sin repetición.

1. La operación de contar

En un *diccionario general de la lengua española* podemos encontrar la siguiente definición de **contar**: "Determinar el número (de objetos de un conjunto) designandolos, uno a uno o por grupos, con los números de la serie natural ascendente". Por ejemplo, y más exactamente, si tenemos un mosaico de un determinado número de piezas y las queremos contar, sólo es necesario asignarles los números 1, 2, 3, ... hasta agotarlas. El número natural n que concluye este proceso es el número de elementos del conjunto. Es necesario observar que la numeración se puede realizar de varias maneras.

Empezaremos esta sección con el producto cartesiano de dos conjuntos. A continuación veremos la definición de función y diferentes tipos de funciones. Después, hablaremos de cardinal de un conjunto, y finalmente veremos la diferencia entre conjuntos finitos, infinitos y numerables.

1.1. El producto cartesiano

Definición 1.1

Dados los conjuntos X y Y, $\boldsymbol{X \times Y}$ representa el conjunto de pares ordenados (x, y) en que x pertenece a X, y y pertenece a Y.

Ejemplo 1-1

Si $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c, d\}$, entonces el conjunto $X \times Y$ es $X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}$.

Ejercicio 1-2

Si $X = \{0, 1\}$ y $Y = \{0, 1, 2\}$, escribir $X \times Y$ y $Y \times X$.

Solución: $X \times Y = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$ y
$Y \times X = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$.

Nótese que, en general, hay diferencia entre $X \times Y$ y $Y \times X$, tal y como se ha mostrado en el ejercicio anterior.

1.2. Funciones inyectivas, exhaustivas y biyectivas

Definición 1.2

Dados los conjuntos X y Y, una **función** f de X en Y es un subconjunto F de $X \times Y$, tal que, dados dos elementos cualesquiera (x, y), (x', y') de F, si $x = x'$, entonces $y = y'$.

Notación

Una función f de X en Y se denota también por $f : X \to Y$.

Si (x, y) pertenece a f, también se dice que $f(x) = y$. En este caso, el elemento y se llama **imagen** de x por f, y el elemento x, **antiimagen** de y por f. El conjunto de las antiimágenes se llama **dominio** de la función f, y el conjunto de las imágenes, **imagen** de f.

Ahora bien, en el contexto de la matemática discreta es mejor considerar sólo las funciones en que el dominio de f sea todo el conjunto X. A partir de ahora, pues, supondremos que una función debe cumplir esta propiedad.

Ejercicio 1-3

Sean $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$. Comprobar que $f = \{(1, a), (2, c), (2, b), (3, d)\}$ no es una función de X en Y. Análogamente, $g = \{(1, a), (2, c), (3, e)\}$ tampoco es una función de X en Y.

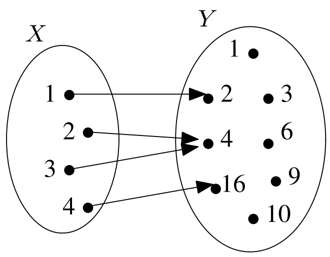
Solución: f no es una función de X en Y puesto que el elemento 2 tiene dos imágenes diferentes (c y b) en Y. Tampoco g es una función de X en Y puesto que $g(3) = e \notin Y$.

Ejercicio 1-4

Si $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 16\}$, considerar la función de X en Y, $f : X \to Y$, definida por $f(x) = x+1$ si x es impar, y $f(x) = x^2$ si x es par. Construir el subconjunto de $X \times Y$ que determina la función. Observar que $f(2) = f(3) = 4$. Hacer una lista de los elementos de Y con las antiimágenes correspondientes.

Solución: La función f se puede escribir como $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 16)\}$.

En este ejercicio podríamos hacer el siguiente gráfico para representar la función f:



Los elementos de X de los cuales sale una flecha son las antiimágenes de los elementos de Y a los cuales llega la flecha correspondiente. Los elementos de Y a los cuales llega una flecha son las imágenes de los elementos correspondientes de X. Así, $1 \in X$ es antiimagen de $2 \in Y$, 2 y $3 \in X$ son antiimágenes de $4 \in Y$, y $4 \in X$ es antiimagen de $16 \in Y$. Los elementos $1, 3, 6, 9, 10 \in Y$ no tienen antiimagen. En la siguiente tabla vemos un resumen:

Y	1	2	3	4	6	9	10	16
Antiimagen	ninguna	1	ninguna	2, 3	ninguna	ninguna	ninguna	4

Obsérvese que en una función todos los elementos de X deben ser antiimagen de algún elemento de Y y no todos los elementos de Y deben ser imagen de alguno de X.

Definición 1.3

Una función $f : X \to Y$ es **exhaustiva** si cada elemento de Y tiene por lo menos una antiimagen (en X). Es **inyectiva** si cada elemento de Y tiene como máximo una antiimagen. Es **biyectiva** si cada elemento de Y tiene exactamente una antiimagen, es decir, si es inyectiva y exhaustiva a la vez.

Ejercicio 1-5

Comprobar si la función $f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$, definida por $f(1) = d$, $f(2) = a$, $f(3) = b$, $f(4) = c$, es biyectiva.

Solución: Cada elemento del conjunto $\{a,b,c,d\}$ tiene exactamente una antiimagen y, por lo tanto, es biyectiva.

Ejemplo 1-6

La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2$ es inyectiva pero no es exhaustiva. En efecto, f es inyectiva porque dos números naturales diferentes no pueden tener cuadrados iguales. No es exhaustiva puesto que, por ejemplo, 2 no tiene antiimagen (no existe ningún número natural x tal que $x^2 = 2$).

Es necesario observar que la función $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(x) = x^2$ no es inyectiva (2 y -2 tienen la misma imagen: 4) y tampoco es exhaustiva (por ejemplo, no hay ningún número entero que tenga cuadrado igual a 2).

El tipo de función

Tal y como se muestra en el ejemplo 1-6, que una función sea de un tipo determinado (exhaustiva, inyectiva o biyectiva) no sólo depende de la expresión que la define, sino también de los conjuntos entre los cuales está definida.

Ejemplo 1-7

La función identidad $j : X \to X$, o sea, la función de X en X que hace corresponder a cada elemento $x \in X$ el mismo elemento x ($f(x) = x$ para todo $x \in X$), es biyectiva.

1.3. Ejercicios

1-8 Encontrar todas las funciones biyectivas de $X = \{1,2,3\}$ en $Y = \{a,b,c\}$.

1-9 Encontrar todas las funciones exhaustivas de $X = \{1,2,3\}$ en $Y = \{a,b\}$.

1-10 Encontrar todas las funciones inyectivas de $X = \{1,2,3\}$ en $Y = \{a,b,c,d\}$.

1-11 Demostrar que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$ es inyectiva pero no exhaustiva.

1-12 Demostrar que la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x + 1$ es biyectiva.

1.4. Soluciones

1-8 Si se utiliza la notación $f(1)f(2)f(3)$ para representar una función f, tenemos las seis biyecciones siguientes: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Obsérvese que con esta notación se obtiene una simplificación notable en la escritura. Así, cab es la función f definida por $f(1) = c$, $f(2) = a$, $f(3) = b$.

1-9 Con la misma notación anterior, tenemos seis funciones exhaustivas: aab, aba, baa, abb, bab, bba.

1-10 Hay veinticuatro funciones inyectivas, que son las siguientes: abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

1-11 La función f es inyectiva, puesto que si dos elementos diferentes, $x \neq y$, tuvieran la misma imagen podríamos escribir $x + 1 = y + 1$ y, entonces $x = y$, que no puede ser. La función no es exhaustiva, puesto que el número 1 no tiene ninguna antiimagen (de hecho, 1 es el único número sin ninguna antiimagen).

1-12 La función f es inyectiva, puesto que (igual que en el ejercicio 1-11) $x + 1 = y + 1$ implica $x = y$. En este caso f es exhaustiva, puesto que cualquier número entero tiene antiimagen: la antiimagen de z es $z - 1$.

1.5. Conjuntos finitos, infinitos y numerables

Definición 1.4

Un conjunto A tiene n elementos si hay una función biyectiva de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en A. En este caso también decimos que el conjunto A tiene **cardinal** n.

Notación

$|A| = n$ indica que el conjunto A tiene cardinal n.
El cardinal del conjunto vacío se define igual a 0: $|\emptyset| = 0$.
$\mathbb{N}_n$ es el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Así, $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ejemplo 1-13

El conjunto $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\}$ es tal que no existe ningún número natural n que permita construir una biyección (función biyectiva) de $\mathbb{N}_n$ en A. En este caso se dice que A es un conjunto infinito (de cardinal infinito).

Definición 1.5

Un conjunto X es **finito** si es vacío o bien si tiene n elementos. De lo contrario, decimos que X es un conjunto **infinito**.

Como consecuencia de la definición, es necesario observar que un conjunto X es infinito si no es vacío y si no existe ningún número natural n para el cual se pueda construir una biyección de $\mathbb{N}_n$ en X.

A continuación se presentan una serie de resultados bastante intuitivos.

Proposición 1.6

- El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.
- Un conjunto X es infinito si, y sólo si, se puede construir una función f, de $\mathbb{N}$ en X que sea inyectiva.
- Si X es un subconjunto infinito de un conjunto Y, entonces Y es infinito.
- Dado un conjunto finito X y un subconjunto Y de X, entonces Y también es finito y se verifica $|Y| \leq |X|$.

Ejemplo 1-14

De acuerdo con la proposición 1.6, podemos afirmar, por ejemplo, que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es infinito, puesto que contiene un subconjunto (el conjunto $\mathbb{N}$) que ya sabemos que es infinito.

Definición 1.7

Un conjunto X es **numerable** si es finito o existe una biyección de $\mathbb{N}$ en X.

Por lo tanto, un conjunto X es numerable si podemos hacer una lista con los elementos de X tal que cualquier elemento de X sea un elemento de la lista, y dos elementos diferentes de la lista correspondan a elementos diferentes de X.

Los conjuntos de números

Hay conjuntos infinitos que son numerables y otros que no lo son. El conjunto de los números reales no es numerable (este hecho se demuestra como resultado básico en cualquier curso de análisis matemático o de cálculo). El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ son ejemplos fundamentales de conjuntos numerables.

Ejemplo 1-15

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es numerable. En efecto, sólo es necesario considerar la función f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{si } x \text{ es par} \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

Esta función f es biyectiva (comprobadlo), y por lo tanto podemos decir que $\mathbb{Z}$ es numerable. La función f nos permite escribir todos los números enteros en forma de lista: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ (sin elementos repetidos).

Es importante observar que la situación descrita en el ejemplo anterior es sorprendente, puesto que $\mathbb{N}$ es un **subconjunto propio** de $\mathbb{Z}$, es decir, hay números enteros que no son naturales; por otro lado, podemos decir que existen tantos números enteros como números naturales (hemos encontrado una biyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$). Este hecho curioso no se puede dar en el ámbito de los conjuntos finitos: un conjunto finito no tiene ningún subconjunto propio que tenga el mismo número de elementos.

El cardinal del conjunto de números naturales se escribe como $\aleph_0$ (se pronuncia *alef subcero*) y es el cardinal más pequeño no finito que se conoce. El cardinal de los números reales se escribe como $\aleph_1$, y ya sabemos que $\aleph_0 \neq \aleph_1$ (puesto que los números reales no son numerables). En el campo de la matemática transfinita se demuestra que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Se llama *hipótesis del continuo* al enunciado que dice que no hay ningún conjunto que tenga un cardinal intermedio entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$.

George Cantor (1845-1918) demostró que $\aleph_0 \neq \aleph_1$. David Hilbert (1862-1943) formuló por primera vez la hipótesis del continuo como primer problema en la famosa lista que presentó en el congreso mundial de matemáticas que tuvo lugar en París el 1900. Entre Kurt Gödel (1906-1978), en 1938, y Paul Cohen (1934-), en 1963, demostraron que con los axiomas habituales de la matemática, la hipótesis del continuo es indemostrable tanto en sentido positivo (Cohen) como negativo (Gödel).

1.6. Ejercicios

1-16 Demostrar que si X, Y son conjuntos finitos y no vacíos con el mismo cardinal, entonces si $f : X \to Y$ es inyectiva, f es también biyectiva.

1-17 Demostrar que si X, Y son conjuntos finitos y no vacíos con el mismo cardinal, entonces si $f : X \to Y$ es exhaustiva, f es también biyectiva.

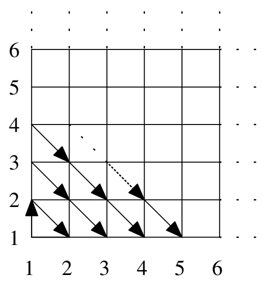
1-18 Demostrar que el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es un conjunto numerable.

1.7. Soluciones

1-16 Probamos este resultado utilizando el método de inducción sobre el cardinal, n, de los conjuntos X y Y. Evidentemente si $n = 1$ el enunciado es cierto. Supongámoslo cierto para $n - 1$ y veamos que lo es para n. Sea f una función inyectiva del conjunto X en el conjunto Y con $|X| = |Y| = n$. Escogemos $a \in X$ y sea $b = f(a)$. Consideramos $X' = X - a$ y $Y' = Y - b$. Entonces resulta que $|X'| = |Y'| = n - 1$, y la función f', restricción de la función f a X', es una función de X' en Y' que es inyectiva. Por lo tanto, aplicando la hipótesis de inducción podemos afirmar que f' es biyectiva (de X' en Y') y, consecuentemente, f es también biyectiva.

1-17 Suponemos f de X en Y exhaustiva con $|X| = |Y| = n$. Si f no fuera inyectiva se podría construir a partir de f (eliminando elementos de X con la misma imagen) una función f' biyectiva entre una parte propia de X y Y, lo cual es imposible.

1-18 Para demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable es suficiente con numerar los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la manera siguiente: $1 \to (1,1)$, $2 \to (1,2)$, $3 \to (2,1)$, $4 \to (1,3)$, $5 \to (2,2)$, $6 \to (3,1)$, $7 \to (1,4)$, $8 \to (2,3)$, $9 \to (3,2)$, $10 \to (4,1)$, etc. O sea, en el orden que se muestra en la figura siguiente:


6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6

2. Principio de la adición

Si X y Y son dos conjuntos finitos y disjuntos (la intersección es vacía), el cardinal de X es n y el de Y es m, el *principio de la adición* permite calcular el cardinal del conjunto $X \cup Y$, es decir, $|X \cup Y|$. Como consecuencia de este principio tenemos también el llamado *principio de la sustracción*, que nos permite calcular el cardinal del conjunto $A - S$, donde S es un subconjunto de A.

Notación

Si S es un subconjunto de A, $S \subseteq A$, entonces $A - S = \{a \in A \mid a \notin S\}$.

El principio de la adición se podrá generalizar cuando haya más de dos conjuntos; será el llamado *principio de la adición generalizado*.

Lo que vemos en esta sección hace referencia al cálculo del cardinal de la unión de dos (o más) conjuntos disjuntos. A menudo, pero, también nos interesará calcular el número de elementos de una unión no disjunta. Esto lo veremos más adelante, tanto para dos como para más conjuntos, con el llamado *principio de inclusión-exclusión*.

2.1. Principio de la adición

Proposición 1.8

Si X y Y son dos conjuntos finitos y disjuntos, entonces

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|.$$

Este resultado, de demostración muy sencilla, es de gran utilidad en el momento de calcular el cardinal de un conjunto (finito) A, a partir del conocimiento de los cardinales de dos subconjuntos X, Y tales que $X \cup Y = A$ y $X \cap Y = \emptyset$.

Ejemplo 1-19

¿De cuántas maneras se pueden obtener 6 ó 7 puntos, como suma del lanzamiento de dos dados (uno rojo y el otro azul)?

Si indicamos por X el conjunto de maneras que hay de obtener 6 puntos, podemos escribir $X = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$, donde cada pareja representa el resultado de un lanzamiento: (dado rojo, dado azul). Análogamente, el conjunto Y de maneras de obtener 7 puntos es: $Y = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$. Obviamente, lo que nos piden es el cardinal de $X \cup Y$, y puesto que X y Y son disjuntos, podemos aplicar el principio de la adición, y así conseguimos: $|X \cup Y| = |X| + |Y| = 5 + 6 = 11$ maneras de obtener 6 ó 7 puntos.

Ejercicio 1-20

¿De cuántas maneras se pueden obtener 6 ó 7 puntos, si lanzamos dos dados que sean indistinguibles?

Solución: Si X es el conjunto de maneras de obtener 6 puntos con los dos dados (indistinguibles), podemos escribir: $X = \{(1,5),(2,4),(3,3)\}$. Si Y es el conjunto de maneras de obtener 7 puntos, entonces $Y = \{(1,6),(2,5),(3,4)\}$. Nos piden calcular el número de elementos (cardinal) de $X \cup Y$. Dado que X y Y son disjuntos, conseguimos $|X \cup Y| = |X| + |Y| = 3 + 3 = 6$ maneras de obtener un 6 o un 7.

Proposición 1.9

Si A es un conjunto finito y S un subconjunto de A, entonces

$$|A - S| = |A| - |S|.$$

Demostración: Si consideramos los conjuntos $X = A - S$ y $Y = S$, como $X \cup Y = A$ y $X \cap Y = \emptyset$, aplicando el principio de la adición obtenemos $|X \cup Y| = |X| + |Y|$, o sea $|A| = |A - S| + |S|$ y, por lo tanto, $|A - S| = |A| - |S|$. ∎

Ejemplo 1-21

¿Cuántos números de dos cifras hay que tengan las cifras diferentes?

Sea A el conjunto de todos los números de dos cifras y S el subconjunto formado por los que tienen las dos cifras iguales. En este caso, $|A-S|$ representa el número que nos piden. Claramente, $|A| = 90$ y $|S| = 9$; por lo tanto, $|A-S| = |A|-|S| = 90-9 = 81$.

2.2. Principio de la adición generalizado

Proposición 1.10

Si $X_1, \ldots, X_m$ son conjuntos finitos y disjuntos dos a dos, entonces el cardinal de $X_1 \cup \cdots \cup X_m$ es la suma de los cardinales de cada conjunto. Es decir,

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_m| = |X_1| + \cdots + |X_m|.$$

Ejemplo 1-22

¿De cuántas maneras se pueden obtener 6, 7 ó 8 puntos, si lanzamos dos dados (uno rojo y el otro azul)?

Sean X, Y y T los conjuntos de maneras de obtener 6, 7 y 8 puntos, respectivamente, con los dos dados. Estos conjuntos son disjuntos dos a dos, puesto que $X \cap Y = \emptyset$, $X \cap T = \emptyset$ y $Y \cap T = \emptyset$. Por lo tanto, hay $|X \cup Y \cup T| = |X|+|Y|+|T| = 5+6+5 = 16$ maneras de obtener 6, 7 ó 8 puntos.

2.3. Ejercicios

1-23 ¿Cuántas maneras hay de obtener 7 ó 11 puntos, si lanzamos dos dados distinguibles? ¿Y si los dados no son distinguibles?

1-24 Detectar el error en el razonamiento siguiente:

“Teniendo en cuenta que la mitad de los números naturales entre 1 y 60 son múltiplos de 2, veintinueve de los sesenta no pueden ser primos (2 es primo), y que una tercera parte son múltiplos de 3, diecinueve de los sesenta no pueden ser primos (3 es primo). Por lo tanto, hay como máximo doce que son primos”.

2.4. Soluciones

1-23 En el caso de los dados distinguibles, y utilizando notaciones parecidas a las del ejemplo 1-19, tenemos que el conjunto que representa obtener 7 puntos es $X = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ y el que representa obtener 11 puntos es $Y = \{(5,6), (6,5)\}$. Por lo tanto, $|X \cup Y| = |X| + |Y| = 6 + 2 = 8$ maneras de obtener un 7 o un 11.

En el caso de los dados indistinguibles, tenemos: $X = \{(1,6),(2,5),(3,4)\}, Y = \{(5,6)\}$. Por lo tanto, $|X \cup Y| = |X| + |Y| = 3 + 1 = 4$ maneras de obtener un 7 o un 11.

1-24 Sea P el conjunto de números entre 1 y 60 que son primos: $\{2,3,5,7,11,13, 17, 19,23,29,31,37, 41,43,47,53,59\}$. Por lo tanto, $|P| = 17$ y, consecuentemente, el razonamiento es erróneo. El error se comete cuando se dice que hay como mínimo $29+19 = 48$ números que no son primos (29 es el cardinal del conjunto: $\{4,6,\ldots,60\}$ y 19 es el cardinal del conjunto: $\{6,9,\ldots,60\}$). Esta afirmación no se puede hacer puesto que los conjuntos de múltiplos no son disjuntos. El razonamiento acaba de la siguiente forma: Si P' indica el conjunto {números entre 1 y 60 que no son primos}, tenemos que $|P'| \geq 48$, y de aquí $|P| = 60 - |P'| \leq 60 - 48 = 12$.

3. Principio de la multiplicación

Para calcular el cardinal del producto cartesiano entre dos conjuntos X y Y se utiliza el llamado *principio de la multiplicación*. Este principio se puede generalizar para más de dos conjuntos; es el llamado *principio de la multiplicación generalizado*.

3.1. Principio de la multiplicación

Proposición 1.11

Si X y Y son dos conjuntos finitos, entonces

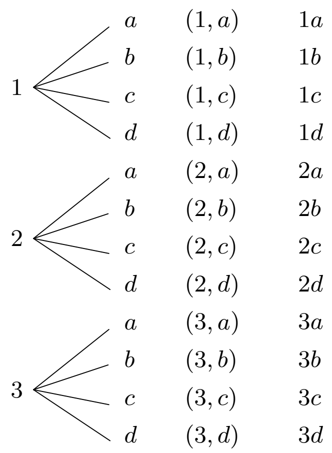
$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

Ejemplo 1-25

Si $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$, entonces el conjunto $X \times Y$ es $X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}$.

Efectivamente, $|X \times Y| = 12$, y $|X| = 3$, $|Y| = 4$. Por lo tanto, se verifica la igualdad $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Una manera de construir (sistemáticamente) el conjunto $X \times Y$ del ejemplo anterior es la que utilizamos en la figura siguiente, en que se utiliza un **diagrama en árbol** que permite la escritura de todas las parejas ordenadas. Análogamente, podemos utilizar este tipo de diagramas para construir los elementos de conjuntos producto del tipo $X \times Y \times T$, etc.



Demostración: La demostración de la igualdad $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ resulta sencilla si tenemos en cuenta que el conjunto $X \times Y$ se puede pensar como una unión disjunta de conjuntos en que cada uno de ellos es de cardinal igual al cardinal de Y. Sea $|X| = n$, y $|Y| = m$. Para cada elemento de X, $x_i \in X$, donde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, podemos construir el conjunto $P_i = \{(x_i, y_1), (x_i, y_2), \ldots, (x_i, y_m)\}$, donde $y_1, y_2, \ldots, y_m$ son los elementos de y. Entonces $X \times Y = P_1 \cup \cdots \cup P_n$ donde la unión es disjunta y cada conjunto P_i tiene cardinal m. Por lo tanto, de acuerdo con el principio de la adición podemos escribir: $|X \times Y| = |P_1 \cup \cdots \cup P_n| = |P_1| + \cdots + |P_n| = m + \cdots + m = n \cdot m = |X| \cdot |Y|$. ∎

Podemos ilustrar la demostración anterior a partir del ejemplo 1-25. En este caso los conjuntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son: $P_1 = \{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d)\}$, $P_2 = \{(2,a),(2,b),(2,c),(2,d)\}$, $P_3 = \{(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}$.

3.2. Principio de la multiplicación generalizado

Proposición 1.12

Si $X_1, \ldots, X_m$ son conjuntos finitos, entonces el cardinal del conjunto $X_1 \times \cdots \times X_m$ es el producto de los cardinales de cada conjunto. Es decir,

$$|X_1 \times \cdots \times X_m| = |X_1| \cdot \ldots \cdot |X_m|.$$

Ejemplo 1-26

Si lanzamos tres dados distinguibles (rojo, azul, amarillo), ¿cuantos resultados posibles podemos obtener?

La respuesta es $6{\cdot}6{\cdot}6 = 216$ resultados posibles. Cada resultado puede ser representado como una terna, así $(2, 5, 1)$ representa el resultado: “2 en el dado rojo, 5 en el dado azul, 1 en el dado amarillo”. Con esta interpretación, lo que tenemos que hacer es calcular el cardinal del conjunto $X \times X \times X$ donde $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y, por lo tanto,

$$|X \times X \times X| = |X| \cdot |X| \cdot |X| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216.$$

Ejemplo 1-27

Si lanzamos cinco dados distinguibles, ¿cuántos resultados posibles podemos obtener?

La respuesta es $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$ resultados posibles.

3.3. Ejercicios

1-28 Demostrar que la fórmula $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ es válida también en el supuesto de que X o Y sean conjuntos vacíos.

1-29 Una empresa de ordenadores utiliza para identificar las máquinas un número (número de identificación) formado por dos letras, seguidas de dos dígitos decimales, dos letras más y, finalmente, cuatro dígitos decimales más. ¿Cuántos números de identificación son posibles? (el alfabeto es de veintiséis letras.)

1-30 Sea $X = \{0, 1\}$. Un elemento del conjunto producto $X \times \cdots \times X = X^r$ diremos que es una palabra binaria de longitud r. ¿Cuántas palabras binarias hay de longitud 7? ¿Cuántas hay de longitud 10?

1-31 Sea $X = \{0, 1, 2\}$. Un elemento del conjunto producto $X \times \cdots \times X = X^r$ diremos que es una palabra ternaria de longitud r. ¿Cuántas palabras ternaries hay de longitud 7? ¿Cuántas hay de longitud 10?

1-32 ¿Cuántos números pares hay entre 1 y 99 que tengan los dígitos diferentes? (Los números $1, 2, \ldots, 9$ se escriben así: $01, 02, \ldots, 09$.)

3.4. Soluciones

1-28 Si X es vacío, entonces $X \times Y$ es vacío (no se puede hacer ninguna pareja ordenada) y, por lo tanto, $|X \times Y| = 0$, pero también es $|X| = 0$ y, por lo tanto, se verifica la igualdad.

1-29 Un número de identificación de una máquina es, por ejemplo AB01AM1208, o también DD93TV4543. Si X es el alfabeto $\{A, B, C, \ldots, Y, Z\}$, y Y el conjunto de dígitos $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, nos piden el cardinal de $X \times X \times Y \times Y \times X \times X \times Y \times Y \times Y \times Y$, que por el principio de la multiplicación (generalizado) es igual a:

$$26^2 \cdot 10^2 \cdot 26^2 \cdot 10^4 = 26^4 \cdot 10^6 = 456976 \cdot 10^6.$$

1-30 Utilizando el principio de la multiplicación podemos decir que hay $2^7 = 128$ palabras binarias de longitud 7. Análogamente, hay $2^{10} = 1024$ palabras de longitud 10.

1-31 En este caso, existen $3^7 = 2187$ palabras ternarias de longitud 7 y $3^{10} = 59049$ palabras ternarias de longitud 10.

1-32 Sea P el conjunto de números pares entre 1 y 99: $P = \{02, 04, 06, \ldots, 96, 98\}$, $|P| = 49$. Los números pares con cifras repetidas son: 22, 44, 66, 88. Por lo tanto, hay $49 - 4 = 45$ números pares entre 1 y 99 con las cifras diferentes. Hemos aplicado el principio de la sustracción.

4. Principio de las cajas

4.1. Principio de las cajas

Proposición 1.13

Si se distribuyen n objetos en m cajas y $m < n$, entonces por lo menos en una de las cajas habrá como mínimo dos objetos.

También es frecuente...

... llamarlo *principio del palomar* (*pigeonhole principle*, en inglés) o *principio de las cajas de Dirichlet*, puesto que fue P.G.L Dirichlet (1805-1859) quien lo formuló formalmente por primera vez.

Ejemplo 1-33

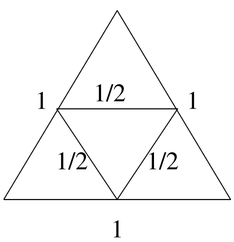
Al examen asistieron trece estudiantes. ¿Podemos asegurar que dos de ellos celebran el aniversario el mismo mes?

En efecto, sólo es necesario pensar que los meses del año son cajas donde colocaremos los estudiantes según el mes en que celebren su aniversario. Entonces, tenemos trece objetos a distribuir en doce cajas. Según el principio de las cajas, al menos en una caja habrá dos objetos o, lo que es el mismo, al menos dos estudiantes celebran el aniversario el mismo mes.

Ejemplo 1-34

Tenemos un triángulo equilátero de lado 1. Si colocamos cinco puntos en el interior del triángulo, por lo menos dos de ellos están a una distancia menor que $1/2$.

En efecto, sólo es necesario dividir el triángulo en cuatro regiones iguales (cajas), tal y como se muestra en la figura y, a continuación, aplicar el principio de las cajas. De los cinco puntos habrá por lo menos dos en la misma región, y estos dos estarán a una distancia menor que $1/2$, puesto que cada región es un triángulo equilátero de lado $1/2$.

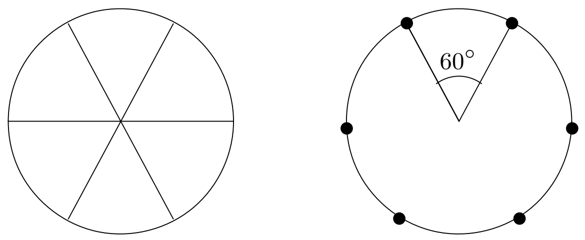


Nótese que podemos asegurar que habrá dos puntos a distancia menor que $1/2$, pero podría haber más, dependiendo de la forma en que estén situados los cinco puntos dados.

Ejemplo 1-35

Si tenemos un disco de radio 1 y siete puntos en el disco tales que la distancia entre dos de éstos es siempre mayor o igual a 1; demostrar que uno de los puntos está en el centro del disco y los otros seis están sobre la circunferencia del disco formando un hexágono regular.

Sólo es necesario dividir el disco en seis porciones tal y como se indica en la figura, y observar que no puede haber dos puntos en una misma porción. En este caso los puntos en la misma porción no estarían a distancia mayor que 1. Por lo tanto, debe haber un punto en cada porción. Como hay siete puntos en total, tras colocar los seis primeros todavía nos sobraría uno, que sólo podríamos colocar en el centro del disco. Y los otros seis –que están dentro de cada porción– no hay otra opción que colocarlos sobre la circunferencia. Dos puntos consecutivos cualesquiera situados sobre la circunferencia determinan con el centro un ángulo de 60°. Por eso los seis puntos de la circunferencia forman un hexágono regular.



4.2. Principio de las cajas generalizado

Proposición 1.14

Si se distribuyen n objetos en m cajas y sabemos que $n > mr$, entonces por lo menos en una de las cajas habrá como mínimo $r + 1$ objetos.

Obsérvese que en el caso $r = 1$ se obtiene el principio de las cajas.

Demostración: Se distribuyen los n objetos en las m cajas y denotamos X_j el conjunto de los objetos de la caja j. Evidentemente $n = |X_1 \cup \cdots \cup X_m| = |X_1| + \cdots + |X_m|$. Además, $n > mr$, es decir: $|X_1|+\cdots+|X_m| > mr$, y de aquí se deduce que $|X_j| \geq r+1$ para algún j, puesto que de lo contrario, o sea si $|X_j| \leq r$ para todos los j, tendríamos que $n = |X_1| + \cdots + |X_m| \leq mr$, que contradice la hipótesis $n > mr$. ∎

Ejemplo 1-36

Si se distribuyen cien objetos en siete cajas, entonces por lo menos en una de las cajas habrá como mínimo quince objetos.

En efecto, teniendo en cuenta que $100 > 7 \cdot 14$, podemos aplicar el principio de las cajas generalizado y deducir que por lo menos en una de las cajas habrá como mínimo quince objetos.

4.3. Ejercicios

1-37 Analizar si son ciertas estas afirmaciones:
a) Hay dos personas en el mundo con el mismo número de cabellos.
b) Hay dos personas en Lleida con el mismo número de cabellos.

Indicación: Supongamos que n es el número de personas que hay en el mundo y m es el número máximo de cabellos (como mucho, 10^6).

1-38 Demostrar que si se distribuyen cien objetos en ocho cajas, entonces por lo menos en una de las cajas habrá, como mínimo, trece objetos.

1-39 Demostrar que en un conjunto de ocho números enteros, por lo menos dos tienen como diferencia un múltiplo de 7. Intentar generalizar este resultado para un conjunto de p números enteros ($p \geq 3$).

Indicación: Utilizar la partición de $\mathbb{Z}$ asociada a la relación de congruencia módulo 7.

1-40 Demostrar que si se colocan cinco puntos en un cuadrado de lado 2, por lo menos dos se encuentran a una distancia menor o igual a $\sqrt{2}$.

1-41 Utilizar el principio de las cajas generalizado para demostrar que en un conjunto de seis personas hay tres que se conocen mutuamente o bien hay tres que son mutuamente extrañas.

4.4. Soluciones

1-37 a) Si n es el número de personas que hay en el mundo y m es el número de cabellos máximo, entonces la función "a cada persona le asignamos el número de cabellos" (definida entre el conjunto de personas del mundo y el conjunto $\mathbb{N}_m$) no puede ser inyectiva, puesto que $n > m$. Por lo tanto, hay por lo menos dos personas con el mismo número de cabellos y la afirmación es cierta.

b) No podemos aplicar el resultado anterior a esta nueva situación. No podemos asegurar que la afirmación sea cierta.

1-38 Sólo es necesario tener en cuenta que $100 > 8 \cdot 12$, y al aplicar el principio de las cajas generalizado, podemos afirmar que, como mínimo, en una de las cajas habrá trece $(12 + 1)$ objetos.

1-39 Sólo es necesario aplicar el principio de las cajas. Se considera la partición (cajas) de $\mathbb{Z}$ asociada a la relación siguiente: "Dos números enteros pertenecen a la misma caja si su diferencia es múltiplo de 7". Como hay siete cajas y tenemos ocho elementos, se puede aplicar el mencionado principio.

De forma más sencilla, para los que no conozcan el concepto de congruencia, las siete cajas son las siguientes: en la primera caja hay los números que cuando se dividen entre 7 su resto es 1; en la segunda, los números que cuando se dividen entre 7 su resto es 2; en la tercera, 3; etc. Hasta la séptima, la de los números que divididos entre siete tienen resto 0. Como hay siete cajas y tenemos ocho números, hay dos números en la misma caja. Supongamos que es la cuarta caja (se hace igual para las otras cajas) y los dos números son a y b. Los dos, cuando se dividen entre 7, dan resto 4; por lo tanto:

$$a = 7c + 4$$
$$b = 7d + 4$$

de aquí que:

$$a - b = 7(c - d)$$

por lo tanto, su diferencia es múltiplo de 7.

1-40 Es suficiente con dividir el cuadrado en cuatro partes iguales, uniendo los puntos medios opuestos de cada lado. A continuación se aplica el principio de las cajas.

1-41 Sea α una de las seis personas. Las cinco personas restantes las distribuimos en dos cajas de este modo: en la caja 1 ponemos las que conocen a α, y en la caja 2 las que no conocen a α. Dado que $5 > 2 \cdot 2$, podemos decir que en una de las cajas hay por lo menos tres personas. Supongamos que en la caja 1 se encuentran las personas β, γ, δ. Si dos de ellas, digamos β y γ, se conocen, entonces α, β, γ se conocen mutuamente. Si ninguna pareja entre β, γ, δ se conoce, entonces β, γ, δ son mutuamente extrañas. Un razonamiento análogo se puede realizar si es la caja 2 la que contiene tres (o más) personas.

5. Tipos de selecciones de objetos

En esta sección analizaremos unos ejemplos que nos ayudarán a entender diferentes tipos de selecciones que podemos hacer a partir de un conjunto finito de objetos diferentes.

Sea X un conjunto con n elementos diferentes. Supongamos que queremos escoger r de entre estos objetos. La selección se puede hacer teniendo en cuenta los factores siguientes:

- Si importa el **orden** en la selección, o no.
- Si permitimos la **repetición** de elementos en la selección, o no.

Lo que nos interesa es calcular el número de selecciones diferentes que podemos obtener, teniendo en cuenta los factores anteriores. Así, analizaremos los casos siguientes:

Seleccionar r objetos entre n

	Importa el orden	No importa el orden
Sin repeticiones	$\boxed{\text{b}}$	$\boxed{\text{c}}$
Con repeticiones	$\boxed{\text{a}}$	$\boxed{\text{d}}$

Para cada uno de estos casos veremos un ejemplo, y más adelante, deduciremos una fórmula general que nos permitirá calcular de manera eficiente (sin tener que hacer una lista con todas las posibles selecciones), el número total de selecciones diferentes que podemos hacer.

Ejemplo 1-42

Con las cifras $1, 2, 3, 4$:

$\boxed{\text{a}}$ ¿Cuántos números de dos cifras podemos formar?

Es fácil ver que podemos obtener los números siguientes: $11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44$. Por lo tanto, tenemos dieciséis números de dos cifras.

En este caso, se trataba de seleccionar dos objetos del conjunto de cifras $\{1, 2, 3, 4\}$. Obsérvese que importa el orden con que tomamos los objetos, puesto que 12 y 21 son selecciones diferentes, y también son permitidas las repeticiones de los elementos, puesto que 11, 22 son selecciones a contar.

Sin tener que escribir todas las selecciones que queremos contar, podríamos deducir la cantidad, puesto que se trata de calcular el cardinal del conjunto $X \times X$, donde $X = \{1, 2, 3, 4\}$. A partir del principio de la multiplicación, $|X \times X| = |X| \cdot |X| = = 4 \cdot 4 = 16$.

$\boxed{\text{b}}$ ¿Cuántos números de dos cifras diferentes podemos formar?

Si escribimos los números que nos piden, obtenemos: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43. Por lo tanto, hay doce números de dos cifras diferentes.

En este caso, también importa el orden. En cambio, a diferencia del anterior, ahora no están permitidas las repeticiones de los elementos.

En el ejemplo anterior, tanto en el primer como en el segundo caso, importa el orden. A continuación, veremos un ejemplo en que el orden en las selecciones no es importante.

Ejemplo 1-43

$\boxed{\text{c}}$ ¿De cuántas maneras diferentes podemos escoger dos bolas de un total de cuatro bolas diferentes?

Sean a, b, c, d las cuatro bolas diferentes. Los subconjuntos diferentes de dos elementos que podemos formar a partir de estos serían: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}, \{c, d\}$. Por lo tanto, tenemos seis maneras de escoger las dos bolas.

En este caso, claramente no importa el orden en la selección, puesto que escoger $\{a, b\}$ o $\{b, a\}$ seria lo mismo, ni aparecen elementos repetidos en ninguna de las posibles selecciones.

$\boxed{\text{d}}$ ¿De cuántas maneras diferentes podemos escoger cuatro bolas de entre dos tipos de bolas diferentes: blancas y negras?

Si denotamos con a las bolas blancas y con b las bolas negras, las selecciones posibles serían: $\{a, a, a, a\}$, $\{a, a, a, b\}$, $\{a, a, b, b\}$, $\{a, b, b, b\}$, $\{b, b, b, b\}$. O sea, hay cinco selecciones posibles de las cuatro bolas.

A diferencia del caso anterior, aquí se admiten repeticiones de los elementos. Pero, como en el caso anterior, no importa el orden.

Si no se admiten repeticiones en ninguna selección de r de los n elementos diferentes del conjunto inicial, se debe que cumplir que $r \leq n$. En cambio, esto no necesariamente es así si podemos repetir elementos (casos $\boxed{\text{a}}$ y $\boxed{\text{d}}$ de los ejemplos anteriores).

En el caso $\boxed{\text{a}}$, las selecciones de r de los n elementos se llaman ***r*-muestras ordenadas con repetición** de X o **variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r** (ver sección 6). En el caso $\boxed{\text{b}}$, las selecciones se llaman ***r*-muestras ordenadas sin repetición** de X o **variaciones de n elementos tomados de r en r** (ver sección 7).

En el caso $\boxed{\text{c}}$, las selecciones se llaman ***r*-muestras no ordenadas sin repetición** de X o **combinaciones de n elementos tomados de r en r** (ver sección 1 del módulo siguiente). Finalmente, en el caso $\boxed{\text{d}}$, las selecciones se llaman ***r*-muestras no ordenadas con repetición** de X o **combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r** (ver sección 2 del módulo siguiente).

El problema que resolveremos en las secciones siguientes es el de contar cuantas selecciones podemos hacer en cada caso, sin necesidad de tener que hacer una lista de todas ellas.

Utilizaremos la notación siguiente:

- $VR(n, r)$ para indicar la cantidad de r-muestras ordenadas con repetición (variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r).
- $V(n, r)$ para indicar la cantidad de r-muestras ordenadas sin repetición (variaciones de n elementos tomados de r en r).
- $C(n, r)$ para indicar la cantidad de r-muestras no ordenadas sin repetición (combinaciones de n elementos tomados de r en r).
- $CR(n, r)$ para indicar la cantidad de r-muestras no ordenadas con repetición (combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r).

5.1. Ejercicios

Decir a qué tipos de selecciones de objetos pertenecen cada una de las situaciones siguientes, e indicar cuál es el conjunto de objetos, si importa el orden y si se permite la repetición de elementos:

1-44 Se lanza una moneda cinco veces y se anotan los resultados ordenadament: un 1 si sale cruz y un 0 si sale cara. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener?

1-45 Se lanzan diez monedas idénticas, ¿cuántos resultados diferentes se pueden producir?

1-46 En un concurso literario participan quince personas y se asignan tres premios: el primero, de 3000 €, el segundo, de 2000 € y el tercero, de 1000 €. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir los premios? ¿Y si los tres premios fueran de la misma cantidad?

1-47 ¿Cuántos números de tres cifras impares podemos escribir?

1-48 ¿Cuántos números menores que 100 y con las dos cifras diferentes podemos escribir, utilizando sólo las cifras 1, 3, 5 y 7?

1-49 En una estantería hay seis libros diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar?

1-50 ¿Cuántas palabras binarias de longitud 9 contienen tres ceros?

5.2. Soluciones

1-44 El conjunto es $X = \{0, 1\}$ y queremos seleccionar cinco elementos de X, teniendo en cuenta el orden (según el orden de lanzamiento) y permitiendo la repetición. Por lo tanto, corresponde al caso $\boxed{\text{a}}$.

1-45 El conjunto es $X = \{\text{cara, cruz}\}$ y queremos seleccionar diez elementos de X, sin tener en cuenta el orden (todas las monedas se lanzan al mismo tiempo) y permitiendo la repetición. Por lo tanto, corresponde al caso $\boxed{\text{d}}$.

1-46 El conjunto X es el de las quince personas. Queremos escoger tres diferentes: o sea, no permitiremos repetición. Si los premios son diferentes, importa el orden (según el cual cada persona recibirá un premio determinado), por lo tanto, corresponde al caso $\boxed{\text{b}}$. Si los premios fueran iguales, no importaría el orden y, por lo tanto, correspondería al caso $\boxed{\text{c}}$.

1-47 El conjunto es $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y queremos escoger tres, teniendo en cuenta el orden y permitiendo la repetición. Por lo tanto, corresponde al caso $\boxed{\text{a}}$.

1-48 El conjunto es $X = \{1, 3, 5, 7\}$ y queremos escoger dos, teniendo en cuenta el orden, pero sin repetir elementos. Por lo tanto, corresponde al caso $\boxed{\text{b}}$.

1-49 Sea X el conjunto de los seis libros diferentes. Queremos escoger los seis para ordenarlos. Por lo tanto, corresponde al caso $\boxed{\text{b}}$.

1-50 El conjunto X es el conjunto de las nueve posiciones diferentes en que podemos colocar un cero. Queremos escoger tres de diferentes sin que nos importe el orden. Por lo tanto, corresponde al caso $\boxed{\text{c}}$.

6. Muestras ordenadas con repetición

En la sección anterior hemos analizado diferentes tipos de selecciones de objetos de un conjunto. Ahora estudiaremos el caso en que importa el orden en las selecciones y podemos repetir elementos del conjunto. Un ejemplo que hemos visto de este tipo es: ¿cuántos números de dos cifras podemos formar con las cifras $1, 2, 3, 4$? Otros ejemplos se han visto en los ejercicios 1-30 y 1-31, en los que hemos introducido la noción de palabra de longitud r sobre un alfabeto X, como un elemento cualquiera del conjunto producto cartesiano X^r. A menudo sólo escribiremos $x_1, x_2, \ldots, x_r$, en lugar de $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, para simplificar la escritura, y también diremos que $x_1, x_2, \ldots, x_r$ es una *r-muestra ordenada con repetición* del conjunto X.

Algunas aplicaciones en que se utiliza este tipo de muestras son: el cálculo del número de palabras de longitud máxima r, sobre un alfabeto de n elementos; el cálculo del número de subconjuntos posibles de un conjunto de r elementos; y el cálculo del número de funciones $f : \mathbb{N}_r \to X$.

6.1. Muestras ordenadas con repetición

Definición 1.15

Dado un conjunto X de n elementos, una **r-muestra ordenada con repetición** del conjunto X es una lista ordenada $x_1, x_2, \ldots, x_r$, donde cada x_j es un elemento del conjunto X, para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Es necesario observar...

... la equivalencia entre "palabra de longitud r sobre el alfabeto X" y "r-muestra ordenada con repetición de X", donde X es un conjunto de cardinal n. También es frecuente encontrar otras expresiones como: **variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r** .

Definición 1.16

Dado un conjunto X de n elementos, denotaremos por $\boldsymbol{VR(n,r)}$ la cantidad de r-muestras ordenadas con repetición del conjunto X.

Proposición 1.17

Si el conjunto X tiene n elementos, entonces podemos formar

$$VR(n,r) = n^r$$

r-muestras ordenadas con repetición del conjunto X.

Ejemplo 1-51

Hay $VR(5,2) = 5^2 = 25,$ 2-muestras ordenadas con repetición en un conjunto de cinco elementos.

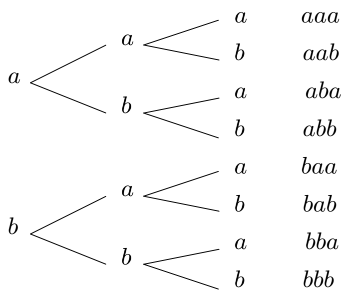
Hay $VR(7,4) = 7^4 = 2401,$ 4-muestras ordenadas con repetición en un conjunto de siete elementos.

Se pueden hacer $VR(3,6) = 3^6 = 729,$ 6-muestras ordenadas con repetición en un conjunto de tres elementos.

Observar...

... que si $r = 0$, entonces $VR(n,0) = 1$, y también que $VR(0,0) = 1$.

Se puede construir el conjunto de las r-muestras ordenadas con repetición de un conjunto X de n elementos, mediante un diagrama en árbol. Suponemos que queremos escribir todas las 3-muestras ordenadas con repetición de los elementos de $X = \{a, b\}$. A continuación se muestra el diagrama correspondiente:



Se han obtenido $VR(2,3) = 2^3 = 8$ muestras, tal y como preveíamos antes de hacer el diagrama.

Ejercicio 1-52

¿Existe un conjunto X con el que se puedan hacer quinientas doce 3-muestras ordenadas con repetición? ¿Y si son 4-muestras?

Solución: En el primer caso, $r = 3$ y $VR(n,3) = 512$. Por lo tanto, debemos resolver la ecuación $n^3 = 512$, que tiene como solución entera positiva $n = 8$. Así, X puede ser cualquier conjunto con ocho elementos. En el segundo, $r = 4$ y tendríamos que resolver la ecuación $n^4 = 512$, que no tiene solución entera. Por lo tanto, no existe un tal conjunto X.

6.2. Palabras de longitud máxima r, sobre un alfabeto

Tal y como hemos observado antes, las palabras de longitud r sobre un alfabeto X de n elementos son también r-muestras ordenadas con repetición de un conjunto X de n elementos. En los ejercicios 1-30 y 1-31 se habían visto dos ejemplos con palabras de longitud r sobre un alfabeto de dos y tres elementos, respectivamente.

A continuación, calcularemos el número de palabras de longitud máxima r que se pueden formar utilizando un alfabeto de n elementos. Es importante entender todo el desarrollo de este cálculo (ver demostración de la proposición siguiente), puesto que es un ejemplo donde se utilizan el principio de la suma y el de la multiplicación a la vez.

Proposición 1.18

El número de palabras de longitud máxima r, sobre un alfabeto de n elementos, es $\dfrac{n^{r+1}-1}{n-1}$.

Demostración: Antes que nada indicamos por P_j el conjunto de palabras de longitud exactamente j, donde j varía entre 0 y r (admitimos que hay una única palabra de longitud 0: la palabra vacía). Evidentemente, $P_j = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{j}$, y podemos aplicar el principio de la multiplicación para calcular el cardinal de P_j:

$$|P_j| = |X \times \cdots \times X| = |X| \cdots |X| = n \cdots n = n^j.$$

Por otro lado, sea P el conjunto de palabras de longitud máxima r, es obvio que $P = P_0 \cup \cdots \cup P_r$. Además, esta unión es disjunta y, consecuentemente, también podemos aplicar el principio de la adición

$$|P| = |P_0 \cup \cdots \cup P_r| = |P_0| + \cdots + |P_r| = 1 + n + n^2 + \cdots + n^r = \frac{n^{r+1}-1}{n-1}.$$

Por lo tanto, el número de palabras de longitud máxima r, sobre un alfabeto de n elementos, es $\dfrac{n^{r+1}-1}{n-1}$. ∎

Comprobar...

... la igualdad $1+n+\cdots+n^r = \frac{n^{r+1}-1}{n-1}$, haciendo el producto $(1+n+\cdots+n^r)(n-1) = n^{r+1}-1$.

Ejercicio 1-53

¿Cuántas palabras binarias se pueden formar que tengan longitud menor o igual que 7?

Solución: En este caso, $n = 2$ y $r = 7$. Por lo tanto, hay

$$\frac{2^{7+1}-1}{2-1} = 256 - 1 = 255$$

palabras binarias de longitud máxima 7.

Ejercicio 1-54

¿Cuántas palabras de longitud máxima 7 se pueden formar utilizando el alfabeto dado por $X = \{a, b, c, d\}$?

Solución: En este caso, $n = 4$ y $r = 7$. El número de palabras pedido seria

$$\frac{4^{7+1}-1}{4-1} = \frac{65536-1}{3} = 21845.$$

Ejercicio 1-55

Si sobre un alfabeto X de cardinal n se han podido construir setecientas ochenta y una palabras de longitud máxima 4, ¿cuál es el valor de n?

Solución: El problema consiste en resolver la ecuación $\dfrac{n^5-1}{n-1} = 781$, que tiene como solución entera positiva $n = 5$.

6.3. Cálculo del número de subconjuntos de un conjunto

Proposición 1.19

Si r es el número de elementos de un conjunto Y, entonces el número de subconjuntos posibles de Y es 2^r.

Demostración: Demostraremos que el conjunto de todos los subconjuntos posibles de Y tiene el mismo número de elementos que el conjunto de las r-muestras ordenadas con repetición del conjunto $\{0, 1\}$. Además, este número es $VR(2, r) = 2^r$, tal y como muestra el resultado. Sean $y_1, y_2, \ldots, y_r$ los r elementos del conjunto Y. A cada subconjunto A de Y le podemos asociar la r-muestra $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de elementos del conjunto $\{0, 1\}$ definida $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$ como

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } y_i \in A \\ 0 & \text{si } y_i \notin A \end{cases}$$

Recíprocamente, a cada r-muestra ordenada de elementos binarios, $x_1, x_2, \ldots, x_r$, corresponde un subconjunto A de Y tal que $y_i \in A$, si y sólo si, $x_i = 1$, donde $i \in \{1, \ldots, r\}$. La correspondencia que acabamos de establecer, entre subconjuntos de Y y r-muestras ordenadas con repetición de elementos de $\{0, 1\}$, es una biyección entre conjuntos finitos. Por lo tanto, hay el mismo número de elementos. ∎

El siguiente ejemplo nos muestra más claramente esta correspondencia.

Ejemplo 1-56

Sea $Y = \{a, b, c, d, e\}$ y sea $A = \{a, c, d\}$. En este caso, al subconjunto A le podemos asociar la 5-muestra ordenada de elementos binarios 10110, donde el primer dígito (un 1) representa que el primer elemento de Y (o sea, a) está en el subconjunto, el segundo dígito (un 0) significa que el segundo elemento de Y (o sea, b) no está en el subconjunto, y así sucesivamente.

Recíprocamente, sea la muestra 11010. Esta muestra corresponde al subconjunto $A = \{a, b, d\}$, puesto que hay un 1 en las posiciones primera, segunda y cuarta, que corresponde a los elementos a, b, d del conjunto Y, respectivamente.

Ejercicio 1-57

Encontrar el número de subconjuntos del conjunto $\{s, t, u, v, x, y, z\}$. ¿Existe un conjunto con 1024 subconjuntos? ¿I con 213546376547 subconjuntos?

Solución: El número de subconjuntos de un conjunto de r elementos es 2^r; por lo tanto, el conjunto dado que tiene cardinal 7, tiene $2^7 = 128$ subconjuntos. La segunda pregunta tiene respuesta afirmativa ya que la ecuación $2^r = 1024$ tiene solución $r = 10$. En cambio, no puede existir un conjunto con 213546376547 subconjuntos puesto que este número es impar y el número 2^r siempre es par.

Ejercicio 1-58

¿Cuántos subconjuntos de $\{s, t, u, v, x, y, z\}$ contienen el elemento x? ¿Cuántos contienen los elementos s, v, z?

Solución: El número de subconjuntos que contienen x es el mismo que el número de subconjuntos de $\{s, t, u, v, y, z\}$, porque sólo es necesario añadirles el elemento x. Por lo tanto, el número de subconjuntos es $2^6 = 64$. Del mismo modo, el número de subconjuntos que contienen s, v, z es el mismo que el número de subconjuntos de $\{t, u, x, y\}$: es decir, $2^4 = 16$.

6.4. Cálculo del número de funciones

Dado un conjunto X con n elementos, cada función f de $\mathbb{N}_r = \{1, 2, \ldots, r\}$ en X se puede identificar como una r-muestra ordenada con repetición de X. Sólo es necesario notar que cada función $f : \mathbb{N}_r \to X$ se puede escribir como una r-muestra ordenada con repetición $f(1)f(2)\cdots f(r)$, y recíprocamente cada r-muestra ordenada con repetición de X, $x_1, x_2, \cdots, x_r$, representa una función $f : \mathbb{N}_r \to X$ tal que $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, ..., $f(r) = x_r$ (ver ejercicio 1-8).

Así, el conjunto de las r-muestras ordenadas con repetición del conjunto X no es otra cosa que el conjunto de las funciones de $\mathbb{N}_r$ en X. Por lo tanto, hay $VR(n, r)$ funciones de $\mathbb{N}_r$ en un conjunto X de n elementos.

Ejemplo 1-59

La 3-muestra ordenada con repetición aba sobre $X = \{a, b\}$ puede ser interpretada como la función f de $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$ en $X = \{a, b\}$, tal que $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = a$. Recíprocamente, a cada función f de $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$ en $X = \{a, b\}$ le podemos asociar la 3-muestra ordenada con repetición $f(1)f(2)f(3)$.

El conjunto de las 3-muestras ordenadas con repetición del conjunto $X = \{a, b\}$ es, pues, el conjunto de las funciones de $\mathbb{N}_3$ en X. Por lo tanto, hay $VR(2, 3) = 2^3 = 8$ funciones de $\mathbb{N}_3$ en $X = \{a, b\}$.

Ejercicio 1-60

¿Cuántas funciones podemos construir de $\mathbb{N}_7$ en $X = \{0, 1\}$?

Solución: El número pedido no es otro que $VR(2, 7) = 2^7 = 128$. Hay un total de ciento veintiocho funciones (7-muestras ordenadas con repetición) del conjunto $\mathbb{N}_7$ en $X = \{0, 1\}$.

Ejercicio 1-61

El número total de funciones de $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$ en el conjunto B es 125. ¿Cuántos elementos tiene B?

Solución: Si B tiene cardinal n, se debe cumplir $n^3 = 125$. Por lo tanto, $n = 5$.

6.5. Ejercicios

1-62 Se lanza una moneda cinco veces y se anotan los resultados ordenadament: un 1 si sale cruz y un 0 si sale cara. ¿Cuántas listas ordenadas diferentes de cinco elementos se pueden obtener?

1-63 ¿Cuántos números de tres cifras impares podemos escribir?

1-64 En el juego del dominó, cada ficha se puede representar por el símbolo $[x|y]$, donde x, y son elementos del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Explicar por qué el número total de fichas es veintiocho en lugar de cuarenta y nueve.

1-65 Sobre el alfabeto ternario $X = \{0, 1, 2\}$, ¿cuántas palabras hay de longitud no superior a seis? ¿Cuántas de estas palabras empiezan por cero?

6.6. Soluciones

1-62 El número de listas que se pueden obtener es $VR(2, 5) = 2^5 = 32$.

1-63 Hay que hacer 3-muestras ordenadas con repetición con los elementos 1, 3, 5, 7, 9. Hay $VR(5, 3) = 5^3 = 125$.

1-64 El número de 2-muestras ordenadas con repetición a partir de los elementos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 es $VR(7, 2) = 7^2 = 49$, pero en este juego la ficha $[x|y]$ es la misma que la $[y|x]$. Por lo tanto, el número de fichas es igual a la mitad del número de 2-muestras con las cifras diferentes

$$\frac{49 - 7}{2} = 21$$

más el número de fichas con las cifras iguales (hay siete). Por lo tanto, el número total de fichas es $21 + 7 = 28$.

1-65 Se trata de aplicar la fórmula a la situación actual. Hay $\dfrac{n^{r+1} - 1}{n - 1} = \dfrac{3^{6+1} - 1}{3 - 1} =$ $= 1093$ palabras ternarias de longitud menor o igual a seis.

Hay $\dfrac{1092}{3} = 364$ palabras que empiezan por cero (una tercera parte del total de palabras no vacías).

7. Muestras ordenadas sin repetición

En esta sección calcularemos el número de selecciones de objetos de un conjunto, cuando importa el orden en las selecciones y no podemos repetir elementos del conjunto. En la sección 5 se introdujo un ejemplo de este tipo de selecciones: ¿cuántos números de dos cifras diferentes podemos formar con las cifras $1, 2, 3, 4$?

Una selección de este tipo la llamaremos *r-muestra ordenada sin repetición*. En el caso de tener muestras ordenadas sin repetición, si intervienen todos los elementos del conjunto, las llamaremos *permutaciones*.

Estos tipos de muestras nos permitirán calcular el número de funciones inyectivas y biyectivas, $f : \mathbb{N}_r \to X$.

7.1. Muestras ordenadas sin repetición

Definición 1.20

Dado un conjunto X de n elementos, una **r-muestra ordenada sin repetición** del conjunto X es una lista ordenada de elementos diferentes $x_1, x_2, \ldots, x_r$, donde cada x_j es un elemento del conjunto X, para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Recordar...

... que también es frecuente llamar a estas muestras **variaciones (sin repetición) de n elementos tomados de r en r**.

Ejemplo 1-66

Si $X = \{a, b, c, d\}$, son ejemplos de muestras ordenadas sin repetición de X las siguientes: abc (3-muestra), bcd (3-muestra), $bcad$ (4-muestra), ca (2-muestra), etc.

Ejercicio 1-67

Escribir todas las 2-muestras ordenadas sin repetición del conjunto $X = \{a, b, c\}$.

Solución: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Definición 1.21

Dado un conjunto X de n elementos, denotaremos por $\boldsymbol{V(n, r)}$ la cantidad de r-muestras ordenadas sin repetición del conjunto X.

Podemos encontrar una fórmula que nos dé el número total de muestras.

Proposición 1.22

Si el conjunto X tiene n elementos, entonces podemos formar

$$V(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-(r-1))$$

r-muestras ordenadas sin repetición, con elementos del conjunto X.

Observar...

... que r no puede ser mayor que n.

Ejemplo 1-68

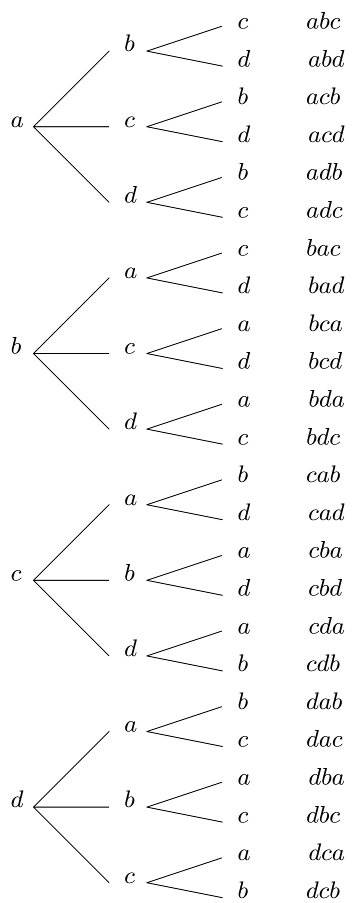
$V(6,3) = 6 \cdot (6-1) \cdot (6-2) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Esto quiere decir que sobre un conjunto de seis elementos se pueden hacer ciento veinte 3-muestras ordenadas sin repetición.

$V(4,4) = 4 \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Hay veinticuatro 4-muestras ordenadas sin repetición, escogiendo los elementos en un conjunto de cuatro elementos.

Observar...

... que si $r = 0$, entonces $V(n,0) = 1$, y también que $V(0,0) = 1$.

Podemos utilizar diagramas en árbol para construir de manera organizada todas las r-muestras ordenadas sin repetición escogiendo los elementos de un conjunto X de cardinal n. En la figura se construyen las 3-muestras sobre el conjunto $X = \{a,b,c,d\}$. De acuerdo con el diagrama y de acuerdo con el resultado de la fórmula hay $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ muestras.



7.2. Permutaciones

Ejemplo 1-69

Si $X = \{a, b, c, d\}$, las 4-muestras ordenadas sin repetición que se pueden hacer con los elementos de X son: $abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, etc. Como sabemos, hay $V(4, 4) =$ $= 4{\cdot}(4-1){\cdot}(4-2){\cdot}(4-3) = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24$ muestras, y las podríamos construir mediante un diagrama en árbol. En este caso, observemos que en cada muestra aparecen todos los elementos del conjunto de cuatro elementos.

Definición 1.23

Dado un conjunto X de n elementos, las n-muestras ordenadas sin repetición se llaman **permutaciones** (sin repetición) de los elementos del conjunto X.

Notación

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos puede escribirse como $V(n, n)$, pero también lo podemos representar por $P(n)$. Así, tenemos $V(n, n) = P(n) =$ $= n{\cdot}(n-1){\cdot}(n-2)\cdots 2{\cdot}1$. Por otro lado, el número $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ se denota también por $n!$, que se lee **factorial de n**.

Ejemplo 1-70

Las permutaciones de los elementos del conjunto $\{a, b, c\}$ son las 3-muestras ordenadas sin repetición, es decir: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Ejemplo 1-71

El número de permutaciones de los elementos del conjunto $X = \{x, y, z, t, u, v\}$ es $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Notación

También podemos escribir la fórmula, para calcular la cantidad de r-muestras ordenadas sin repetición de un conjunto de n elementos, de este modo: $V(n, r) =$ $= \frac{P(n)}{P(n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Ejercicio 1-72

Con los elementos de un conjunto X se pueden hacer ciento veinte permutaciones. ¿Cuántos elementos tiene este conjunto?

Solución: Si n es el cardinal de X, debemos resolver la ecuación:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = 120,$$

donde n es un entero positivo. La solución es (utilizar la calculadora) $n = 5$.

7.3. Cálculo del número de funciones inyectivas (biyectivas)

Dado un conjunto X con n elementos, cada función inyectiva f del conjunto $\mathbb{N}_r = \{1, 2, \ldots, r\}$ en X se puede identificar como una r-muestra ordenada sin repetición de X, puesto que las funciones inyectivas son aquellas en que cada elemento de X tiene como máximo una antiimagen. O sea, cada elemento de X debe aparecer en cada muestra como máximo una vez.

De aquí se deduce que el conjunto de las r-muestras ordenadas sin repetición de X es el conjunto de las funciones inyectivas de $\mathbb{N}_r$ en X. Por lo tanto, hay $V(n, r)$ funciones inyectivas de $\mathbb{N}_r$ en un conjunto X de n elementos.

Ejemplo 1-73

La 3-muestra ordenada sin repetición abc del conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ puede ser interpretada como la función inyectiva f de $\mathbb{N}_3$ en X, definida por $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$. Sobre el mismo conjunto, la 3-muestra ordenada sin repetición bad sería la función inyectiva g de $\mathbb{N}_3$ en X definida por $g(1) = b$, $g(2) = a$, $g(3) = d$. Recíprocamente, la función h de $\mathbb{N}_3$ en X definida por $h(1) = d$, $h(2) = c$, $h(3) = b$ se puede interpretar como la 3-muestra ordenada sin repetición dcb sobre X.

El conjunto de las 3-muestras ordenadas sin repetición del conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ es, pues, el conjunto de las funciones inyectivas de $\mathbb{N}_3$ en X. Por lo tanto, hay $V(4, 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ funciones inyectivas de $\mathbb{N}_3$ en $X = \{a, b, c, d\}$.

Ejercicio 1-74

¿Cuántas funciones inyectivas se pueden construir del conjunto $Y = \{x, y, z\}$ en el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$?

Solución: Y contiene tres elementos. Por lo tanto, esto es equivalente a calcular el número de funciones inyectivas de $\mathbb{N}_3$ en $X = \{a, b, c, d\}$. El número pedido será, pues, igual que antes, 24.

Ejercicio 1-75

El número total de funciones inyectivas de $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$ en un conjunto A es 42. ¿Cuántos elementos tiene A?

Solución: Debemos aplicar la fórmula de $V(n, r)$ cuando $r = 2$. Así, obtenemos $V(n, 2) = n(n - 1) = 42$, y de aquí $n = 7$. El conjunto A tiene siete elementos.

A continuación analizamos las funciones que, además de ser inyectivas, son exhaustivas: o sea, las funciones biyectivas. En este caso, cada función biyectiva f del conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ en X (o del conjunto X en sí mismo) se puede identificar como una n-muestra ordenada sin repetición de X (o equivalentemente como una permutación de X). Recordemos que las funciones biyectivas son aquellas en que cada elemento de X tiene exactamente una antiimagen: o sea, cada elemento de X debe aparecer en cada muestra exactamente una vez (las muestras deben contener, pues, n elementos).

La conclusión es que el conjunto de las permutaciones (n-muestras ordenadas sin repetición) del conjunto X es el conjunto de las funciones biyectivas de $\mathbb{N}_n$ en X (o de X en sí mismo). Por lo tanto, hay $P(n)$ funciones biyectivas de X en X. Además, de ahí que, una función f biyectiva de X en X también recibe el nombre de *permutación de* X.

Ejemplo 1-76

El número de funciones biyectivas del conjunto $X = \{x, y, z, t\}$ en sí mismo es, por tanto, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

7.4. Ejercicios

1-77 Demostrar la igualdad siguiente: $V(n,r) \cdot V(n-r, s-r) = V(n,s)$, donde n, r y s son enteros positivos tales que $n > s > r$.

1-78 ¿Cuántas palabras de cuatro letras se pueden formar con un alfabeto de diez símbolos, teniendo en cuenta que no hay restricciones de léxico, excepto la repetición de letras en una misma palabra?

1-79 ¿Cuántos números menores de cien y con las dos cifras diferentes podemos escribir, utilizando sólo las cifras 1, 3, 5 y 7?

1-80 En un concurso literario participan quince personas y se asignan tres premios: el primero, de 3000 €, el segundo, de 2000 € y el tercero, de 1000 €. Si una misma persona no puede recibir más de un premio, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden distribuir los premios?

1-81 Escribir el valor de $n!$ para $n = 1, 2, \ldots, 10$.

1-82 En una estantería hay seis libros diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar?

1-83 Simplificar algebraicamente la siguiente expresión:

$$\frac{(m-1)!(a+b)!}{m!(a+b-1)!}.$$

1-84 Escribir en forma de cociente de dos factoriales el producto siguiente:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1).$$

1-85 Escribir todos los números que se obtienen al permutar las cuatro cifras $1, 2, 3, 4$. Ordenarlos de menor a mayor. ¿Cuál será la suma de todos los números obtenidos?

7.5. Soluciones

1-77

$$\begin{aligned}
&V(n,r) \cdot V(n-r, s-r) = \\
&= [n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)] \cdot [(n-r) \cdot (n-r-1) \cdots (n-r-s+r+1)] = \\
&= [n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)] \cdot [(n-r) \cdot (n-r-1) \cdots (n-s+1)] = \\
&= V(n,s).
\end{aligned}$$

1-78 Nos piden el número de 4-muestras ordenadas sin repetición que se pueden hacer con un alfabeto de diez símbolos: es decir $V(10,4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

1-79 Hay $V(4,2) = 4 \cdot 3 = 12$ números con las condiciones exigidas. La condición “menores de cien” es inútil puesto que los números deben ser de dos cifras.

1-80 Si suponemos que una misma persona no puede recibir más de un premio (no hay repetición), los premios se pueden distribuir de $V15,3) = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ maneras.

1-81 $1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720,\ 7! = 5040,\ 8! = 40320,$ $9! = 362880,\ 10! = 3628800.$

1-82 La respuesta es $P(6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

1-83 $\dfrac{(m-1)!(a+b)!}{m!(a+b-1)!} = \dfrac{(m-1)(m-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot (a+b)(a+b-1)\cdots 2 \cdot 1}{m(m-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot (a+b-1)(a+b-2)\cdots 2 \cdot 1}$.

Eliminando los términos repetidos en el numerador y denominador, se obtiene $\dfrac{a+b}{m}$.

1-84 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

1-85 Las $4! = 24$ permutaciones de 1, 2, 3, 4 son:

$$\begin{aligned}
&1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,\\
&2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,\\
&3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,\\
&4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.
\end{aligned}$$

Hemos escrito las permutaciones a partir del diagrama en árbol correspondiente, y así los números quedan ordenados de menor a mayor.

Por lo que respecta a la suma de todos los números obtenidos, obsérvese que si sumamos las unidades obtenemos: $6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 60$; la suma de las decenas es, también, 60, etc. La suma total será, por lo tanto, 66660.

Ejercicios de autoevaluación

1-86 Encontrar todas las funciones de $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b\}$. Clasificarlas en dos clases: exhaustivas y no exhaustivas.

1-87 Encontrar todas las funciones de $X = \{1, 2\}$ en $Y = \{a, b, c\}$. Clasificarlas en dos clases: inyectivas y no inyectivas.

1-88 Construir una función inyectiva de $\mathbb{N}$ en el conjunto $X = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ que nos demuestre que X es infinito. ¿Es biyectiva la función que habéis construido?

1-89 Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es numerable a partir de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ es par} \\ \frac{-(x-1)}{2} & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

1-90 Demostrar que si escogemos diez puntos cualesquiera en un triángulo equilátero de lado una unidad, al menos dos de los puntos se encuentran a una distancia menor o igual a $1/3$.

1-91 Sabiendo que un byte es una palabra binaria de longitud 8, ¿cuántos bytes diferentes hay? ¿Cuántos contienen por lo menos dos unos?

1-92 ¿De cuántas maneras se puede contestar un test de quince preguntas si cada pregunta está formulada en términos de verdadero-falso?

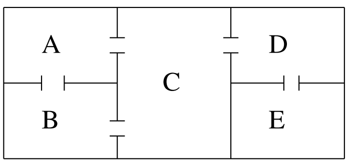
1-93 ¿Cuántas palabras de longitud máxima 8 se pueden formar a partir de un alfabeto de seis elementos?

1-94 ¿Cuántas palabras de longitud máxima 8 se pueden formar a partir de un alfabeto de diez elementos, si en una misma palabra no pueden haber elementos repetidos?

1-95 ¿Cuántos subconjuntos de por lo menos dos elementos tiene un conjunto de diez elementos?

1-96 Una comisión de diez personas debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

1-97 Se quieren pintar las habitaciones de la casa que muestra la figura siguiente de forma que las habitaciones que están conectadas mediante una puerta tengan colores diferentes. ¿De cuántas maneras podemos pintar la casa si disponemos de n colores?



1-98 Demostrar que hay seis maneras diferentes de colocar cuatro personas alrededor de una mesa circular. ¿De cuántas maneras se pueden colocar n personas?

1-99 ¿Cuántas funciones hay del conjunto $A = \{x, y, z, t\}$ en un conjunto B de siete elementos? ¿Cuántas de estas funciones son inyectivas? ¿Cuántas, biyectivas?

1-100 ¿Cuántas funciones biyectivas hay de un conjunto X de diez elementos en el mismo conjunto?

Solucionario

1-86 De acuerdo con la notación introducida en el ejercicio 1-8 las funciones son: aaa, bbb, aab, aba, baa, abb, bab, bba.

La clase de las exhaustivas es: aab, aba, baa, abb, bab, bba. La clase de las no exhaustivas es: aaa, bbb.

1-87 Las funciones son: aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.

La clase de las inyectivas es: ab, ac, ba, bc, ca, cb. La clase de las no inyectivas es: aa, bb, cc.

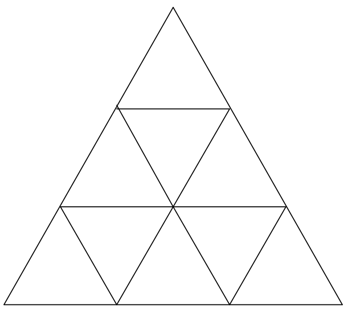
1-88 La función f de $\mathbb{N}$ en $X = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ definida por $f(x) = 2x$ es inyectiva (sólo es necesario ver que $2x = 2y$ implica $x = y$). Esto demuestra que el conjunto X es infinito.

Además, esta función es biyectiva (todo elemento de X tiene antiimagen: la antiimagen del 2 es 1, la antiimagen del 4 es 2, la antiimagen del 6 es 3, etc.) y, por lo tanto, podemos decir que el conjunto X es numerable.

1-89 Veamos que f es inyectiva. Empezamos observando que la imagen por f de un número natural par es un entero positivo y la imagen de un número natural impar es 0 o bien un entero negativo. Así, si suponemos $f(x) = f(y)$ deberán ser x, y pares o bien x, y impares, y para cualquiera de estos casos se deduce $x = y$.

Falta ver que f es exhaustiva. Sea z un entero cualquiera. Si $z = 0$ entonces tiene antiimagen 1, si z es positivo entonces tiene antiimagen $2z$, y si z es negativo entonces tiene antiimagen $1 - 2z$.

1-90 Se puede demostrar a partir del principio de las cajas y la figura siguiente:



1-91 El alfabeto es $\{0, 1\}$, por lo tanto el número de bytes es $2^8 = 256$. De estos 256 bytes hay uno que no tiene unos: 00000000. Y hay ocho que tienen exactamente un uno: $10000000, 01000000, 00100000, \ldots, 00000001$. Por lo tanto, hay $256 - 9 = 247$ bytes que contienen por lo menos dos unos.

1-92 Si representamos verdadero por V y falso por F, una manera de contestar el test es, por ejemplo: $VFVFVFVVFFFFVFV$. Se trata de calcular el número de 15-muestras ordenadas con repetición que se pueden hacer con los símbolos V i F. El número es $2^{15} = 32768$.

1-93 Al aplicar la fórmula $\dfrac{n^{r+1} - 1}{n - 1}$ con $n = 6$ y $r = 8$, se obtienen 2015539 palabras.

1-94 En este caso debemos calcular la suma: $V(10, 0) + V(10, 1) + V(10, 2) + V(10, 3) + \cdots + V(10, 8) = 2606501$ palabras. El sumando $V(10, 0) = 1$ corresponde a la palabra vacía.

1-95 Un conjunto de diez elementos tiene en total $2^{10} = 1024$ subconjuntos, de los cuales uno es el vacío y diez son los unitarios (tienen un único elemento). Por lo tanto, el número que nos piden es $1024 - 11 = 1013$.

1-96 La elección se puede hacer de tantas maneras como 3-muestras ordenadas sin repetición podamos hacer con diez elementos. Es decir: $V(10, 3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Dado que suponemos que una misma persona no puede ser elegida para más de un cargo, las muestras son sin repetición.

1-97 Debemos suponer $n \geq 3$. El número de maneras diferentes de pintar la casa es $n(n-1)^3(n-2)$. En efecto: la habitación A se puede pintar de n maneras. Una vez hemos fijado un color para A, la habitación B la podemos pintar de $n-1$ maneras. Fijado un color para B, podemos pintar C de $n-2$ maneras. Fijado un color para C, podemos pintar D de $n-1$ maneras, y fijado un color para D, podemos pintar E de $n-1$ maneras. En total tenemos, por lo tanto, $n(n-1)(n-2)(n-1)(n-1) = n(n-1)^3(n-2)$ maneras de pintar la casa.

Así, por ejemplo, en el caso de disponer de tres colores, habría veinticuatro maneras. Si $n = 4$, entonces el número es 216, etc.

1-98 Para empezar, supongamos $n = 4$. Con cuatro personas podemos hacer $4! = 24$ permutaciones. Cada una de estas permutaciones corresponde a una manera de colocar las cuatro personas alrededor de una mesa circular. Por ejemplo, la permutación $abcd$ corresponde a la distribución siguiente: a la derecha de la persona a se coloca la persona b, a la derecha de b se coloca c y a la derecha de c se coloca d. Pero la permutación $dabc$ define la misma colocación, lo mismo pasa con $cdab$, etc. Por lo tanto, diferentes permutaciones pueden dar la misma distribución alrededor de la mesa. Continuando con el caso $n = 4$ podemos hacer seis grupos, de cuatro permutaciones cada uno, que definen la misma distribución:

$$\begin{gathered} abcd,\ dabc,\ cdab,\ bcda \\ abdc,\ cabd,\ dcab,\ bdca \\ acbd,\ dacb,\ bdac,\ cbda \\ acdb,\ bacd,\ dbac,\ cdba \\ adbc,\ cadb,\ bcad,\ dbca \\ adcb,\ badc,\ cbad,\ dcba \end{gathered}$$

Obsérvese que lo que hemos hecho es fijar una persona (a), considerar una permutación que empieza por a ($abcd$) y hacer los desplazamientos cíclicos de esta permutación ($dabc$, $cdab$, $bcda$). La permutación $abcd$ y sus desplazamientos cíclicos forman el primer grupo. A continuación consideramos la permutación $abdc$ y hacemos lo mismo, etc. Claro está que el número de maneras diferentes de colocar las cuatro personas alrededor de una mesa circular es, por lo tanto, seis (tantas como grupos hemos podido formar). Este número 6 es el resultado de dividir 4! (el total de permutaciones) entre 4 (número de permutaciones dentro de cada grupo = número de personas).

Generalizando lo que hemos dicho, podemos afirmar que hay $n!/n = (n-1)!$ maneras de colocar n personas alrededor de una mesa circular.

1-99 El número de funciones de un conjunto de cuatro elementos a un conjunto de siete elementos coincide con el número de 4-muestras ordenadas con repetición del conjunto B. O sea, $VR(7, 4) = 7^4 = 2401$.

De las anteriores, el número de funciones que son inyectivas coincide con el número de 4-muestras ordenadas sin repetición del conjunto B. O sea, $V(7, 4) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

De funciones biyectivas del conjunto $A = \{x, y, z, t\}$ en el conjunto B de siete elementos, no hay ninguna, puesto que el cardinal de estos conjuntos es diferente.

1-100 El número de funciones biyectivas de X en X coincide con el número de permutaciones de X. Por lo tanto, es $P(10) = 10!$.

Combinatoria. Muestras no ordenadas

Ramon Masià

Jaume Pujol

Josep Rifà

Mercè Villanueva

P06/75006/01395

www.uoc.edu

Índice

Introducción

Este módulo complementa el módulo anterior. Acabamos de ver más conceptos y técnicas que, en un nivel elemental, forman la combinatoria

En el módulo anterior hemos estudiado diferentes tipos de selecciones de objetos de un conjunto. Éstos dependen de si las selecciones son ordenadas o no, y de si puede haber repetición o no en una misma selección. Hemos resuelto problemas de selecciones ordenadas que responden a los modelos llamados *muestras ordenadas con repetición y sin*. En este segundo módulo se tratan básicamente los casos en que la ordenación de los elementos en una selección es irrelevante, las llamadas *muestras no ordenadas con repetición y sin*.

Los dos primeros apartados se dedican a la selección de muestras no ordenadas con repetición y sin. El cálculo de la cantidad de muestras de estos tipos se hace mediante el llamado *número binomial*. Algunas propiedades nos facilitan fórmulas prácticas para calcular el número de selecciones posibles en los dos casos y se ven ejemplos. Se ven también algunas aplicaciones del número binomial a cuestiones diversas: el desarrollo del binomio $(a+b)^n$, el cálculo del número de soluciones enteras no negativas (o sólo positivas) de una ecuación de la forma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ y el cálculo del número de términos de la potencia $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^r$. Finalmente, se da un resumen de las fórmulas de cálculo estudiadas para los diferentes tipos de selecciones de objetos.

En el tercer apartado se introduce el principio de inclusión-exclusión que proporciona el cardinal de la unión de una serie de conjuntos finitos, aunque la intersección entre algunos de ellos no sea vacía. Toda una serie de aplicaciones de este principio nos ayudarán a ver más claramente su interés.

1. Muestras no ordenadas sin repetición

En esta sección nos centraremos en el problema de calcular de cuántas maneras podemos seleccionar un determinado número de objetos de un conjunto dado, cuando no importa el orden en las selecciones y no podemos repetir elementos del conjunto. En la sección 5, del módulo anterior, se introdujo un ejemplo de este tipo de selecciones: ¿de cuántas maneras diferentes podemos escoger dos bolas de un total de cuatro bolas diferentes?

Los números binomiales nos permitirán calcular el número de posibles muestras de este tipo. Después veremos algunas propiedades de estos números binomiales, y aplicaciones, como el teorema del binomio, que nos proporciona el desarrollo del binomio $(a + b)^n$.

1.1. Muestras no ordenadas sin repetición

Un ejemplo en el que queda clara la nueva situación que queremos tratar es el siguiente: suponemos que tenemos cuatro personas, a, b, c, d, y hay que escoger tres (por votación) para formar una comisión (todas con el mismo rango). ¿Cuántas comisiones nos pueden salir?

Obsérvese que la comisión abc es la misma que la bca. Es evidente que, en este caso, el orden de los elementos en una muestra no debe tenerse en cuenta. Empezamos, en primer lugar, escribiendo todas las 3-muestras ordenadas sin repetición del conjunto $\{a, b, c, d\}$:

$\boldsymbol{abc}$	$\boldsymbol{abd}$	$\boldsymbol{acd}$	$\boldsymbol{bcd}$
acb	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcb

Obsérvese que hay varias muestras que contienen las mismas personas y que, por lo tanto, definen la misma comisión. De hecho, podemos elegir sólo cuatro comisiones diferentes: abc, abd, acd, bcd. Este número de comisiones resulta de dividir el número de 3-muestras ordenadas sin repetición de $\{a, b, c, d\}$ por el número de permutaciones que podemos hacer con tres objetos, es decir:

$$\frac{V(4,3)}{P(3)} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4.$$

Diremos que las muestras $abc,\ abd,\ acd,\ bcd$ son 3-muestras no ordenadas sin repetición del conjunto $\{a, b, c, d\}$.

Definición 2.1

Dado un conjunto X de n elementos, una $\boldsymbol{r}$**-muestra no ordenada sin repetición** del conjunto X es una lista no ordenada de r elementos diferentes $x_1, x_2, \ldots, x_r$, donde cada x_j es un elemento del conjunto X, para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$.

También es frecuente...

... llamar a estas muestras **combinaciones (sin repetición) de** $\boldsymbol{n}$ **elementos tomados de** $\boldsymbol{r}$ **en** $\boldsymbol{r}$.

Definición 2.2

Dado un conjunto X de n elementos, denotaremos por $\boldsymbol{C(n, r)}$ la cantidad de r-muestras no ordenadas sin repetición del conjunto X.

Proposición 2.3

Si el conjunto X tiene n elementos, entonces podemos formar

$$C(n,r) = \frac{V(n,r)}{P(r)} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2 \cdot 1}$$

r-muestras no ordenadas sin repetición del conjunto X.

Observar...

... que r no puede ser mayor que n.

Definición 2.4

El número $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2 \cdot 1}$ se llama **número combinatorio** o **binomial**, y se representa con el símbolo $\binom{n}{r}$ (que se lee: n sobre r).

Ejemplo 2-1

$C(7,4) = \binom{7}{4}$ representa el número de 4-muestras no ordenadas sin repetición que se pueden hacer a partir de un conjunto de siete elementos. Este número vale

$$C(7,4) = \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Ejercicio 2-2

Calcular $\binom{n}{1}$ y $\binom{n}{n}$ sin utilizar la fórmula de cálculo.

Solución: El primer número es igual a n, o sea $\binom{n}{1} = n$, puesto que en un conjunto de n elementos se pueden hacer n combinaciones sin repetición de n elementos tomados de uno en uno.

El segundo es igual a 1, o sea $\binom{n}{n} = 1$, puesto que en un conjunto de n elementos sólo se puede hacer una n-muestra no ordenada sin repetición.

Ejercicio 2-3

¿Cuántos subconjuntos de tres elementos cada uno tiene un conjunto formado por ocho elementos?

Solución: Un conjunto de ocho elementos tiene

$$C(8,3) = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

subconjuntos de tres elementos. Obsérvese que cada subconjunto de tres elementos es una 3-muestra no ordenada sin repetición, y recíprocamente cada 3-muestra no ordenada sin repetición es un subconjunto de tres elementos.

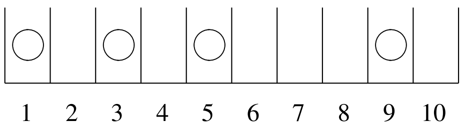
Observar...

... que en general, una r-muestra no ordenada sin repetición de un conjunto X representa también un subconjunto de r elementos del conjunto X.

Ejercicio 2-4

¿De cuántas maneras se pueden distribuir cuatro bolas indistinguibles en diez cajas diferentes teniendo en cuenta que no puede haber más de una bola en una misma caja?

Solución: Nos dicen que la distribución de las cuatro bolas dentro de las diez cajas hay que hacerla de manera que en ninguna caja haya más de una bola. Una posible distribución es, por ejemplo,



Esta distribución la podemos representar mediante la 4-muestra 1359 (las bolas están dentro de las cajas 1, 3, 5 y 9). Nótese que las muestras son no ordenadas y sin repetición (en ninguna caja puede haber más de una bola). El número de posibles distribuciones es, pues, $C(10,4) = \binom{10}{4} = 210$.

Factorial

Recordar que $0! = 1$ y $1! = 1$.

Proposición 2.5

Si n y r son enteros positivos con $0 \leq r \leq n$, entonces

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Demostración: Si $0 < r < n$, sólo es necesario multiplicar el numerador y denominador de la expresión inicial de $\binom{n}{r}$ por $(n-r)!$ y así se obtiene $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Esta fórmula también es válida para $r = n$, puesto que $0! = 1$, así $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = = \frac{n!}{n!0!} = 1$. Finalmente, si $r = 0$, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$. El valor de este número indica que un conjunto de n elementos tiene un subconjunto de cero elementos: el subconjunto vacío. ∎

Ejercicio 2-5

Demostrar, utilizando la fórmula de la proposición 2.5, que $\binom{n}{1} = n$.

Solución: En efecto, $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$, puesto que $1! = 1$.

Ejercicio 2-6

Calcular $\binom{13}{10}$, utilizando la fórmula de la proposición 2.5.

Solución: En este caso, $\binom{13}{10} = \frac{13!}{10!3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286$.

1.2. Propiedades de los números binomiales

Proposición 2.6

- **Propiedad de simetría**: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- **Propiedad de la adición**: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

Demostración: Se puede utilizar la fórmula $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ para demostrar las dos propiedades. La propiedad de simetría la podemos demostrar también, sin aplicar la fórmula, de esta otra manera: $\binom{n}{r}$ representa el número de r-subconjuntos (subconjuntos de r elementos) que pueden hacerse en un conjunto X de n elementos, y $\binom{n}{n-r}$ es el número de $(n-r)$-subconjuntos que pueden hacerse en el mismo conjunto de n elementos. Si asociamos a cada r-subconjunto A de X su complementario $A' = X - A$, entonces A' es un $(n-r)$-subconjunto de X. La correspondencia $A \mapsto A'$ entre los r-subconjuntos de X y los $(n-r)$-subconjuntos de X es biyectiva. Por lo tanto, la cantidad de subconjuntos de cada tipo es la misma: o sea, $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

Para demostrar la propiedad de la adición utilizaremos la fórmula $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$. Así, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} = \\ &= \frac{r(n-1)! + (n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \\ &= \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.\end{aligned}$$

∎

Ejemplo 2-7

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3}, \qquad \binom{24}{15} = \binom{24}{9}$$

$$\binom{8}{6} + \binom{8}{5} = \binom{9}{6}, \qquad \binom{100}{34} + \binom{100}{35} = \binom{101}{35}$$

Ejercicio 2-8

Calcular qué valores de x cumplen:

1) $\binom{13}{x} = \binom{13}{8}$

2) $\binom{20}{4} + \binom{20}{x} = \binom{21}{4}$

Solución:

La ecuación 1) tiene las soluciones $x = 8$ y $x = 5$.

La ecuación 2) tiene las soluciones $x = 3$ y $x = 17$.

Obsérvese que a partir de la propiedad de simetría, o sea $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, podemos asegurar que la serie de números

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

tiene simetría central. Los primeros y los últimos términos de esta sucesión son:

$$1,\ n,\ \frac{n(n-1)}{2},\ \ldots,\ \frac{n(n-1)}{2},\ n,\ 1.$$

La propiedad de la adición $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ permite dar un algoritmo para calcular los números binomiales $\binom{n}{r}$. Con este algoritmo se obtiene el llamado **triángulo de Pascal** (o también **triángulo de Tartaglia**), puesto que los números pueden colocarse en un triángulo como el que vemos a continuación. En este triángulo, cada número binomial $\binom{n}{r}$ se calcula a partir de la suma de los dos números binomiales que se encuentran en la fila superior, a su derecha, $\binom{n-1}{r}$, e izquierda, $\binom{n-1}{r-1}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
\end{array}
$$

o también,

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
\end{array}
$$

Ejemplo 2-9

La fila 5 del triángulo de Pascal es: $1, 5, 10, 10, 5, 1$. La fila 6 es: $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$. Obsérvese la simetría central de cada una de estas series de números.

Los números binomiales cumplen otras propiedades que pueden ser interesantes en algún cálculo determinado. Veremos algunas de ellas con la proposición y los ejemplos siguientes:

Proposición 2.7

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Esta propiedad...

... también se puede escribir como

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Notación

La utilización del símbolo $\sum$ (letra griega sigma mayúscula) es frecuente cuando se quiere reducir el tamaño de una fórmula que contiene una suma. Este símbolo se llama **sumatorio**.

Demostración: Antes de todo fijaros que en los casos $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6, la igualdad es cierta. Sólo es necesario hacer el cálculo directo sobre cada fila del triángulo de Pascal. Así, por ejemplo, en el caso $n = 4$:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4.$$

Para demostrar que la igualdad es cierta para cualquier valor de n, es necesario recordar que si tenemos un conjunto de n elementos, entonces este conjunto tiene 2^n subconjuntos (ver proposición 1.19). Por otro lado, hemos visto antes que $\binom{n}{r}$ es el número de r-subconjuntos (subconjuntos de r elementos) de un conjunto de n elementos. Así, pues, como el número total de subconjuntos es la suma del número de subconjuntos de $0, 1, 2, \ldots, n$ elementos, se obtiene la igualdad deseada. ∎

Ejercicio 2-10

Comprobar, utilizando el triángulo de Pascal, que la igualdad:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

se cumple para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Demostrar a continuación que es cierta para cualquier valor de n. Escribir también la igualdad mediante el símbolo Σ.

Solución: Efectivamente, la igualdad se cumple para $n = 1$: $\binom{1}{0} - \binom{1}{1} = 1 - 1 = 0$,

para $n = 2$: $\binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 - 2 + 1 = 0$,

para $n = 3$: $\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$,

para $n = 4$: $\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$,

para $n = 5$: $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} = 1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$.

Es evidente que siempre que n sea impar la igualdad será cierta puesto que, en este caso, los números binomiales aparecen repetidos (propiedad de simetría) con signo contrario. Para ver que también es cierta en el caso n par, obsérvese como podemos escribir la expresión en el caso $n = 4$:

$$\begin{aligned}
&\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \\
&= 1 - \left\{\binom{3}{0} + \binom{3}{1}\right\} + \left\{\binom{3}{1} + \binom{3}{2}\right\} - \left\{\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right\} + 1 = \\
&= 1 - \binom{3}{0} - \binom{3}{3} + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Lo mismo se hace en el caso de un valor cualquiera de n. Nótese que hemos utilizado básicamente la propiedad de la adición de los números binomiales.

Finalmente, la igualdad la podemos escribir de una forma más compacta:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

Ejercicio 2-11

Observar, sobre el triángulo de Pascal, la verificación de la fórmula siguiente:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Solución: Se trata aquí de observar que la igualdad se cumple sobre el triángulo de Pascal. En efecto, si por ejemplo suponemos $r = 1$ y $n = 3$, la igualdad nos queda:

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} = \binom{4}{2}$$

que es cierta, puesto que $1 + 2 + 3 = 6$.

1.3. El teorema del binomio

El teorema del binomio proporciona el desarrollo de la potencia n-ésima de un binomio $a + b$, $(a + b)^n$, donde n es un entero positivo cualquiera.

Proposición 2.8

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Antes de realizar la demostración de la fórmula del binomio, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2-12

$(a + b)^1 = a + b.$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

Ejemplo 2-13

El primer sumando del desarrollo de $(a + b)^7$ es $\binom{7}{0}a^7 = a^7$.

El cuarto sumando del desarrollo de $(a + b)^{10}$ es $\binom{10}{3}a^7b^3 = 120a^7b^3$.

El penúltimo sumando del desarrollo de $(a + b)^{10}$ es $\binom{10}{9}ab^9 = \binom{10}{1}ab^9 = 10ab^9$.

Ejemplo 2-14

$(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$

$$(1-x)^5 = \binom{5}{0}1^5 + \binom{5}{1}1^4(-x)^1 + \binom{5}{2}1^3(-x)^2 + \binom{5}{3}1^2(-x)^3 + \binom{5}{4}1^1(-x)^4 + \binom{5}{5}(-x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5.$$

$$(2x-3y)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(-3y) + \binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)(-3y)^3 + \\ + \binom{4}{4}(-3y)^4 = 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4.$$

Ejemplo 2-15

El tercer sumando del desarrollo de $(x+2y)^{12}$ es $\binom{12}{2}x^{10}(2y)^2 = 264x^{10}y^2$.

El quinto sumando del desarrollo de $(x^2-2y^3)^{12}$ es $\binom{12}{4}(x^2)^8(-2y^3)^4 = 7920x^{16}y^{12}$.

Demostración: Demostramos la fórmula del binomio. En efecto, a partir de la igualdad $(a+b)^n = (a+b)\cdots(a+b)$, desarrollando el producto de los n paréntesis se obtiene una expresión en la cual aparecen términos de la forma $a^{n-r}b^r$ con $r = 0, 1, \ldots, n$. El término $a^{n-r}b^r$ surge al escoger b en r de los paréntesis y a en los $n-r$ restantes. Como esta elección se puede hacer de $\binom{n}{r}$ maneras diferentes, resulta que el coeficiente de $a^{n-r}b^r$ es $\binom{n}{r}$ y, así, obtenemos la igualdad deseada. ∎

Los números $\binom{n}{r}$ son los coeficientes de los monomios y de aquí viene el origen de la denominación *número binomial* o, también, *coeficiente binomial*.

Es necesario observar que el resultado de la proposición 2.7 puede ser deducido también, fácilmente, a partir de la fórmula del binomio, considerando $a = 1$ y $b = 1$. Asimismo, el resultado del ejercicio 2-10 puede ser deducido de la fórmula del binomio considerando $a = 1$ y $b = -1$.

1.4. Ejercicios

2-16 ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar utilizando como vértices de cada triángulo los de un pentágono dado?

2-17 ¿Cuántos segmentos se pueden dibujar si tomamos como extremos de cada uno de ellos los vértices de un hexágono?

2-18 Un grupo de ocho personas $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ acuerdan formar una comisión de cinco miembros, todos de igual categoría. ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar? Supongamos que de las ocho personas, a y b no quieren formar parte de ninguna comisión, y en cambio d y f deben estar obligatoriamente. ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar ahora?

2-19 ¿Cuántas palabras binarias de longitud 9 contienen tres ceros? ¿Cuántas hay que contienen cinco unos? ¿Cuántas tienen dos ceros y siete unos?

2-20 Un conjunto tiene veintiocho subconjuntos de dos elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene de tres elementos? ¿Cuántos subconjuntos tiene en total?

2-21 ¿De cuántas maneras pueden asignarse tres coches nuevos idénticos a veinticinco comerciantes de una empresa, de manera que cada uno reciba, como máximo, uno de los coches?

2-22 Contestar las siguientes cuestiones:

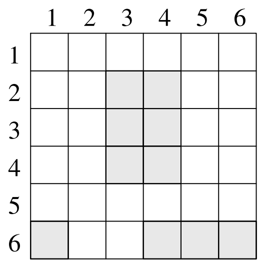
a) Si dibujamos n rectas en un plano, de tal forma que no haya dos de paralelas ni tres que pasen por un mismo punto, ¿cuántos puntos de intersección determinan estas rectas?

b) Si dibujamos n rectas en un plano, de las cuales hay n_1 de paralelas en una cierta dirección, n_2 de paralelas en otra dirección, ..., n_k de paralelas en otra dirección, y tales que no haya tres que pasen por un mismo punto, demostrar que el número de puntos de intersección de todas las rectas es:

$$\frac{1}{2}(n^2 - (n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2))$$

c) Dibujar diez rectas en un plano tales que no haya tres que pasen por un mismo punto y que determinen un total de treinta y tres puntos de intersección.

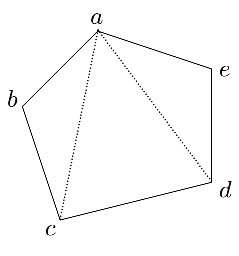
2-23 ¿Cuántos rectángulos diferentes podemos construir dentro de la cuadrícula 6×6 de la figura adjunta, como los que mostramos como ejemplos? Generalizarlo para el caso de una cuadrícula $n \times n$.



2-24 Calcular el tercer y el cuarto sumando del desarrollo de $(1+x^2)^7$ y del de $(1-x^2)^7$.

1.5. Soluciones

2-16 Si el pentágono tiene como vértices a, b, c, d, e, entonces el número de triángulos que podemos dibujar es $\binom{5}{3}$, puesto que cada triángulo es determinado por una 3-muestra no ordenada sin repetición escogida a partir del conjunto $\{a, b, c, d, e\}$. Por lo tanto, pueden dibujarse diez triángulos.



2-17 Hay tantos segmentos como 2-muestras no ordenadas sin repetición que pueden hacerse a partir del conjunto de vértices del hexágono. Por lo tanto, el número de segmentos es $\binom{6}{2} = 15$.

2-18 El número de comisiones que pueden formarse es $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$. Con las restricciones añadidas pueden formarse $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$ comisiones, que son: $dfceg$, $dfceh$, $dfcgh$, $dfegh$ (d y f deben pertenecer a todas y a, b no deben pertenecer a ninguna).

2-19 Una palabra binaria de longitud 9 que contiene tres ceros es, por ejemplo, 101011110. Nótese que los ceros están situados en las posiciones 2, 4 y 9. Análogamente, la palabra 111001101 tiene los ceros en las posiciones 4, 5 y 8, etc. Habrá tantas palabras de éstas como 3-muestras no ordenadas sin repetición puedan hacerse con las posiciones $1, 2, 3, \ldots, 9$. Por lo tanto, habrá $\binom{9}{3} = 84$ palabras con tres ceros.

Del mismo modo, podemos afirmar que habrá $\binom{9}{5} = 126$ palabras con cinco unos. La tercera pregunta es del mismo tipo que las anteriores: habrá $\binom{9}{2} = 36$ palabras con dos ceros y, a la fuerza, con siete unos.

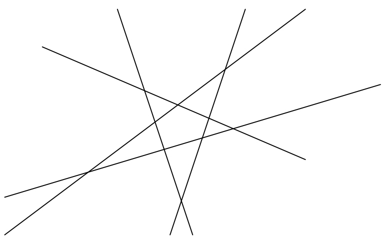
2-20 Si el conjunto tiene n elementos, entonces debe cumplirse que $\binom{n}{2} = 28$. Esta ecuación tiene por solución $n = 8$ y $n = -7$, pero sólo consideraremos la solución positiva, $n = 8$. Sabemos, pues, que el conjunto tiene ocho elementos, y por lo tanto, tiene $\binom{8}{3} = 56$ subconjuntos de tres elementos. Finalmente, el conjunto tiene $2^8 = 256$ subconjuntos en total.

2-21 Si numeramos a los comerciantes del 1 al 25, una manera de asignar los coches sería, por ejemplo, 2 8 9, cuando los asignamos a los comerciantes 2, 8 y 9. Habrá tantas maneras de distribuir los tres coches como 3-muestras no ordenadas sin repetición puedan hacerse en $\{1, 2, \ldots, 25\}$, o sea, $\binom{25}{3} = 2300$.

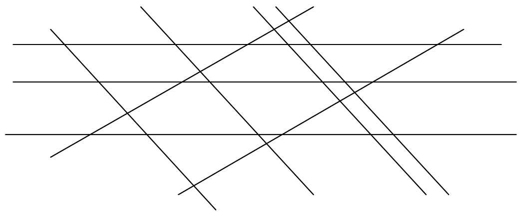
2-22 a) Con las condiciones exigidas, claro está, que si $1, \ldots, n$ son las rectas, habrá tantos puntos de intersección como subconjuntos de dos elementos $\{i, j\}$ de $\{1, \ldots, n\}$. Así, pues, las n rectas determinan

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

puntos de intersección. Por ejemplo, las cinco rectas de la siguiente figura determinan diez puntos de intersección.



b) Empezamos por dibujar un caso particular en que suponemos $n = 9$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$:



Por recuento directo se observa que hay veintiséis puntos de intersección, y nótese que este número es el que resulta de hacer el cálculo mediante la fórmula

$$\frac{1}{2}(n^2 - (n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2)) = \frac{1}{2}(9^2 - (2^2 + 3^2 + 4^2)) = 26.$$

Para demostrar la validez de la fórmula en general, es necesario tener en cuenta que cada recta en la dirección i determina $n - n_i$ puntos de intersección con las rectas en las otras direcciones. Por lo tanto, las rectas en la dirección i determinan $n_i(n - n_i)$ puntos de intersección. En total habrá:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(n - n_i) = \frac{1}{2}(n^2 - (n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2))$$

puntos de intersección. Nótese que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, y también que el $1/2$ de la fórmula es debido a que en la suma $\sum_{i=1}^{k} n_i(n - n_i)$ cada punto de intersección está contado dos veces.

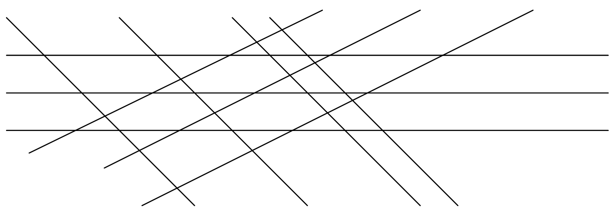
c) Podemos aprovechar el apartado anterior para dibujar lo que nos piden en este apartado. El problema es decidir cuántas direcciones utilizaremos y cuántas rectas en cada una de ellas. Se trata, en definitiva, de encontrar una solución al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} n_1 + \cdots + n_k = 10 \\ \frac{1}{2}(10^2 - (n_1^2 + \cdots + n_k^2)) = 33 \end{cases}$$

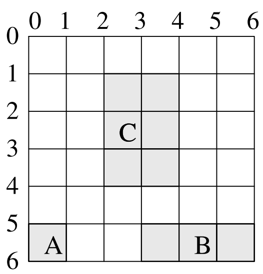
Empezamos observando que $k \geq 3$ (si $k = 2$ el sistema no tiene solución). Supongamos $k = 3$, y escribamos para abreviar $n_1 = a$, $n_2 = b$, $n_3 = c$. El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} a + b + c = 10 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 34 \end{cases}$$

que tiene una solución $a = 3$, $b = 3$, $c = 4$. El dibujo podría ser el que figura a continuación:



2-23 Obsérvese que una manera de representar los rectángulos de la figura es:
Rectángulo C: $(14, 24)$ filas $1, 4$-columnas $2, 4$
Rectángulo A: $(56, 01)$ filas $5, 6$-columnas $0, 1$
Rectángulo B: $(56, 36)$ filas $5, 6$-columnas $3, 6$



Un rectángulo está definido por una pareja ordenada (ij, rs) formada por dos subconjuntos de dos elementos del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Por lo tanto, en total podemos formar $\binom{7}{2}\binom{7}{2} = 21 \cdot 21 = 441$ rectángulos.

En el caso general de una cuadrícula $n \times n$, podríamos formar

$$\binom{n+1}{2}\binom{n+1}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

rectángulos.

2-24 El tercer y cuarto summando del desarrollo del binomio $(1 + x^2)^7$ es $\binom{7}{2}1^5(x^2)^2 = 21x^4$ y $\binom{7}{3}1^4(x^2)^3 = 35x^6$, respectivamente.

El tercer y cuarto summando del desarrollo del binomio $(1 - x^2)^7$ es $\binom{7}{2}1^5(-x^2)^2 = 21x^4$ y $\binom{7}{3}1^4(-x^2)^3 = -35x^6$, respectivamente.

2. Muestras no ordenadas con repetición

Esta sección trata del cálculo del número de selecciones de objetos de un conjunto, cuando no importa el orden en las selecciones y podemos repetir elementos del conjunto. En la sección 5, del módulo anterior, se introdujo un ejemplo de este tipo de selecciones: ¿de cuántas maneras diferentes podemos escoger cuatro bolas de entre dos tipos de bolas diferentes: blancas y negras?

Algunas aplicaciones interesantes de estos tipos de selecciones son el cálculo del número de soluciones enteras no negativas (o enteras positivas) de una ecuación del tipo $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$. Otra aplicación es el cálculo del número de términos en el desarrollo de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^r$.

Al final de la sección mostramos, en un cuadro, un resumen de los resultados principales sobre los diferentes tipos de selecciones de objetos: muestras ordenadas y muestras no ordenadas, con repetición y sin.

2.1. Muestras no ordenadas con repetición

Definición 2.9

Dado un conjunto X de n elementos, una **r-muestra no ordenada con repetición** del conjunto X es una lista no ordenada de r elementos $x_1, x_2, \ldots, x_r$, donde cada x_j es un elemento del conjunto X, y donde los $x_1, x_2, \ldots, x_r$ no necesariamente deben ser diferentes, para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$.

También es frecuente...

... llamar a estas muestras **combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r**.

Definición 2.10

Dado un conjunto X de n elementos, denotaremos por $\boldsymbol{CR(n,r)}$ la cantidad de r-muestras no ordenadas con repetición del conjunto X.

Si tenemos tres objetos $\{x, y, z\}$ y queremos formar 4-muestras no ordenadas con repetición, éstas son las siguientes:

$$\begin{array}{ccccc} xxxx, & xxxy, & xxxz, & xxyy, & xxzz, \\ xxyz, & xyyy, & xzzz, & xyyz, & xyzz, \\ yyyy, & yyyz, & yyzz, & yzzz, & zzzz \end{array}$$

Así, hemos podido hacer quince muestras con las condiciones mencionadas.

Para obtener una fórmula general que nos permita el cálculo del número de muestras de este tipo, veamos que podemos representar cada muestra como una palabra binaria:

$$\begin{array}{llll} xxxx \to 000011, & xxxy \to 000101, & xxxz \to 000110, & xxyy \to 001001, \\ xxzz \to 001100, & xxyz \to 001010, & xyyy \to 010001, & xzzz \to 011000, \\ xyyz \to 010010, & xyzz \to 010100, & yyyy \to 100001, & yyyz \to 100010, \\ yyzz \to 100100, & yzzz \to 101000, & zzzz \to 110000. & \end{array}$$

Esta representación utiliza el símbolo 1 para separar cada tipo de objeto, y la cantidad de símbolos 0 nos indica cuántos objetos de cada tipo hay en la muestra. Así, por ejemplo, la muestra $xxyz$ se representa mediante la palabra 001010 y la muestra $xzzz$, por la palabra 011000:

$$\begin{array}{cccccc} x & x & & y & & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccccc} x & & & z & z & z \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejemplo 2-25

A partir de los elementos del conjunto $\{a, b, c, d\}$, la 6-muestra $abbcdd$ se puede representar como 010010100, que nos indica que en la muestra hay un ejemplar del elemento a, dos del elemento b, uno del elemento c y dos del d.

La palabra 100100100 es la representación de la 6-muestra $bbccdd$.

Ejercicio 2-26

Encontrar la representación binaria de las muestras $aabcd$, $abbcc$, $abcdd$, $bcccd$, escogidas a partir de los elementos $\{a, b, c, d\}$.

Solución:

$$\begin{array}{ll} aabcd \to 00101010, & abbcc \to 01001001, \\ abcdd \to 01010100, & bcccd \to 10100010. \end{array}$$

De acuerdo con este tipo de representación, ahora estamos en condiciones de deducir una fórmula que nos proporcione el número de r-muestras no ordenadas con repetición que podemos hacer a partir de n elementos.

En efecto, observemos que en el caso mencionado antes, en que partíamos de $n = 3$ objetos, $X = \{x, y, z\}$, y hacíamos 4-muestras con repetición $xxyz$, $xzzz$, etc., mediante la representación binaria mencionada, lo que se obtiene es una biyección entre el conjunto de las 4-muestras y el conjunto de las palabras binarias que contienen exactamente dos (y, en general, $n - 1$) unos, puesto que necesitamos sólo dos unos para separar los tres objetos x, y, z; y son de longitud seis (y, en general, de longitud $n + r - 1$), puesto que el número de ceros es cuatro (y, en general, r). Este número de palabras binarias es (ver ejercicio 2-19) $\binom{n+r-1}{r} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$, tal y como habíamos obtenido al principio por cálculo exhaustivo de todas las muestras.

Esto nos permite presentar, en general, el resultado siguiente:

Proposición 2.11

Si el conjunto X tiene n elementos, entonces podemos formar

$$CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$$

r-muestras no ordenadas con repetición del conjunto X.

En virtud de la propiedad de simetría de los números binomiales podemos escribir

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r},$$

y por lo tanto, podemos realizar el cálculo con cualquiera de estas dos expresiones.

Ejercicio 2-27

Calcular $CR(1,1)$, $CR(1,2)$ y $CR(3,4)$.

¿Es $CR(1,r) = 1$ para todo r? ¿Es $CR(n,1) = n$ para todo n?

Solución: $CR(1,1) = 1;\ CR(1,2) = 1;\ CR(3,4) = 15.$

Efectivamente, $CR(1,r) = 1$ para todo r, puesto que

$$CR(1,r) = \binom{1+r-1}{r} = \binom{r}{r} = 1.$$

Es cierto que $CR(n,1) = n$ para todo n, puesto que

$$CR(n,1) = \binom{n+1-1}{1} = \binom{n}{1} = n.$$

Ejemplo 2-28

Si lanzamos cuatro dados indistinguibles, se producen ciento veintiséis resultados diferentes.

En efecto, obsérvese que un lanzamiento posible sería, por ejemplo, 1126, o también 2356, etc. El hecho de que los dados sean indistinguibles hace que las 4-muestras hechas a partir de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sean no ordenadas. La repetición de algunos de los valores $1, 2, 3, 4, 5, 6$ es, evidentemente, posible. El número de resultados diferentes es, por lo tanto, el número de 4-muestras no ordenadas con repetición que pueden hacerse con seis elementos, es decir: $\binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = 126.$

En general, si lanzamos r dados, se pueden producir $\binom{6+r-1}{r} = \binom{5+r}{r} = \binom{5+r}{5}$ resultados diferentes.

Ejercicio 2-29

Calcular el número de maneras diferentes de distribuir cuatro bolas idénticas en seis cajas numeradas de la 1 a la 6. Mostrar una fórmula para el caso de r bolas.

Solución: Observar que este ejercicio es equivalente al ejemplo 2-28, si traducimos dado por bola y caras del dado por cajas. Las respuestas son, por lo tanto, ciento veintiséis y $\binom{5+r}{5}$, respectivamente.

2.2. Cálculo del número de soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

Queremos calcular de cuántas maneras podemos expresar el número (entero positivo) r como suma de n enteros no negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o sea de enteros $x_i \geq 0 \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, una solución es $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, que podemos escribir en forma de terna ordenada $(1, 1, 3)$. Otras soluciones son $(1, 3, 1)$, $(5, 0, 0)$, $(4, 1, 0)$, etc. De hecho, la ecuación propuesta tiene veintiuna soluciones, y lo que queremos es averiguar este número total de soluciones sin tener que hacer la búsqueda exhaustiva de todas ellas.

Ejercicio 2-30

Encontrar algunas soluciones enteras no negativas de la ecuación $x + y + z + t = 6$.

Solución: Una solución es, por ejemplo, $(6, 0, 0, 0)$. Otras soluciones son $(0, 6, 0, 0)$, $(1, 0, 5, 0)$, $(1, 1, 1, 3)$, $(2, 0, 2, 2)$, etc.

Nótese que en este caso hemos utilizado, por comodidad, las letras x, y, z, t en lugar de x_1, x_2, x_3, x_4 para indicar las incógnitas de la ecuación.

Volvamos ahora a la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. Obsérvese que a cada 5-muestra no ordenada con repetición realizada a partir de los elementos de $\{1, 2, 3\}$ le podemos asociar una solución de la ecuación. En efecto, sea la muestra 22333 a partir de la cual formamos la terna (x_1, x_2, x_3) de la forma siguiente: x_1 es el número de veces que aparece el elemento 1 en la muestra, x_2 el número de veces que aparece el elemento 2 en la muestra y x_3 el número de veces que aparece el elemento 3 en la muestra. Así, a la muestra 22333 le hacemos corresponder la terna $(0, 2, 3)$, que naturalmente es una solución de la ecuación. Del mismo modo, a la muestra 12223 le corresponde la solución $(1, 3, 1)$, etc.

Obsérvese que esta correspondencia es una biyección entre el conjunto de las 5-muestras no ordenadas con repetición que pueden construirse a partir de $\{1, 2, 3\}$ y el conjunto de las soluciones de la ecuación. Por lo tanto, el número de soluciones coincide con $CR(3,5)$, es decir,

$$CR(3,5) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21,$$

tal y como habíamos dicho antes.

Proposición 2.12

El número de soluciones enteras no negativas de una ecuación del tipo $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ es $CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$.

Demostración: Sólo es necesario observar que podemos establecer una biyección entre el conjunto de las r-muestras no ordenadas con repetición del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ y el conjunto de las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$. Para cada r-muestra, sea x_1 el número de veces que aparece el elemento 1 en la muestra, x_2 el número de veces que aparece el elemento 2 en la muestra, etc. En general, x_i es el número de veces que aparece el elemento i en la muestra, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, a la r-muestra le hacemos corresponder $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que es una solución entera no negativa de la ecuación, puesto que se cumple $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ y $x_i \geq 0 \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Es fácil ver que esta correspondencia es una biyección. Por lo tanto, a partir de la proposición 2.11, el número de soluciones es $CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$. ∎

Ejemplo 2-31

El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x+y+z+t = 6$ (ejercicio 2-30) es $CR(4,6) = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$. Nótese que en este caso $n = 4$ (número de incógnitas) y $r = 6$.

2.3. Cálculo del número de soluciones enteras positivas de $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = s$

Ahora queremos calcular de cuántas maneras podemos expresar el número (entero positivo) s como suma de n enteros positivos $z_1, z_2, \ldots, z_n$, o sea de enteros $z_i > 0 \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación $z_1 + z_2 + z_3 = 5$, las soluciones son las mismas que en el apartado anterior, excepto que ahora $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ y $z_3 \neq 0$. Así, la solución $(1,1,3)$ también es solución de esta ecuación, pero no lo son, por ejemplo, las soluciones $(5,0,0)$, $(4,1,0)$, etc., puesto que contienen valores cero y, por lo tanto, no positivos. De hecho, la ecuación propuesta tiene seis soluciones, y lo que queremos, igual que antes, es averiguar este número total de soluciones sin tener que hacer la búsqueda exhaustiva de todas ellas.

Ejercicio 2-32

Encontrar todas las soluciones enteras positivas de la ecuación $x + y + z + t = 6$.

Solución: Las soluciones son $(1,1,1,3)$, $(1,1,3,1)$, $(1,3,1,1)$, $(3,1,1,1)$, $(1,1,2,2)$, $(1,2,2,1)$, $(1,2,1,2)$, $(2,1,2,1)$, $(2,2,1,1)$ y $(2,1,1,2)$. Por lo tanto, la ecuación tiene diez soluciones.

Nótese que si se tratara de buscar las soluciones enteras no negativas, habría ochenta y cuatro (ejercicio 2-30 y ejemplo 2-31).

Volvamos ahora a la ecuación $z_1 + z_2 + z_3 = 5$. Obsérvese que esta ecuación es equivalente a la ecuación $(z_1 - 1) + (z_2 - 1) + (z_3 - 1) = 2$, donde hemos restado tres unidades a cada miembro. Ahora $z_i - 1 \geq 0$ (puesto que $z_i > 0$). Por lo tanto, el número de soluciones enteras positivas de la ecuación inicial es igual al número de soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, donde $x_1 = z_1 - 1$, $x_2 = z_2 - 1$ y $x_3 = z_3 - 1$. Por la proposición 2.12, el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ es

$$CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6,$$

tal y como habíamos dicho antes.

Proposición 2.13

El número de soluciones enteras positivas de una ecuación del tipo

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = s, \quad \text{donde } s \geq n, \quad \text{es} \quad \binom{s-1}{n-1}.$$

Demostración: Esta ecuación es equivalente (tiene las mismas soluciones) a la ecuación $(z_1 - 1) + (z_2 - 1) + \cdots + (z_n - 1) = s - n$, puesto que lo que hemos hecho es restar n a cada miembro. Esta última ecuación la podemos escribir como $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, y el número de soluciones enteras positivas de $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = s$ es el mismo que el número de soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, donde $r = s - n$. Por la proposición 2.12, el número de soluciones de esta ecuación es

$$CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+s-n-1}{s-n} = \binom{s-1}{s-n} = \binom{s-1}{n-1}.$$

∎

Ejemplo 2-33

El número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x + y + z + t = 6$ (ejercicio 2-32) es $\binom{6-1}{4-1} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$. Nótese que en este caso $n = 4$ y $s = 6$.

2.4. Cálculo del número de términos de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^r$

Ejemplo 2-34

$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, o sea que el desarrollo de $(a+b+c)^2$ tiene seis términos.

$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b+c+d) = a^2+ab+ac+ad+ba+b^2+bc+bd+ca+$

$+cb+c^2+cd+da+db+dc+d^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$.
El desarrollo tiene, pues, diez términos.

Ejercicio 2-35

Encontrar, mediante el cálculo directo, el número de términos del desarrollo de la potencia $(a+b+c)^3$.

Solución: $(a+b+c)^3 = (a+b+c)^2(a+b+c) = (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)\cdot(a+b+ +c) = a^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^3+b^2c+c^2a+c^2b+c^3+2a^2b+2ab^2+2abc+2a^2c+2abc+ +2ac^2+2abc+2b^2c+2bc^2 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+ +3bc^2+6abc$. Por lo tanto, el desarrollo de $(a+b+c)^3$ tiene diez términos.

Se trata, a continuación, de llevar a cabo una estrategia que nos permita encontrar el número de términos sin tener que hacer las multiplicaciones y agrupaciones que se muestran en los ejemplos. En definitiva, queremos determinar cuántos términos tiene el desarrollo, y no cuáles son ni tampoco qué coeficientes los acompañan.

Proposición 2.14

El número de términos en el desarrollo de $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^r$ es igual a $CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$.

Demostración: En general, $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^r = (x_1+x_2+\cdots+x_n)\cdots(x_1+x_2+ +\cdots+x_n)$. Desarrollando el producto de los r paréntesis se obtiene una expresión en la cual aparecen términos de la forma $x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdots x_{i_r}$, que resultan de seleccionar un elemento de cada paréntesis. Claro está que diferentes selecciones pueden dar lugar a términos iguales (en el ejemplo tenemos $a\cdot b = b\cdot a$, $a\cdot c = c\cdot a$, etc.), y, una vez hechas las oportunas agrupaciones de términos iguales, se obtienen tantos términos diferentes como r-muestras no ordenadas con repetición pueden hacerse a partir de los n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. ∎

Ejemplo 2-36

El número de términos del desarrollo de $(a+b+c)^2$ es:

$$CR(3,2) = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6.$$

El número de términos del desarrollo de $(a+b+c+d)^2$ es:

$$CR(4,2) = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$

Ejercicio 2-37

Volver a realizar, utilizando esta última proposición, el ejercicio 2-35.

Solución: Utilizando la fórmula de la proposición 2.14, $(a+b+c)^3$ tiene

$$CR(3,3) = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$$

términos.

2.5. Ejercicios

2-38 Demostrar que se verifica $CR(n, r) = CR(r + 1, n - 1)$ y $CR(2, r) = r + 1$.

2-39 Si lanzamos diez monedas idénticas, ¿cuántos resultados diferentes se pueden producir?

2-40 ¿Cuántas maneras diferentes hay de distribuir cinco bolas indistinguibles en cinco cajas (numeradas de 1 a 5)?

2-41 ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x + y + z + t = 10$? ¿Cuántas soluciones enteras positivas tiene esta misma ecuación?

2-42 ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x + y + z + t + u = 75$? ¿Cuántas de estas soluciones tienen alguna incógnita igual a cero (por ejemplo, una solución de estas características es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$ y $t = 75$)?

2-43 El responsable del departamento de contabilidad de una empresa tiene cuatro asistentes: un secretario y tres auxiliares administrativos. Deben procesarse veintisiete cuentas. Una de las cuentas es muy importante y las otras las consideraremos indistinguibles.

- ¿De cuántas maneras el responsable puede asignar el trabajo si quiere que cada asistente trabaje por lo menos en una cuenta de las indistinguibles y que el trabajo del secretario incluya la cuenta más importante?
- Hacer el mismo cálculo sin imponer la restricción de que cada asistente trabaje por lo menos en una cuenta.

2-44 Calcular el número de términos en el desarrollo de las siguientes potencias:

1) $(x + y + z)^7$

2) $(x + y + z + t + u)^4$

3) $(u + v)^{10}$

2.6. Soluciones

2-38 Utilizando la propiedad de simetría de los números binomiales:

$$CR(n, r) = \binom{n + r - 1}{r} = \binom{n + r - 1}{n - 1} = CR(r + 1, n - 1)$$

$$CR(2, r) = \binom{2 + r - 1}{r} = \binom{r + 1}{r} = \binom{r + 1}{1} = r + 1.$$

2-39 El número de resultados coincide con el número de 10-muestras no ordenadas con repetición que pueden hacerse con los elementos $\{$cara, cruz$\}$. Este número es $CR(2, 10) = \binom{2 + 10 - 1}{10} = 11$. Si representamos cara por C y cruz por X, un resultado posible es, por ejemplo, $CXCXCCXXXX$ (es decir, cuatro caras).

2-40 Es el número de 5-muestras no ordenadas con repetición que podemos hacer con los elementos 1, 2, 3, 4, 5. Esta cantidad es $CR(5,5) = \binom{5+5-1}{5} = \binom{9}{5} = \binom{9}{4} = 126.$

Comparar este ejercicio con el ejercicio 2-4.

2-41 La ecuación $x+y+z+t=10$ tiene $CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{4+10-1}{10} =$ $= \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286$ soluciones enteras no negativas.

El número de soluciones enteras positivas es $\binom{s-1}{n-1} = \binom{9}{3} = 84$, donde $n = 4$ y $s = 10$.

2-42 Las soluciones enteras no negativas de esta ecuación son:

$$CR(5,75) = \binom{5+75-1}{75} = \binom{79}{75} = 1502501.$$

Las soluciones enteras positivas de esta ecuación son:

$$\binom{75-1}{5-1} = \binom{74}{4} = 1150626.$$

Por lo tanto, para obtener las soluciones que tienen alguna incógnita igual a cero, sólo es necesario restar los dos resultados anteriores: $1502501 - 1150626 = 351875$. Así, hay 351875 soluciones que tienen alguna incógnita igual a cero.

2-43 De entrada, asignamos la cuenta más importante al secretario. Nos quedan veintiséis cuentas, no distinguibles, que hay que repartir entre cuatro personas. El problema es equivalente a calcular la cantidad de soluciones en números enteros positivos de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$. Ya sabemos que el número buscado es $\binom{26-1}{4-1} = 2300.$

En el segundo caso, si no imponemos la condición de que cada asistente trabaje en como mínimo una cuenta, el problema consiste en calcular las soluciones en números enteros no negativos de la misma ecuación, que sabemos que es $CR(4,26) = \binom{4+26-1}{26} = 3654.$

2-44

1) El desarrollo de $(x+y+z)^7$ tiene $CR(3,7) = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$ términos.

2) El desarrollo de $(x+y+z+t+u)^4$ tiene $CR(5,4) = \binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = 70$ términos.

3) El desarrollo de $(u+v)^{10}$ tiene $CR(2,10) = \binom{2+10-1}{10} = \binom{11}{10} = 11$ términos.

2.7. Resumen de tipos de selecciones de objetos

En las secciones anteriores hemos estudiado diferentes tipos de selecciones de elementos de un conjunto teniendo en cuenta si importa el orden o no en la selección y si permitimos o no repeticiones de los elementos del conjunto.

En el cuadro siguiente se da un resumen de las fórmulas de cálculo que se han ido deduciendo para cada uno de los casos mencionados.

Seleccionar r objetos entre n

	Importa el orden	No importa el orden
Sin repeticiones	$V(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!} =$ $= n(n-1)\cdots(n-r+1)$	$C(n,r) = \dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
Con repeticiones	$VR(n,r) = n^r$	$CR(n,r) = \dbinom{n+r-1}{r}$

2.8. Ejercicios

2-45 Un circuito eléctrico tiene diez conmutadores. Teniendo en cuenta que cada conmutador puede estar en una de las tres posiciones, 0, 1 ó 2.

- Calcular cuántos estados diferentes puede tener el circuito según la posición de los conmutadores.
- Hay una luz de alarma que se enciende cuando hay exactamente tres conmutadores cualesquiera en posición 0. ¿Cuántos estados llevan a que se encienda la luz de alarma?

2-46 Queremos construir números de cinco cifras usando las cifras $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

1) ¿Cuántos números diferentes podemos obtener que tengan todas las cifras pares?

2) ¿Cuántos números diferentes podemos obtener que no tengan ninguna cifra repetida?

3) ¿Cuántos números diferentes podemos obtener que tengan, como mínimo, una cifra repetida?

4) ¿Cuántos números diferentes podemos obtener que tengan, exactamente, cuatro cifras repetidas?

2-47 Sea X el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinar cuántos enteros hay en cada uno de los cuatro conjuntos siguientes, de forma que tengan todos los dígitos en X.

1) enteros con tres dígitos (no necesariamente diferentes)

2) enteros con tres dígitos en orden estrictamente creciente

3) enteros con cuatro dígitos en orden creciente (no necesariamente estrictamente creciente)

4) enteros impares entre 200 y 600

Nota: Decimos que un número entero tiene los dígitos en orden estrictamente creciente si cada dígito es estrictamente mayor que el anterior: por ejemplo 135 o 1256 pero no los tienen ni 223 ni 325.

2-48 Deben colocarse diez libros diferentes en una estantería. Cuatro de estos libros son de una misma colección y de ahí que se quiere que ocupen los cuatro lugares de más a la derecha. ¿De cuántas formas se puede realizar?

2-49 ¿De cuántas maneras podemos colocar a catorce personas de forma que ocho se sienten en una mesa redonda y las otros seis en un banco?

2-50 Una empresa está instalada en seis estados: Japón, Corea del Sur, Vietnam, China, Bangladesh y Laos. Hay que formar un comité de empresa de siete personas. Los representantes enviados por Japón para escoger los miembros del comité son cinco, los de Corea son tres, los de Vietnam son dos, los de China son cinco, los de Bangladesh son cuatro, y de Laos hay uno.

1) ¿De cuántas maneras se puede hacer el comité, de forma que haya tres chinos y cuatro japoneses?

2) ¿De cuántas maneras se puede hacer el comité, de forma que haya, como mínimo, tres chinos y tres japoneses?

3) ¿De cuántas maneras se puede hacer el comité, de forma que haya un número diferente de chinos que de japoneses?

2-51 ¿Cuántos números pares entre 1000 y 9999 no tienen ningún dígito repetido? Razonar la respuesta.

2-52 En el famoso restaurante *Piñonero Palace* se sirven siete tipos de pizzas.

- ¿De cuántas maneras diferentes podemos escoger doce pizzas (no nos importa el orden en la elección)?
- ¿De cuántas maneras lo podemos hacer si queremos asegurarnos de que haya una pizza de cada tipo (no nos importa el orden en la elección)?

2.9. Soluciones

2-45 La cantidad de estados del circuito viene dada por $VR(3,10) = 3^{10}$.

Si queremos que exactamente tres conmutadores estén en la posición 0 podemos calcular las $\binom{10}{3}$ combinaciones de diez elementos tomados de tres en tres y situar los conmutadores en la posición 0 en los lugares seleccionados. Entonces en los otros lugares tenemos que colocar los conmutadores en posición 1 ó 2. En total: $\binom{10}{3} \cdot VR(2,7) = 120 \cdot 2^7 = 15360$.

2-46

1) El número de cifras pares es cuatro. Así, podemos obtener $VR(4,5) = 4^5 = 1024$ números.

2) En este caso, hay $V(9,5) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ números.

3) Sabemos que hay $VR(9,5) = 9^5$ números diferentes. Como hay $V(9,5)$ que no tienen ninguna cifra repetida, entonces podemos obtener

$$VR(9,5) - V(9,5) = 9^5 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 43929$$

números que tienen como mínimo una cifra repetida.

4) En este caso, podemos obtener $9 \cdot 8 \cdot 5 = 360$ números.

2-47

1) Variaciones con repetición de siete elementos tomados de tres en tres o bien 3-muestras ordenadas de siete elementos. En total: $VR(7,3) = 7^3$.

2) Combinaciones de siete elementos tomados de tres en tres o bien 3-muestras no ordenadas sin repetición de siete elementos. En total: $C(7,3) = \binom{7}{3} = 35$.

3) Combinaciones con repetición de siete elementos tomados de cuatro en cuatro, o sea: $CR(7,4) = \binom{7+4-1}{4} = 210$.

4) La cifra de las centenas la podemos escoger de entre los números $2, 3, 4, 5$: o sea, que tenemos cuatro opciones. La cifra de las decenas la podemos escoger de entre los números que queramos del conjunto X: o sea, que tenemos siete opciones. Finalmente, la cifra de las unidades la podemos escoger de entre los números $1, 3, 5, 7$ y tenemos cuatro opciones. En total, pues, podemos obtener $4 \cdot 7 \cdot 4 = 112$ números.

2-48 Se pueden colocar de $P(4) \cdot P(6) = 4! \cdot 6! = 17280$ maneras diferentes.

2-49 Primero tenemos que hacer dos grupos de ocho y seis personas, respectivamente. Esto se puede hacer de $\binom{14}{6}$ maneras. Para cada una de estas maneras podemos sentar a los seis personajes del banco de $P(6) = 6!$ maneras diferentes y a los de la mesa redonda de 7! maneras diferentes. En total, pues, $\binom{14}{6} 6!\, 7! = \frac{14!}{8}$.

2-50

1) Es un caso de combinaciones, porque no importa el orden y no se pueden repetir los componentes de un comité. Por lo tanto, hay $\binom{5}{3}\binom{5}{4} = 50$ posibles comités.

2) En este caso, hay $\binom{5}{3}\binom{5}{3}\binom{10}{1} + \binom{5}{3}\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\binom{5}{3} = 1100$ posibles comités.

Nótese que $\binom{10}{1}$ representa las posibilidades de escoger una persona de entre las otras diez personas, cuando entre chinos y japoneses sólo seis personas forman el comité.

Aunque ya está resuelto, téngase en cuenta que para contestar este apartado sería incorrecto hacer $\binom{5}{3}\binom{5}{3}\binom{14}{1} = 1400$, porque dentro de las catorce personas consideradas se encuentran los dos chinos no escogidos, y los dos japoneses no escogidos. Ahora bien, no se tiene en cuenta que estos dos chinos y dos japoneses no son siempre los mismos y, por esto, no se pueden sumar al resto de las diez personas.

3) Finalmente, en este caso, se consideran todos los posibles comités, de los cuales tenemos que sacar aquéllos donde haya el mismo número de chinos que de japoneses:

$$\binom{20}{7} - \left(\binom{5}{3}\binom{5}{3}\binom{10}{1} + \binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{10}{3} + \binom{5}{1}\binom{5}{1}\binom{10}{5} + \binom{10}{7}\right) = 58100.$$

2-51 Los que acaban en cero tienen nueve posibilidades en los miles, ocho posibilidades en las centenas y siete posibilidades en las decenas: por lo tanto, $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ posibilidades. Los que no acaban en cero tienen cuatro posibilidades en las unidades, ocho posibilidades en los miles, ocho posibilidades en las centenas y siete posibilidades en las decenas: por lo tanto, $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$ posibilidades. En definitiva, hay $504 + 1792 = 2296$ números pares que no repiten ninguna cifra, entre 1000 y 9999.

2-52 En la primera cuestión podemos calcular

$$CR(7,12) = \binom{7+12-1}{12} = \binom{18}{12} = \binom{18}{6} = 18564.$$

En la segunda cuestión suprimiremos siete pizzas del total (una de cada tipo) y, entonces, calculamos las maneras de escoger cinco pizzas sin ninguna condición. Esto nos da

$$CR(7,5) = \binom{7+5-1}{5} = \binom{11}{5} = 462.$$

3. Principio de inclusión-exclusión

En un módulo anterior habíamos visto el cálculo del cardinal de una unión disjunta de dos (o más) conjuntos finitos, llamado *principio de la adición* (*generalizado*). A continuación veremos cómo se calcula el cardinal de una unión no disjunta de dos conjuntos finitos a partir del cardinal de cada uno de ellos y del cardinal de su intersección. Este resultado se llama *principio de inclusión-exclusión*.

Después extenderemos este principio para calcular el cardinal de una unión no disjunta de m ($m > 2$) conjuntos finitos, con el llamado *principio de inclusión-exclusión generalizado*.

Una de las aplicaciones clásicas del principio de inclusión-exclusión es el llamado *problema de los desarreglos*. También se utilizará este principio para calcular el número de funciones exhaustivas, $f : \mathbb{N}_r \to X$.

3.1. Principio de inclusión-exclusión

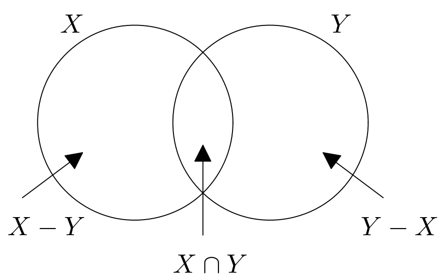
Proposición 2.15

Si X y Y son dos conjuntos finitos, entonces

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Observar...

... que la fórmula $|X \cup Y| =$ $= |X| + |Y| - |X \cap Y|$ generaliza la del principio de la adición, ya que si $X \cap Y = \emptyset$, entonces $|X \cap Y| = 0$, y por lo tanto, nos queda $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.



Demostración: Para demostrar que $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ sólo es necesario aplicar reiteradamente el principio de la adición a las uniones disjuntas siguientes (ver figura).

$X = (X - Y) \cup (X \cap Y)$
$Y = (Y - X) \cup (X \cap Y)$

$X \cup Y = (X - Y) \cup (X \cap Y) \cup (Y - X)$,
donde el conjunto $X - Y$ contiene los elementos de X que no pertenecen a Y.

Así, tenemos $|X \cup Y| = |X - Y| + |X \cap Y| + |Y - X| = |X| + |Y - X| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.
∎

Ejemplo 2-53

Se considera el conjunto de números naturales $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, y los conjuntos $X = \{x \in A;\ \ x \text{ es múltiplo de } 2\}$ y $Y = \{x \in A;\ \ x \text{ es múltiplo de } 3\}$. ¿Cuántos elementos de A son múltiplos de 2 o múltiplos de 3?

Nótese que queremos determinar el cardinal de $X \cup Y$. Por lo tanto, aplicamos la fórmula del principio de inclusión-exclusión (observemos que $X \cap Y \neq \emptyset$):

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = |\{2, 4, 6, 8, 10\}| + |\{3, 6, 9\}| - |\{6\}| = 5 + 3 - 1 = 7.$

Hay siete elementos de A que son múltiplos de 2 o múltiplos de 3.

Ejemplo 2-54

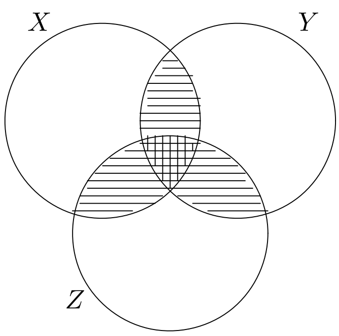
De un grupo de 62 personas hay 35 que leen *El País*, 41 que leen el *ABC* y 16 que no leen ninguno de los dos periódicos. ¿Cuántas personas leen los dos periódicos?

Si el conjunto de personas que leen *El País* lo denotamos por X y el de las personas que leen el *ABC* por Y, entonces $|X \cup Y| = 62 - 16 = 46$. Por otro lado, sabemos que $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$, y por lo tanto, podemos escribir: $46 = 35 + 41 - |X \cap Y|$, de donde se deduce $|X \cap Y| = 30$.

3.2. Principio de inclusión-exclusión generalizado

En el apartado anterior hemos estudiado el caso de dos conjuntos finitos (o sea, $m = 2$). Antes de analizar el caso general, veamos también el caso $m = 3$. La fórmula para tres conjuntos es:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$



Se puede demostrar a partir del caso $m = 2$. En efecto, podemos escribir: $|X \cup Y \cup Z| = |X \cup (Y \cup Z)| = |X| + |Y \cup Z| - |X \cap (Y \cup Z)| = |X| + |Y \cup Z| - |(X \cap Y) \cup (X \cap Z)| = |X| + |Y| + |Z| - |Y \cap Z| - (|X \cap Y| + |X \cap Z| - |(X \cap Y) \cap (X \cap Z)|) = |X| + |Y| + |Z| - |Y \cap Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$. Es necesario observar que se ha utilizado de manera consecutiva las propiedades siguientes: asociativa de la unión, principio de inclusión-exclusión para el caso $m = 2$, distributiva unión-intersección, principio de inclusión-exclusión para el caso $m = 2$.

Una demostración alternativa de la igualdad $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$ es la siguiente: supongamos una situación como la de la figura anterior, y observemos que en la expresión $|X| + |Y| + |Z|$ se cuentan dos veces los elementos que están en la intersección de sólo dos de los tres subconjuntos (región tachada de la figura) y tres veces los elementos de $X \cap Y \cap Z$ (región cuadriculada de la figura). Restando los cardinales $|X \cap Y|$, $|X \cap Z|$ y $|Y \cap Z|$, y sumando el cardinal $|X \cap Y \cap Z|$ obtenemos, por lo tanto, el cardinal $|X \cup Y \cup Z|$.

La fórmula que acabamos de estudiar la podemos escribir así:

$$|X \cup Y \cup Z| = a_1 - a_2 + a_3,$$

donde $a_1 = |X| + |Y| + |Z|$, $a_2 = |X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z|$ y $a_3 = = |X \cap Y \cap Z|$.

Esta forma de escribir la igualdad es la que nos servirá para analizar los casos donde $m > 3$. Veamos antes un ejemplo de aplicación en el caso $m = 3$.

Ejemplo 2-55

En un grupo de 100 personas, un total de 43 hablan inglés, 27 hablan francés y 50 hablan español. Sabemos también que 16 personas hablan inglés y francés, 20 hablan inglés y español y 18 hablan francés y español. Finalmente, 10 personas hablan los tres idiomas. Con toda esta información, podemos deducir, entre otras cosas, que 24 de las 100 personas no hablan ninguno de los tres idiomas.

En efecto, digamos A al conjunto de las personas que hablan inglés, F al de las personas que hablan francés y E al de las que hablan español. Nos dicen que $|A| = 43$, $|F| = 27$, $|E| = 50$, $|A \cap F| = 16$, $|A \cap E| = 20$, $|F \cap E| = 18$, $|A \cap F \cap E| = 10$.

Aplicando la fórmula

$$\begin{aligned} |A \cup F \cup E| &= |A| + |F| + |E| - |A \cap F| - |A \cap E| - |F \cap E| + |A \cap F \cap E| = \\ &= 43 + 27 + 50 - 16 - 20 - 18 + 10 = 76, \end{aligned}$$

que nos dice que hay 76 personas que hablan por lo menos uno de los idiomas, por lo tanto hay $100 - 76 = 24$ personas que no hablan ninguno de estos idiomas.

Nótese que en la situación del ejemplo:
$a_1 = |A| + |F| + |E| = 43 + 27 + 50 = 120$,
$a_2 = |A \cap F| + |A \cap E| + |F \cap E| = 16 + 20 + 18 = 54$,
$a_3 = |A \cap F \cap E| = 10$.
Se verifica, pues, $|A \cup F \cup E| = a_1 - a_2 + a_3 = 120 - 54 + 10 = 76$.

Obsérvese que a partir de la información dada en el ejemplo anterior se pueden deducir también otros hechos. Así, podemos decir que hay $16 - 10 = 6$ personas que hablan inglés y francés pero no español, $50 - 20 - 18 + 10 = 22$ personas que hablan sólo español, etc.

Proposición 2.16

Si $X_1, \ldots, X_m$ son conjuntos finitos, entonces

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_m| = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{m-1} a_m,$$

donde a_p es la suma de los cardinales de todas las intersecciones de p de los conjuntos $X_1, \ldots, X_m$.

Ejemplo 2-56

Si A, B, C, D son conjuntos finitos, entonces:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = a_1 - a_2 + a_3 - a_4,$$

donde $a_1 = |A| + |B| + |C| + |D|$, $a_2 = |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|$, $a_3 = |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$ y $a_4 = |A \cap B \cap C \cap D|$.

Demostración: La demostración de la fórmula $|X_1 \cup \cdots \cup X_m| = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{m-1} a_m$ se puede llevar a cabo observando que cada elemento de la unión $X_1 \cup \cdots \cup X_m$ se cuenta una única vez en la expresión del segundo miembro de la igualdad. Supongamos que $x \in X_1 \cup \cdots \cup X_m$ pertenece exactamente a p de los m conjuntos $X_1, \ldots, X_m$: $x \in X_{i_1} \cup \cdots \cup X_{i_p}$. Entonces x está contado $p = \binom{p}{1}$ veces en a_1, $\binom{p}{2}$ veces en a_2, en general $\binom{p}{s}$ veces en a_s siempre que $s \leq p$. Evidentemente, x no está contado ninguna vez si $s > p$. Por otro lado, ya sabemos (ejercicio 2-10) lo siguiente:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Si consideramos $n = p$ en la igualdad anterior, podemos escribir:

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{p}{p-1} + (-1)^n \binom{p}{p},$$

pero $\binom{p}{0} = 1$, por lo tanto podemos afirmar que el elemento x está contado exactamente una vez en el segundo miembro, y esto demuestra que:

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_m| = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{m-1} a_m.$$

∎

3.3. Problema de los desarreglos

Una versión pintoresca de este problema es la siguiente: Rosa, una secretaria poco eficiente, debía meter diez cartas dirigidas a diez clientes en sus respectivos sobres, cosa que hizo sin mirar si cada carta iba a parar al sobre adecuado. La cuestión es averiguar de cuántas maneras puede pasar que ninguno de los clientes reciba la carta que le iba dirigida.

Para poder tratar el problema con las herramientas que tenemos, supongamos que cada carta y su sobre "correcto" están numerados mediante un entero r, $r \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Poner las cartas dentro los sobres tal y como lo hace Rosa se puede identificar con una biyección

$$f : \{1, 2, \ldots, 10\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, 10\},$$

donde $f(r) = s$ quiere decir que coloca la carta r en el sobre s. Lo que queremos es calcular el número de desarreglos; es decir, el número de biyecciones (o, equivalentemente, permutaciones, ver módulo anterior) f en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 10\}$ que cumplan la condición $f(r) \neq r$ para todo $r \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. En general,

Definición 2.17

Un **desarreglo** en un conjunto X de m elementos es una biyección $f : X \to X$ tal que $f(r) \neq r, \ \forall r \in X$.

Definición 2.18

Denotaremos por $\boldsymbol{D_m}$ la cantidad de desarreglos en un conjunto X con m elementos.

Veamos, ahora, unos ejemplos de desarreglos.

Ejemplo 2-57

Si escribimos cada biyección como una 10-muestra ordenada sin repetición, entonces un desarreglo es, por ejemplo, $2-1-4-3-6-5-8-7-10-9$, puesto que ningún elemento está "en su lugar" respeto a la ordenación natural $1-2-3-4-5-6-7-8-9-10$. En cambio, la permutación $4-3-1-10-5-2-6-7-8-9$ no es un desarreglo, puesto que el elemento 5 está en su lugar.

Ejercicio 2-58

¿Cuántas permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ hay que tengan el elemento 2 en su lugar?

Solución: De las $10! = 3628800$ permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 10\}$, hay $9! = 362880$ que tienen el 2 en su lugar.

Nótese que en este ejercicio hemos calculado cuántas permutaciones tienen el 2 en su lugar, sin importarnos si los otros elementos están en su lugar o no.

Ejercicio 2-59

¿Cuántas permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ hay que tengan el 2 y el 6 en su lugar? En general, ¿cuántas hay que tengan $1, 2, \ldots, p$ en su lugar?

Solución: Hay $8! = 40320$ que tienen el 2 y el 6 en su lugar. En general, que tengan $1, 2, \ldots, p$ en su lugar, hay $(10 - p)!$.

Volvamos al problema de Rosa. Digamos X_i al conjunto de las permutaciones,

f, tales que $f(i) = i$ (diremos que f deja fijo el elemento i). El número, D_{10}, de desarreglos es, por lo tanto, el número de permutaciones que no están dentro de ninguno de los conjuntos X_i, es decir:

$$D_{10} = 10! - |X_1 \cup \cdots \cup X_{10}|.$$

Al aplicar el principio de inclusión-exclusión para calcular el cardinal de $X_1 \cup \cdots \cup X_{10}$ tenemos:

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_{10}| = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10},$$

donde a_p es la suma de los cardinales de todas las intersecciones $X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_p}$ formadas por p conjuntos entre los $X_1, \ldots, X_{10}$.

Por otro lado, hemos visto que $|X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_p}| = (10 - p)!$ (ejercicio 2-59), y como hay $\binom{10}{p}$ formas de seleccionar p conjuntos entre los 10 conjuntos $X_1, \ldots, X_{10}$, entonces obtenemos el valor de cada a_p: $a_p = \binom{10}{p}(10 - p)!$. Finalmente, podemos afirmar que el número de desarreglos es:

$$D_{10} = 10! - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10}.$$

Haciendo los cálculos necesarios obtenemos $D_{10} = 1334961$.

Nótese que, de acuerdo con el número obtenido, la proporción de desarreglos respeto del total es de

$$\frac{D_{10}}{10!} = \frac{1334961}{3628800} = 0,3678,$$

cosa que nos dice que la probabilidad de que ningún cliente reciba su carta es del 36 %.

Ejercicio 2-60

Calcular el valor de a_3 y a_7 en el problema de los desarreglos de Rosa.

Solución:

$a3 = \binom{10}{3}(10 - 3)! = \binom{10}{3} 7! = 604800.$

$a7 = \binom{10}{7}(10 - 7)! = \binom{10}{3} 3! = 720.$

En general, tenemos el resultado siguiente:

Proposición 2.19

Si el conjunto X tiene m elementos, el número de desarreglos de X es

$$D_m = m! - (a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{m-1} a_m),$$

donde $a_p = \binom{m}{p}(m - p)! \quad \forall p \in \{1, \ldots, m\}$.

Utilizando desarreglos también podemos calcular, por ejemplo, de cuántas maneras puede pasar que unos determinados clientes o unos clientes cualesquiera o, como mínimo, j clientes reciban la carta correcta.

Ejercicio 2-61

En el problema de Rosa planteado antes, ¿de cuántas maneras puede pasar que sólo el primer y el segundo cliente reciban la carta correcta?

Solución: Este problema es equivalente a calcular cuántas permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ hay que tengan sólo el elemento 1 y el 2 en su lugar; o sea, que tras fijar los elementos 1 y 2, debemos calcular los posibles desarreglos de los otros ocho elementos (cartas):

$$\begin{aligned} D_8 &= 8! - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 = \\ &= 8! - 8! + 20160 - 6720 + 1680 - 336 + 56 - 8 + 1 = 14833, \end{aligned}$$

donde $a_p = \binom{8}{p}(8-p)!$.

Ejercicio 2-62

Continuando con el problema de Rosa, calcular de cuántas maneras puede pasar que, como mínimo, tres clientes reciban la carta correcta.

Solución: Este problema es equivalente a calcular cuántas permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ hay en total y después restar la cantidad de permutaciones donde no haya ningún elemento en su lugar, haya un sólo elemento y haya en su lugar dos elementos. O sea,

$$\begin{aligned} &10! - D_{10} - \binom{10}{1} D_9 - \binom{10}{2} D_8 = \\ &= 3628800 - 1334961 - 10 \cdot 133496 - 45 \cdot 14833 = 291394. \end{aligned}$$

3.4. Cálculo del número de funciones exhaustivas

Dado un conjunto con m elementos que podemos considerar que es $\mathbb{N}_m$, recordemos que las funciones exhaustivas f del conjunto $\mathbb{N}_r = \{1, \ldots, r\}$ en $\mathbb{N}_m = \{1, \ldots, m\}$ (o equivalentemente de un conjunto de r elementos en un conjunto de m elementos) son aquéllas en que cada elemento de $\mathbb{N}_m$ tiene alguna antiimagen.

El número total de funciones $f : \mathbb{N}_r \to \mathbb{N}_m$ es m^r (habíamos hecho este cálculo en el módulo anterior utilizando el concepto de muestra ordenada con repetición). Sea X_i el conjunto de todas las funciones, f, donde el elemento i no tiene antiimagen. Así, el conjunto $X_1 \cup \cdots \cup X_m$ representa el conjunto de todas las funciones donde por lo menos un elemento de $\mathbb{N}_m$ no tiene antiimagen. Por lo tanto, el número de funciones exhaustivas es

$$m^r - |X_1 \cup \cdots \cup X_m|.$$

Aplicando el principio de inclusión-exclusión para calcular el cardinal del conjunto $X_1 \cup \cdots \cup X_m$ tenemos:

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_m| = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{m-1} a_m,$$

donde a_p es la suma de los cardinales de todas las intersecciones $X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_p}$ formada por p de los conjuntos $X_1, \ldots, X_m$.

Por otro lado, vemos que $|X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_p}| = (m-p)^r$, puesto que éste es el conjunto de todas las funciones donde los elementos $i_1, \ldots, i_p$ no tienen antiimagen, o lo que es lo mismo, de todas las funciones $f : \mathbb{N}_r \to \mathbb{N}_{m-p}$. Como hay $\binom{m}{p}$ maneras de seleccionar p conjuntos entre $X_1, \ldots, X_m$, entonces $a_p = \binom{m}{p}(m-p)^r$. Finalmente, podemos decir que el número de funciones exhaustivas de $\mathbb{N}_r$ en $\mathbb{N}_m$ es

$$m^r - \left(\binom{m}{1}(m-1)^r - \binom{m}{2}(m-2)^r + \cdots + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-1}1^r + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}0\right) =$$
$$= m^r - \binom{m}{1}(m-1)^r + \binom{m}{2}(m-2)^r - \cdots + (-1)^{m-1} m.$$

Ejercicio 2-63

¿Cuántas funciones exhaustivas se pueden construir del conjunto $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ en $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$?

Solución: A partir de la fórmula que hemos deducido en este apartado, para $r = 4$ y $m = 3$, sabemos que el número de funciones exhaustivas es

$$3^4 - \binom{3}{1}(3-1)^4 + \binom{3}{2}(3-2)^4 = 3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 = 36.$$

3.5. Ejercicios

2-64 ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1000 (ambos incluidos) no son cuadrados perfectos ni cubos perfectos?

2-65 ¿Cuántos números naturales entre 1 y 600 (ambos incluidos) son divisibles por 3 o por 5?

2-66 En un grupo de 150 personas, un total de 50 hablan inglés, 37 hablan francés y 45 hablan español. Sabemos también que 23 personas hablan inglés y francés, 25 hablan inglés y español y 19 hablan francés y español. Finalmente, 8 personas hablan los tres idiomas. Con toda esta información, calcular cuántas personas hay que no hablan ninguno de los tres idiomas.

2-67 ¿Cuántos números hay entre 1 y 1000 que no sean divisibles ni por 3 ni por 5 ni por 7?

2-68 Resolver el problema de los desarreglos para el caso de seis clientes. Calcular la probabilidad de que ninguno de los clientes reciba la carta correcta.

2-69 A Felisa se le cae al suelo un documento muy interesante sobre *Socialismo y Globalización*. El documento tiene cinco páginas y al recogerlo no le han quedado las páginas muy bien ordenadas.

Calcular de cuántas maneras diferentes le puede haber pasado, de forma
a) que ninguna página quede en su lugar correcto.
b) que la única página que quede en la posición correcta es la portada.
c) que haya habido por lo menos dos páginas que hayan quedado en la posición correcta.

2-70 ¿Cuántas funciones exhaustivas hay de un conjunto de seis elementos en un conjunto de cuatro elementos?

3.6. Soluciones

2-64 Consideramos los conjuntos $X = \{$números entre 1 y 1000 que son cuadrados perfectos$\}$ y $Y = \{$números entre 1 y 1000 que son cubos perfectos$\}$. Obsérvese que X y Y no son disjuntos: 729 es un cuadrado perfecto ($729 = 27^2$) y también es un cubo perfecto ($729 = 9^3$). De hecho, un elemento de $X \cap Y$ debe ser de la forma n^6 ($729 = 3^6$), y por lo tanto el cardinal de $X \cap Y$ es 3, $X \cap Y = \{1, 64, 729\}$. Veamos ahora cuáles son los cardinales de X y Y. Dado que $31^2 = 961$ y $32^2 = 1024$, podemos decir que $|X| = 31$. Análogamente, $|Y| = 10$, puesto que $10^3 = 1000$. Para finalizar, podemos calcular cuántos números son cuadrados o cubos perfectos mediante la fórmula:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 31 + 10 - 3 = 38,$$

y finalmente el número que nos piden será $1000 - 38 = 962$ números entre 1 y 1000 que no son cuadrados ni cubos perfectos.

2-65 Consideramos los conjuntos $X = \{$números entre 1 y 600 que son múltiplos de 3$\}$ y $Y = \{$números entre 1 y 600 que son múltiplos de 5$\}$. Nos piden calcular $|X \cup Y|$. Evidentemente, $X \cap Y \neq \emptyset$, más concretamente: $X \cap Y = \{$números entre 1 y 600 que son múltiplos de 15$\}$. Por otro lado, $|X| = 200$, $|Y| = 120$, $|X \cap Y| = 40$ y así podemos escribir:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 200 + 120 - 40 = 280.$$

Hay doscientos ochenta números entre 1 y 600 que son múltiplos de 3 o de 5.

2-66 Sea A el conjunto de las personas que hablan inglés, F el de las personas que hablan francés y E el de las que hablan español. Nos dicen que $|A| = 50$, $|F| = 37$, $|E| = 45$, $|A \cap F| = 23$, $|A \cap E| = 25$, $|F \cap E| = 19$, $|A \cap F \cap E| = 8$.

Aplicando el principio de inclusión-exclusión generalizado:

$$\begin{aligned} |A \cup F \cup E| &= |A| + |F| + |E| - |A \cap F| - |A \cap E| - |F \cap E| + |A \cap F \cap E| = \\ &= 50 + 37 + 45 - 23 - 25 - 19 + 8 = 73, \end{aligned}$$

que nos dice que hay setenta y tres personas que hablan por lo menos uno de los idiomas, y por lo tanto, hay $150 - 73 = 77$ personas que no hablan ninguno de los idiomas.

2-67 Sea X el conjunto de los números entre 1 y 1000 que son divisibles por 3, Y el conjunto de los que son divisibles por 5 y Z el conjunto de los que son divisibles por 7. La cantidad de números entre 1 y 1000 que no son divisibles ni por 3, ni por 5, ni por 7 es, pues: $1000 - |X \cup Y \cup Z|$. Se trata, por lo tanto, de calcular (utilizando el principio de inclusión-exclusión) el cardinal del conjunto $X \cup Y \cup Z$.

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Observar lo siguiente:
$X = \{3 = 3 \cdot 1, 6 = 3 \cdot 2, 9 = 3 \cdot 3, \ldots, 999 = 3 \cdot 333\}$, así: $|X| = 333$,

$Y = \{5 = 5 \cdot 1, 10 = 5 \cdot 2, \ldots, 1000 = 5 \cdot 200\}$, por lo tanto $|Y| = 200$,
$Z = \{7 = 7 \cdot 1, 14 = 7 \cdot 2, \ldots, 994 = 7 \cdot 142\}$, de donde $|Z| = 142$,
$X \cap Y = \{15 = 15 \cdot 1, 30 = 15 \cdot 2, \ldots, 990 = 15 \cdot 66\}$, de donde $|X \cap Y| = 66$,
$X \cap Z = \{21 = 21 \cdot 1, 42 = 21 \cdot 2, \ldots, 987 = 21 \cdot 47\}$, por lo tanto $|X \cap Z| = 47$,
$Y \cap Z = \{35 = 35 \cdot 1, 70 = 35 \cdot 2, \ldots, 980 = 35 \cdot 28\}$, por lo tanto $|Y \cap Z| = 28$.
Finalmente, $X \cap Y \cap Z = \{105 = 105 \cdot 1, 210 = 105 \cdot 2, \ldots, 945 = 105 \cdot 9\}$, por lo tanto $|X \cap Y \cap Z| = 9$.

El número pedido es $1000 - (333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9) = 1000 - 543 = 457$. De todos los números entre 1 y 1000 hay 457 que no son divisibles por ninguno de los números 3, 5 y 7.

(Observación: Hemos utilizado repetidamente el hecho de que los múltiplos de a, b, $c \ldots$ son los múltiplos del $mcm(a, b, c \ldots)$. Así, los múltiplos de 3 y 5 son los múltiplos de $mcm(3, 5) = 15$, etc.)

2-68 Utilizando la notación vista antes, para el caso de seis clientes, nos piden hacer el cálculo siguiente:

$$D_6 = 6! - |X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5 \cup X_6| = 6! - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6.$$

Por otro lado, sabemos que $a_p = \binom{6}{p}(6-p)!$. Por lo tanto,

$a_1 = \binom{6}{1}(6-1)! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720;$
$a_2 = \binom{6}{2}(6-2)! = 15 \cdot 4! = 15 \cdot 24 = 360;$
$a_3 = \binom{6}{3}(6-3)! = 20 \cdot 3! = 20 \cdot 6 = 120;$
$a_4 = \binom{6}{4}(6-4)! = 15 \cdot 2! = 15 \cdot 2 = 30;$
$a_5 = \binom{6}{5}(6-5)! = 6 \cdot 1! = 6 \cdot 1 = 6;$
$a_6 = \binom{6}{6}(6-6)! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1.$

Consecuentemente, $D_6 = 720 - 720 + 360 - 120 + 30 - 6 + 1 = 265$. La probabilidad de que ningún cliente reciba la carta correcta es $\frac{265}{720} = 0,3680$.

2-69 Es un problema típico de desarreglos.

La solución a la primera pregunta es $D_5 = 5! - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$, donde cada uno de los valores a_s puede obtenerse de la manera siguiente: hemos fijado s páginas (de todas las maneras posibles) y las otras páginas las hemos permutado de todas las maneras posibles. La cantidad de situaciones como la descrita nos da $a_s = \binom{5}{s}(5-s)!$. Entonces,

$$D_5 = 5! - \binom{5}{1}(5-1)! + \binom{5}{2}(5-2)! - \binom{5}{3}(5-3)! + \binom{5}{4}(5-4)! - \binom{5}{5}(5-5)! = 44.$$

Que coincida la portada se da de tantas maneras como posibles desarreglos de las otras cuatro páginas hay, una vez fijada la primera página. O sea,

$$D_4 = 4! - \binom{4}{1}(4-1)! + \binom{4}{2}(4-2)! - \binom{4}{3}(4-3)! + \binom{4}{4}(4-4)! = 9.$$

Los casos en que haya habido por lo menos dos coincidencias los podemos contar a partir del total de permutaciones, restando los casos en que no haya habido ninguna coincidencia o sólo una. Esto es

$$5! - D_5 - 5 \cdot D_4 = 120 - 44 - 5 \cdot 9 = 31.$$

2-70 A partir de la fórmula que se ha deducido en el apartado 3.4. cuando $r = 6$ y $m = 4$, el número de funciones exhaustivas es

$$4^6 - \binom{4}{1}(4-1)^6 + \binom{4}{2}(4-2)^6 - \binom{4}{3}(4-3)^6 = 4^6 - 4 \cdot 3^6 + 6 \cdot 2^6 - 4 = 1560.$$

Ejercicios de autoevaluación

2-71 Calcular el coeficiente de x^5 en el desarrollo de la potencia $(2+3x)^7$.

2-72 Se define la distancia entre dos palabras binarias de longitud n como el número de posiciones en que difieren (ejemplo: la distancia entre las palabras 0110111 y 1101001 es igual a 5, puesto que las palabras son diferentes en las posiciones 1, 3, 4, 5, 6). Fijada la palabra 0110111, ¿cuántas palabras (de longitud 7) hay a distancia 5 de esta palabra? ¿Cuántas hay a distancia menor o igual a 5?

2-73 Se considera el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, y se pide:
a) ¿Cuántos subconjuntos de cuatro elementos tiene el conjunto A?
b) ¿Cuántos de estos subconjuntos no contienen el 6?
c) ¿Cuántos de estos subconjuntos contienen el 1 y el 6?

2-74 Demostrar que si p es un número primo y $k \in \{1,2,\ldots,p-1\}$, entonces los números $\binom{p}{k}$ son múltiplos de p. Utilizar este resultado para demostrar que $(a+b)^p - a^p - b^p$ es múltiplo de p, para cualesquiera enteros a, b y p entero positivo primo.

Indicación: Utilizar el resultado siguiente: “Si x divide $y \cdot z$ y x es primo con y, entonces x divide a z”.

2-75 A partir de un grupo de personas formado por doce mallorquines y quince catalanes hay que constituir un comité de nueve personas. De cuántas maneras se puede hacer el comité:
a) si tiene que haber cinco mallorquines y cuatro catalanes.
b) si tiene que haber por lo menos tres catalanes.
c) si tiene que haber más catalanes que mallorquines.

2-76 Escribir todas las posibles distribuciones de tres bolas idénticas en cuatro cajas (a, b, c, d).

2-77 Hallar el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x+y+z+t+u = 100$. Escribir cuatro soluciones de esta ecuación.

2-78 ¿Cuántos números hay entre 1 y 1500 que sean múltiplos por lo menos de uno de los números 2, 5 y 11?

2-79 En una residencia de estudiantes se han formado cuatro grupos para organizar unas jornadas culturales: el grupo de cine, el de teatro, el de música y el de baile. Cada estudiante pertenece, como mínimo, a uno de estos grupos. Hay dos estudiantes que participan en los cuatro grupos. Hay veinticinco estudiantes en cada uno de los grupos, quince que simultanean su participación en cada par de grupos y diez en cada tres de los cuatro grupos. ¿Cuántos estudiantes hay en la residencia?

2-80 En un tablero de ajedrez de 8×8 casillas, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden colocar ocho torres iguales de manera que ninguna esté en la diagonal principal ni se puedan matar entre ellas? (dos torres están en posición de matarse si están en la misma fila o en la misma columna).

Solucionario

2-71 Un término cualquiera del desarrollo de la potencia $(2+3x)^7$ es de la siguiente forma: $\binom{7}{i}2^{7-i}(3x)^i = \binom{7}{i}2^{7-i}3^i x^i$. Por lo tanto, el término en x^5 se obtiene con el valor $i=5$, y así el coeficiente de x^5 es $\binom{7}{5}2^{7-5}3^5 = \binom{7}{2}2^2 3^5 = 20412$.

2-72 Una palabra está a una distancia 5 de la palabra 0110111 si el número de posiciones en que difieren es 5. Se trata, por lo tanto, de calcular el número de 5-muestras no ordenadas sin repetición que pueden hacerse con $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (las posiciones). Por ejemplo, la muestra 12367 corresponde a la palabra que difiere de la dada en las posiciones $1, 2, 3, 6, 7$, es decir la palabra 1000100. El número es $\binom{7}{5} = 21$.

El número de palabras a distancia menor o igual a 5 de la palabra 0110111 es:

$$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5} = 1+7+21+35+35+21 = 120.$$

Nótese que este cálculo se habría podido llevar a cabo calculando las palabras que están a distancia 6 ó 7 de la dada y después haciendo el complementario:

$$2^7 - \binom{7}{6} - \binom{7}{7} = 128-7-1 = 120.$$

2-73 a) El conjunto A tiene $\binom{7}{4} = 35$ subconjuntos de cuatro elementos.

b) De los treinta y cinco subconjuntos hay $\binom{6}{4} = 15$ que no contienen el 6.

c) De los treinta y cinco subconjuntos hay $\binom{5}{2} = 10$ que contienen el 1 y el 6.

2-74 Podemos escribir $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)\cdots 2\cdot 1}{x}$, donde $x = k!(p-k)!$. Por lo tanto, x divide $p\cdot z$, donde $z = (p-1)\cdots 2\cdot 1$. Por otro lado, x es primo con p y, por lo que x tiene que dividir a z (mirar indicación): consecuentemente, $\binom{p}{k} = \frac{p\cdot z}{x}$ es múltiplo de p.

En cuanto a la segunda parte, fijaros en el desarrollo:

$(a+b)^p = \binom{p}{0}a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}ab^{p-1} + \binom{p}{p}b^p$

$(a+b)^p - a^p - b^p = \binom{p}{1}a^{p-1}b + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}ab^{p-1}$, y como cada término del segundo miembro es múltiplo de p, entonces todo él lo es y, consecuentemente, también lo es $(a+b)^p - a^p - b^p$.

2-75 a) La respuesta es $\binom{12}{5}\binom{15}{4} = 792\cdot 1365 = 1081080$ comités.

b) El número de comités con, por lo menos, tres catalanes se puede calcular restando del número total de comités que pueden hacerse con las veintisiete personas, el número de comités con ningún catalán, un catalán y dos catalanes. Es decir:

$$\binom{27}{9} - \binom{12}{9}\binom{15}{0} - \binom{12}{8}\binom{15}{1} - \binom{12}{7}\binom{15}{2} =$$
$$= 4686825 - 220 \cdot 1 - 495 \cdot 15 - 792 \cdot 105 = 4596020.$$

c) El número de comités con más catalanes que mallorquines es:

$$\binom{12}{0}\binom{15}{9} + \binom{12}{1}\binom{15}{8} + \binom{12}{2}\binom{15}{7} + \binom{12}{3}\binom{15}{6} + \binom{12}{4}\binom{15}{5} =$$

$= 1 \cdot 5005 + 12 \cdot 6435 + 66 \cdot 6435 + 220 \cdot 5005 + 495 \cdot 3003 = 3094520.$

2-76 El número de distribuciones es $CR(4,3) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20.$

Éstas son: aaa, aab, aac, aad, bbb, bba, bbc, bbd, ccc, cca, ccb, ccd, ddd, dda, ddb, ddc, abc, abd, acd, bcd.

2-77 El número de soluciones positivas de la ecuación es $\binom{100-1}{5-1} = \binom{99}{4} = 3764376$ $(n = 5,\ s = 100)$.

Cuatro soluciones particulares son, por ejemplo:
$(1,1,1,1,96)$, $(1,96,1,1,1)$, $(2,50,35,13)$, $(40,10,30,10,10)$.

2-78 Sea X el conjunto de los números entre 1 y 1500 que son múltiplos de 2, Y el conjunto de los números que son múltiplos de 5 y Z el conjunto de los números que son múltiplos de 11. Se trata de calcular el cardinal del conjunto $X \cup Y \cup Z$. Aplicando el principio de inclusión-exclusión:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|,$$

$X = \{2 = 2 \cdot 1, 4 = 2 \cdot 2, \ldots, 1500 = 2 \cdot 750\}$, por lo tanto $|X| = 750$,
$Y = \{5 = 5 \cdot 1, 10 = 5 \cdot 2, \ldots, 1500 = 5 \cdot 300\}$, por lo tanto $|Y| = 300$,
$Z = \{11 = 11 \cdot 1, 22 = 11 \cdot 2, \ldots, 1496 = 11 \cdot 136\}$, de donde $|Z| = 136$.
Análogamente, $X \cap Y = \{$múltiplos de 10 (entre 1 y 1500)$\}$, es $|X \cap Y| = 150$,
$X \cap Z = \{$múltiplos de 22 (entre 1 y 1500)$\}$, es $|X \cap Z| = 68$,
$Y \cap Z = \{$múltiplos de 55 (entre 1 y 1500$\}$, es $|Y \cap Z| = 27$.
Finalmente, $X \cap Y \cap Z = \{$múltiplos de 110 (entre 1 y 1500 $\}$, es $|X \cap Y \cap Z| = 13$.

Podemos decir, por lo tanto, que $|X \cup Y \cup Z| = 750 + 300 + 136 - 150 - 68 - 27 + 13 = 954$.

2-79 Es una aplicación inmediata del principio de inclusión-exclusión:

Digamos C, T, M, E a los cuatro grupos. Entonces,

$|C \cup T \cup M \cup E| =$
$|C| + |T| + |M| + |E| - |C \cap T| - |C \cap M| \cdots |M \cap E| + |C \cap T \cap M| + \cdots + |T \cap M \cap E| - |C \cap T \cap M \cap E| = 25 + 25 + 25 + 25 - 15 - 15 \cdots - 15 + 10 + \cdots + 10 - 2 =$
$= 25 \cdot 4 - 15\binom{4}{2} + 10\binom{4}{3} - 2 = 48.$

2-80 Es un problema de desarreglos. Digamos 1 a la primera casilla de la diagonal principal, 2 a la segunda casilla de la diagonal principal, etc. tal como muestra la figura:

1							
	2						
		3					
			4				
				5			
					6		
						7	
							8

Entonces las ocho torres (que podemos numerar de la 1 a la 8) hay que colocarlas, respectivamente, de la manera siguiente: la torre 1 en la fila 1, la torre 2 en la fila 2, etc. sin que coincida la torre i en la columna i y sin que dos torres estén en la misma columna. Cada colocación equivale a escribir las columnas donde situaremos, respectivamente, la torre 1, la torre 2, etc.: o sea, una permutación de los elementos del conjunto $\{1, 2, \cdots, 8\}$, donde ninguna i se encuentra en el lugar i. El resultado es, pues, el número de desarreglos de ocho elementos,

$$D_8 = 8! - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 =$$
$$= 20160 - 6720 + 1680 - 336 + 56 - 8 + 1 = 14833.$$

Números multinomiales. Funciones generadoras

Ramon Masià
Jaume Pujol
Josep Rifà
Mercè Villanueva

P06/75006/01396

www.uoc.edu

Índice

Introducción

Al empezar este módulo, el estudiante dispone de un bagaje que abarca la combinatoria elemental. Conoce algunas técnicas para contar las selecciones de r-muestras ordenadas o no ordenadas en un conjunto X de n elementos y, también, ha aprendido a resolver algunos problemas de distribuciones de objetos indistinguibles en cajas distinguibles. En este módulo estamos interesados en problemas de distribuciones en los que van a aparecer ciertas restricciones y, también, en algunos problemas de particiones. Para resolver estos problemas utilizaremos una técnica básica en la combinatoria: las funciones generadoras.

El módulo comienza con una introducción del concepto de partición de un conjunto. A continuación, en la sección segunda, introducimos los números multinomiales que serán vistos como una generalización de los números binomiales estudiados en un módulo anterior, pero también como una herramienta para resolver ciertos problemas de reordenaciones y de distribuciones. En los problemas de distribuir o seleccionar objetos para colocarlos en cajas tendremos que saber diferenciar según los objetos a colocar sean distinguibles o no lo sean. Ejemplos de estos tipos de problemas son: colocar alumnos en aulas, repartir juguetes (que podrán ser iguales o no) a unos niños concretos, envasar productos (iguales o no) en cajas, etc.

Finalmente, la última sección está dedicada al estudio y utilización de la técnica de las funciones generadoras. Ésta es una técnica muy importante para resolver ciertos problemas combinatorios como, por ejemplo, el de distribuir objetos en cajas en el supuesto de que el problema esté sujeto a ciertas restricciones.

1. Particiones en un conjunto

1.1. Partición de un conjunto X

Definición 3.1

Una familia $V = \{X_j \mid j \in J\}$ de subconjuntos de X es una **partición** de X si se cumplen las condiciones siguientes:

1) Cada parte X_j es no vacía: $\forall\, j \in J \Rightarrow X_j \neq \emptyset$

2) Dos partes distintas son disjuntas: $X_j \cap X_p = \emptyset$, si y sólo si $j \neq p$

3) La unión de todas las partes es igual al conjunto: $\cup_{j \in J} X_j = X$

Una partición...

... de un conjunto X en k partes se llama, también, una **k-partición** de X.

Ejemplo 3-1

1) $V = \{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f,g\}\}$ es una partición de $X = \{a,b,c,d,e,f,g\}$, puesto que se cumplen las tres condiciones exigidas en la definición.

2) $V = \{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f\}\}$ no es una partición de $X = \{a,b,c,d,e,f,g\}$, puesto que no se cumple la tercera condición de la definición.

3) $V = \{\{a,e,f\},\{b,c,d,g\}\}$ es una partición de $X = \{a,b,c,d,e,f,g\}$, puesto que se cumplen las tres condiciones exigidas en la definición.

Es importante insistir en el significado de las condiciones segunda y tercera de la definición: cada elemento del conjunto X sólo pertenece a un subconjunto de los que forman la partición. Así, en el ejemplo 3-1.1, el elemento a sólo pertenece a $\{a,b,c\}$, el elemento b sólo pertenece a $\{a,b,c\}$, el elemento c sólo pertenece a $\{a,b,c\}$, el elemento d sólo pertenece a $\{d\}$, etc.

1.2. Ejercicios

3-2 Encontrar una partición de $X = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ que tenga cuatro partes, una de las cuales sea $\{d,f\}$.

3-3 Calcular todas las particiones de $X = \{1,2\}$.

3-4 Calcular todas las particiones de $X = \{1,2,3\}$.

3-5 Calcular cuántas particiones se pueden hacer en un conjunto de cuatro elementos.

1.3. Soluciones

3-2 Una 4-partición (partición en cuatro partes) de $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, con una de las partes que sea $\{d, f\}$, podría ser, por ejemplo, $\{\{d, f\}, \{a\}, \{b, c\}, \{e, g\}\}$.

3-3 Particiones de $X = \{1, 2\}$ en una parte: $\{\{1, 2\}\}$. Hay una.

Particiones de $X = \{1, 2\}$ en dos partes: $\{\{1\}, \{2\}\}$. Hay una.

El conjunto $X = \{1, 2\}$ admite, por lo tanto, dos particiones.

3-4 Hay una partición de X en una parte: $\{\{1, 2, 3\}\}$.

Hay tres particiones de X en dos partes: $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$; $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$ y $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$.

Hay una partición de X en tres partes: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

El conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ admite, pues, en total cinco particiones.

3-5 Se pueden hacer quince particiones diferentes.

1.4. Particiones ordenadas y no ordenadas

Dados un conjunto X y una partición de X en k partes X_1, X_2, ..., X_k, podemos considerar dos situaciones diferentes según sepamos distinguir, o no, estos conjuntos X_i. Utilizaremos la expresión *particiones ordenadas* para referirnos al primer caso y *particiones* para referirnos al segundo.

A partir de un grupo de ciento veinte alumnos, un ejemplo de partición consistiría en hacer tres grupos de alumnos. En cambio, si nos preguntáramos por la manera de hacer tres grupos de veinte, cuarenta y sesenta alumnos, respectivamente, estaríamos hablando de una partición ordenada.

Dado un conjunto finito X, empecemos por preguntamos cuántas particiones podemos hacer, teniendo en cuenta sólo la cantidad k de subconjuntos de la partición y no el cardinal de cada subconjunto.

Definición 3.2

Sea X un conjunto de n elementos. El número de particiones de X en k partes, no vacías, X_1, X_2, ..., X_k ($1 \leq k \leq n$) lo escribiremos como $S(n, k)$ y lo llamaremos **número de Stirling**.

Definición 3.3

Sea X un conjunto de n elementos. Designaremos por B_n al número total de particiones de X y lo llamaremos **número de Bell** de orden n.

A partir de estas dos definiciones es inmediato poder escribir lo siguiente:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

En general, no es sencillo calcular los números de Stirling y de Bell. Una de las maneras de hacerlo consistiría en resolver una ecuación recurrente (veremos las ecuaciones recurrentes en el módulo siguiente).

El número de Stirling verifica la ecuación de recurrencia:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), \qquad \text{donde} \quad 2 \leq k \leq n-1$$

con los valores iniciales $S(n,1) = 1$ y $S(n,n) = 1$, para cualquier n.

Ejemplo 3-6

Dado el conjunto $X = \{a,b,c\}$ podemos considerar las particiones en dos partes (no vacías) de X: $\big\{\{a\},\{b,c\}\big\}$, $\big\{\{b\},\{a,c\}\big\}$, $\big\{\{c\},\{a,b\}\big\}$. O sea, tenemos tres posibles particiones. Según las fórmulas anteriores: $S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2{\cdot}1 = 3$ y observamos que el resultado coincide con nuestra construcción.

Análogamente, la igualdad $S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2) = 1 + 2{\cdot}3 = 7$ nos dice que si tenemos un conjunto $X = \{a,b,c,d\}$ podremos hacer siete particiones diferentes en dos partes.

Ejercicio 3-7

Calcular por recurrencia $S(4,3)$.

Solución: $S(4,3) = S(3,2) + 3S(3,3) = 3 + 3{\cdot}1 = 6$.

Esta solución nos dice que en un conjunto de cuatro elementos hay seis particiones de tres partes cada una.

Ejercicio 3-8

Calcular el número total de particiones que admite el conjunto $X = \{a,b,c,d\}$.

Solución: Hay que calcular $B(4)$.

$B(4) = \sum_{k=1}^{4} S(4,k) = S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) + S(4,4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$

Entonces el conjunto $X = \{a,b,c,d\}$ admite un total de quince particiones, tal y como habíamos visto en el ejercicio 3-5.

2. Los números multinomiales

Los números multinomiales son una generalización de los números binomiales y, al igual que aquellos, tienen utilidad en la resolución de diversos problemas combinatorios. Así, veremos el cálculo de particiones ordenadas que no habíamos considerado en la sección anterior, el concepto de permutación con repetición, el teorema multinomial, etc.

2.1. Cálculo del número multinomial

Tal como habíamos visto en el módulo anterior, podemos interpretar el **número combinatorio** $\binom{n}{r}$ de dos maneras:

- Desde un punto de vista conjuntista, como el número de subconjuntos de r elementos que se pueden hacer en un conjunto de n elementos distinguibles.
- Desde un punto de vista de distribución, como la manera de distribuir r objetos indistinguibles en n lugares diferentes ($n \geq r$) poniendo, como máximo, un objeto en cada lugar. Claro está que el número de distribuciones posible es $\binom{n}{r}$, puesto que en cada distribución se trata de escoger un subconjunto de r lugares de los n posibles.

Ejemplo 3-9

1) La cantidad de comités distintos de tres personas (todas de la misma categoría) que se pueden hacer en un grupo de diez personas es $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$.

2) La cantidad de maneras en que se pueden distribuir tres cuchillos de cocina iguales en una maleta con diez posiciones vacías para cuchillos también es

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120.$$

Se puede generalizar esta última idea de número combinatorio: supongamos que tenemos diez lugares donde se puedan colocar objetos y, también, diez objetos, de los cuales hay cuatro de idénticos, tres más de idénticos entre sí pero diferentes de los primeros y, finalmente, tres más, también idénticos entre sí. El problema a resolver consiste en colocar estos diez objetos en los diez lugares, de todas las maneras posibles.

Ejemplo 3-10

Tenemos diez cuchillos de cocina y los queremos poner en la misma maleta del ejemplo anterior. De estos cuchillos hay cuatro de idénticos para cortar carne, hay tres de idénticos para el pescado y, finalmente, hay otros tres cuchillos idénticos para la pastelería.

Si los diez cuchillos fueran distintos los podríamos poner en la maleta de $P(10) = 10!$ maneras, pero el hecho que haya tres grupos diferentes de cuchillos idénticos hace que nos tengamos que replantear el cálculo de otro modo.

Para empezar, de los diez lugares de la maleta seleccionaremos cuatro (para poner los cuchillos de carne). Esto lo podemos hacer de $\binom{10}{4}$ maneras distintas. Una vez hemos fijado una de estas maneras de colocar los cuchillos de la carne, seleccionaremos tres de los seis sitios que todavía tenemos vacíos para poder poner los cuchillos del pescado. Esto lo podremos hacer de $\binom{6}{3}$ maneras. Después, sólo tendremos que colocar los cuchillos de pastelería en las tres posiciones que todavía nos quedan vacías en la maleta.

Observemos que, en total, podremos guardar los cuchillos en la maleta de tantas maneras como se indica a continuación:

$$\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} = 210 \cdot 20 = 4200.$$

Consideremos, ahora, el problema de manera genérica. Supongamos que tenemos n lugares donde se pueden colocar objetos y supongamos que también disponemos de n objetos, de los cuales hay n_1 de iguales del tipo 1, n_2 de iguales del tipo 2, ... y n_k de iguales del tipo k (es decir, el conjunto de objetos tiene k tipos diferentes de elementos y $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$). El problema a resolver consiste en colocar estos n objetos en los n lugares, de todas las maneras posibles.

El número de distribuciones ordenadas de estos n objetos se puede calcular de este modo: los n_1 objetos del primer tipo se pueden colocar en los n lugares (en cada lugar sólo podemos poner un único objeto) de $\binom{n}{n_1}$ maneras. Los n_2 objetos del segundo tipo se pueden colocar, en los $n - n_1$ lugares que quedan libres, de $\binom{n-n_1}{n_2}$ maneras, etc. Procederemos de este modo hasta que se nos acaben los objetos.

Escribiremos $\binom{n}{n_1,\, n_2,\, \ldots, n_k}$ para designar el número total de maneras de colocar estos objetos en los n lugares. Su valor es:

$$\binom{n}{n_1,\, n_2,\, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

Definición 3.4

Consideremos los números enteros positivos $n, n_1, n_2, \ldots, n_k$, de manera que $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Entonces, llamaremos **número multinomial** al valor

$$\binom{n}{n_1,\, n_2,\, \ldots, n_k}.$$

Proposición 3.5

Consideremos los números enteros positivos $n, n_1, n_2, \ldots, n_k$, de manera que $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. El número multinomial se puede calcular de la manera siguiente:

$$\binom{n}{n_1,\, n_2,\, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}.$$

Ejercicio 3-11

Comprobar el resultado anterior en el caso $k = 3$, o sea, comprobar que:

$$\binom{n}{n_1,\, n_2, n_3} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! n_3!}.$$

Solución: Tengamos en cuenta que $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

$$\binom{n}{n_1,\, n_2,\, n_3} = \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} =$$

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}.$$

2.2. Particiones ordenadas y distribuciones

Igual que hemos hecho con el número binomial, podemos interpretar el número multinomial de dos maneras alternativas:

- Desde un punto de vista del cálculo de distribuciones, la interpretación del número multinomial es la que hemos utilizado en su definición.
- Desde un punto de vista conjuntista: si X es un conjunto de n elementos distintos, podemos interpretar el número multinomial como el número de particiones ordenadas de X en subconjuntos distinguibles, $X_1, X_2, \ldots X_k$, de manera que cada X_i tenga n_i elementos (observemos que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$).

En efecto, podemos ver cada uno de los subconjuntos X_i como si tuviera un color distintos de los demás. Para esto, supongamos que tomamos k botes de pintura de colores diferentes y pintamos n_1 rótulos del primer color, n_2 rótulos del segundo, etc. Entonces colocamos los n elementos de X alineados, uno junto a otro, y observamos que hacer particiones ordenadas de X en k conjuntos disjuntos X_i (de manera que cada X_i tenga exactamente n_i elementos) equivale a colocar, de todas las maneras posibles, los n rótulos que hemos construido en los n sitios alineados.

El número de estas particiones ordenadas no es más que el número multinomial

$$\binom{n}{n_1,\, n_2,\, \ldots, n_k}$$

Nota: tal como hemos resuelto el problema estábamos suponiendo que los k colores eran distintos, pero se podría dar el caso en que algún color fuera igual que otro. Entonces la solución al problema es, básicamente, la misma, pero tendríamos que dividir el resultado por $s!$, donde s representa la cantidad de conjuntos que tienen el mismo cardinal (o sea el número de botes de pintura del mismo color). Los dos últimos ejemplos de la serie que viene a continuación realzan esta diferencia.

Ejemplo 3-12

En un grupo de catorce personas se quieren hacer tres grupos de tres, cuatro y siete personas cada uno. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

La solución consiste en considerar el conjunto X de las catorce personas y contar las particiones ordenadas que se pueden hacer en tres subconjuntos X_1, X_2, X_3 de tres, cuatro y siete personas, respectivamente. El resultado es, pues,

$$\binom{14}{3,\, 4,\, 7} = \frac{14!}{3!\, 4!\, 7!} = 120120.$$

Ejemplo 3-13

Las maneras en que se pueden distribuir cinco objetos distinguibles en tres cajas distintas poniendo dos objetos en la primera y segunda cajas y un objeto en la tercera caja son $\binom{5}{2, 2, 1}$.

Podemos pensar el problema como si tuviéramos tres rótulos, uno para cada caja. Entonces tenemos que asignar rótulos a cada uno de los cinco objetos de manera que utilicemos, exactamente, dos veces los rótulos 1 y 2 y una vez el rótulo 3. La respuesta al problema viene expresada por la cantidad de distribuciones ordenadas de tres rótulos, donde el primero y segundo se toman dos veces y el tercero se toma una sola vez.

Ejemplo 3-14

Las maneras en que se pueden distribuir cinco objetos distinguibles en tres cajas numeradas si queremos que en la segunda caja haya un sólo objeto son

$$\binom{5}{4,1,0}+\binom{5}{3,1,1}+\binom{5}{2,1,2}+\binom{5}{1,1,3}+\binom{5}{0,1,4}=$$

$$=\frac{5!}{4!1!0!}+\frac{5!}{3!1!1!}+\frac{5!}{2!1!2!}+\frac{5!}{1!1!3!}+\frac{5!}{0!1!4!}=80.$$

Básicamente, hemos utilizado el número multinomial para calcular la cantidad de maneras de distribuir objetos en cajas distinguibles. En el supuesto de que las cajas fueran indistinguibles, también se puede utilizar el número multinomial como veremos a continuación en los ejercicios siguientes.

Ejercicio 3-15

Calcular el número de maneras de colocar cuarenta y tres estudiantes en siete dormitorios distintos, de manera que los dos primeros tengan cinco estudiantes cada uno, los tres siguientes tengan seis estudiantes cada uno, el sexto tenga siete estudiantes y, el último, ocho.

Solución: Podemos pensar el problema como si tuviéramos siete rótulos, uno para cada dormitorio: el rótulo 1, el rótulo 2, etc. Entonces, nuestro cometido consiste en asignar rótulos a cada uno de los cuarenta y tres estudiantes, de manera que utilicemos, exactamente, cinco veces el rótulo 1 y el 2; seis veces el rótulo 3, 4 y 5; siete veces el rótulo 6 y ocho veces el rótulo 7. La respuesta viene dada por la cantidad de distribuciones ordenadas de siete rótulos donde el primero y segundo se toman cinco veces, el tercero, cuarto y quinto se toman seis veces, el sexto se toma siete veces y el séptimo se toma ocho veces. O sea

$$\binom{43}{5,5,6,6,6,7,8}=\frac{43!}{5!\,5!\,6!\,6!\,6!\,7!\,8!}.$$

Ejercicio 3-16

Calcular el número de maneras de dividir cuarenta y tres estudiantes en siete grupos, de forma que dos grupos tengan cinco estudiantes cada uno, tres grupos tengan seis estudiantes cada uno, un grupo tenga siete estudiantes y un grupo, ocho estudiantes.

Solución: Ahora la respuesta es:

$$\frac{1}{2!\,3!\,1!\,1!}\binom{43}{5,5,6,6,6,7,8}=\frac{43!}{2!\,3!\,5!\,5!\,6!\,6!\,6!\,7!\,8!}.$$

Observemos la diferencia con el ejercicio anterior. Antes teníamos siete dormitorios diferentes y ahora tenemos siete grupos (que no son distinguibles). Por ejemplo, al hacer un grupo con cinco estudiantes no nos importa si este es el grupo 1 o el grupo 2. En cambio, en el ejercicio anterior, no consideramos que sea lo mismo que haya cinco estudiantes en el primer dormitorio o que estos mismos estudiantes estén en el segundo dormitorio, puesto que los dormitorios son distinguibles.

2.3. Reordenaciones

Ya hemos visto que el número multinomial admite interpretaciones que nos permiten contar distribuciones y particiones ordenadas. A continuación vamos a ver un ejercicio de reordenaciones donde, también, utilizamos el número multinomial.

A partir de la palabra *INTERNET*, que tiene ocho letras (es de longitud 8), vamos a interpretar cada reordenación como una permutación con repetición de cinco letras (*I,N,T,E,R*) en la que se toma la primera letra una vez, la segunda dos veces, la tercera dos veces, la cuarta dos veces y la quinta una sola vez. Por lo tanto, el número de reordenaciones de la palabra *INTERNET* es:

$$\binom{8}{1,2,2,2,1} = \frac{8!}{1!2!2!2!1!} = 5040.$$

El concepto de reordenación es sinónimo del de permutación, y a menudo hablaremos de permutación con repetición. $PR(n, n_1, n_2, n_3, \cdots n_k)$ será el símbolo que utilizaremos para indicar el número de permutaciones con repetición que se pueden hacer con n elementos, de los cuales hay n_1 de iguales entre sí, n_2 de iguales entre sí, etc.

Cálculo

La cantidad de permutaciones con repetición se calcula con el número multinomial

$$PR(n, n_1, n_2, n_3, \cdots n_k) =$$

$$= \binom{n}{n_1, n_2, \cdots n_k}.$$

Ejemplo 3-17

La cantidad de reordenaciones de la palabra *INTERNET* que empiezan por *IN* es $\binom{6}{1,2,2,1} = \frac{6!}{1!2!2!1!} = 180.$

Ejemplo 3-18

Queremos ordenar protocolàriamente, de todas las maneras posibles, tres banderas catalanas, cuatro banderas españolas y siete banderas nepalíes. Observemos que el problema es equivalente a reordenar, de todas las maneras posibles, las catorce banderas, entendiendo que hay el grupo de las catalanas que son idénticas entre sí, el grupo de las españolas que también lo son entre sí y, asimismo, el grupo de las nepalíes.

La solución es, pues, $\binom{14}{3,\ 4,\ 7} = \frac{14!}{3!\,4!\,7!} = 120120.$

2.4. El teorema multinomial

El teorema del binomio da el desarrollo de la potencia n-ésima de un binomio $(a+b)$. Este teorema nos asegura lo siguiente:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{y}a^{n-y}b^y + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

El teorema multinomial generaliza este concepto para el caso en que el número de términos sea más grande que dos. Así, lo que nos interesa es calcular la potencia n-ésima de $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$. En el desarrollo de esta potencia aparecen los números de la forma

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k}$$

como coeficientes numéricos de cada término. Así queda justificado el adjetivo *multinomial* que hemos dado a este tipo de números.

Proposición 3.6

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

Antes de demostrar esta fórmula, veamos unos ejemplos.

Ejemplo 3-19

El desarrollo de la potencia $(x + y + z)^2$ se expresa, tomando $n = 2$ y $k = 3$ en la proposición anterior, como:

$$(x+y+z)^2 = \sum_{a+b+c=2} \binom{2}{a, b, c} x^a y^b z^c =$$

$$= \binom{2}{2,0,0} x^2 + \binom{2}{0,2,0} y^2 + \binom{2}{0,0,2} z^2 + \binom{2}{1,1,0} xy + \binom{2}{1,0,1} xz + \binom{2}{0,1,1} yz$$

Observemos que este desarrollo tiene seis términos en total y que el cálculo de este total ya lo habíamos desarrollado en el módulo anterior. El número total de términos se determina por el número de combinaciones con repetición de k elementos tomados de n en n (en nuestro ejemplo, 2-muestras no ordenadas con repetición a partir de tres objetos), o sea,

$$CR(k,n) = \binom{k+n-1}{n} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Ejemplo 3-20

El desarrollo de la potencia $(x + y + z)^4$ se expresa, tomando $n = 4$ y $k = 3$ en la proposición anterior, como:

$$(x+y+z)^4 = \sum_{a+b+c=4} \binom{4}{a, b, c} x^a y^b z^c = \binom{4}{4,0,0} x^4 + \binom{4}{0,4,0} y^4 +$$

$$+ \binom{4}{0,0,4} z^4 + \binom{4}{3,1,0} x^3 y + \binom{4}{1,3,0} xy^3 + \cdots + \binom{4}{2,1,1} x^2 yz$$

Observemos que este desarrollo tiene quince términos en total:

$$CR(k,n) = \binom{k+n-1}{n} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15.$$

Ejemplo 3-21

El coeficiente de x^2yz^3t en el desarrollo de $(x+y+z+t)^7$ es

$$\binom{7}{2,1,3,1} = \frac{7!}{2!1!3!1!} = 420.$$

Veamos ahora la demostración de la fórmula multinomial de la proposición 3.6.

Demostración: Los argumentos que utilizaremos son los mismos que ya habíamos usado para el caso del teorema del binomio ($k = 2$).

Consideremos $(x_1+\cdots+x_k)^n = \underbrace{(x_1+\cdots+x_k)(x_1+\cdots+x_k)\cdots(x_1+\cdots+x_k)}_{n}$. si desarrollamos el producto de los n paréntesis se obtiene una expresión de términos cada uno de los cuales es un producto donde hay n_1 veces x_1, n_2 veces x_2, $\cdots$, n_k veces x_k, con $n_1+\cdots+n_k = n$. Hay que observar que el valor n_i puede ser 0; esto querrá decir que x_i no ha sido escogido en ninguno de los paréntesis. Así, pues, los términos tienen la forma $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ con $n_1+\cdots+n_k = n$.

Por otro lado, el término $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ se presenta tantas veces como $\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k}$, que es el número de maneras de escoger n_1 veces x_1, n_2 veces x_2, $\cdots$, n_k veces x_k cuando hacemos la multiplicación inicial. De todo lo anterior se deduce

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k},$$

que es la expresión que queríamos demostrar. ∎

Ejemplo 3-22

Calcularemos el coeficiente de $a^3b^2c^2$ en el desarrollo de $(a+b+c)^7$ y, también, el número de términos que tiene este desarrollo.

El coeficiente de $a^3b^2c^2$ es $\binom{7}{3,\,2,\,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$ y el número de términos que hay en el desarrollo de $(a+b+c)^7$ viene expresado por el número de combinaciones con repetición de tres elementos tomados de siete en siete (7-muestras no ordenadas con repetición a partir de tres objetos), o sea, $CR(3,7) = \binom{3+7-1}{7} = \frac{9!}{2!\,7!} = 36$.

2.5. Ejercicios

3-23 ¿De cuántas maneras podemos distribuir los objetos a, b, c, d en tres cajas numeradas? Hay que hacer la distribución de tal modo que en cada caja haya por lo menos un objeto.

3-24 ¿Cuántos números diferentes podemos formar al escribir los once dígitos 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4 en un orden determinado?

3-25 ¿Cuál es el número total de palabras diferentes que se pueden formar con todas las letras de la palabra `TALLAFERRO`? ¿Cuantas de estas no tienen dos `A` juntas?

3-26 Queremos construir números de diez cifras utilizando los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. ¿Cuántos números podemos construir de manera que tengan, exactamente, el dígito 5 tres veces; el dígito 7, dos veces y el dígito 1, una vez?

3-27 Entre todos los periódicos que compramos el pasado domingo nos han regalado siete DVD distintos que, a la vez, regalaremos a Óscar, Roger y Laia. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer de manera que a Laia le toque, exactamente, un DVD?

2.6. Soluciones

3-23 Al ser las cajas numeradas asumiremos que son distinguibles. El número de distribuciones que vamos a tener que calcular coincide con el número de permutaciones con repetición donde la primera caja se toma una vez, la segunda, una vez y la tercera, dos veces; o bien la primera caja se toma una vez, la segunda dos veces y la tercera una vez o bien la primera caja se toma dos veces, la segunda una vez y la tercera, una vez. Por lo tanto, la solución será

$$3\binom{4}{1,1,2} = 3\frac{4!}{1!1!2!} = 36.$$

3-24 Se trata de calcular el número de reordenaciones que se pueden hacer con los dígitos dados, es decir,

$$PR(11,2,4,2,3) = \frac{11!}{2!4!2!3!} = 69300.$$

3-25 Hay $\binom{10}{2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1}$ maneras de construir palabras diferentes con las letras de la palabra `TALLAFERRO`:

$$\binom{10}{2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1} = \frac{10!}{2!2!2!1!1!1!1!} = 453600.$$

Si no tenemos en cuenta las `A`, conseguiremos $\binom{8}{2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1} = \frac{8!}{2!2!1!1!1!1!} = 10080$ maneras de formar palabras de ocho letras sin las `A`. Si queremos que las `A` no estén juntas tendremos que intercalar entre ellas algunas de las otras letras. O, al revés, podemos empezar fijando las otras ocho letras y, entonces, colocaremos las `A` en la primera posición, o en alguna de las siete posiciones intermedias o en la última posición. O sea que vamos a poder utilizar nueve posibles lugares para colocarlas. En total habrá $\binom{9}{2} = 36$ maneras de seleccionar dos posiciones de entre estas nueve posibles.

Por la regla de la multiplicación, tendremos $10080 \cdot 36 = 362880$ maneras de formar palabras sin dos `A` juntas.

3-26 Primero escogemos las seis posiciones donde colocar las cifras $5, 5, 5, 7, 7, 1$. Esto lo podemos hacer de $C(10, 6) = \binom{10}{6}$ maneras. En estas posiciones, podemos colocar las cifras anteriores de tantas maneras como $\binom{6}{3,\ 2,\ 1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!}$. Para las cuatro posiciones restantes hay $VR(6, 4) = 6^4$ 4-muestras ordenadas con repetición utilizando las seis cifras $2, 3, 4, 6, 8, 9$.

Por lo tanto, hay exactamente $\binom{10}{6}\frac{6!}{3!\,2!\,1!}6^4 = 12600 \cdot 6^4 = 16329600$ números que reúnen las condiciones del enunciado.

3-27 El problema es equivalente a distribuir siete objetos diferentes (los DVD) en tres cajas distintas (Óscar, Roger y Laia) de manera que en la tercera caja haya exactamente un objeto.

La respuesta viene dada por:

$$\binom{7}{6,0,1}+\binom{7}{5,1,1}+\binom{7}{4,2,1}+\binom{7}{3,3,1}+\binom{7}{2,4,1}+\binom{7}{1,5,1}+\binom{7}{0,6,1}=$$

$$=7+42+105+140+105+42+7=448.$$

También podíamos haber pensado el problema de otro modo: consideramos que empezamos dando a Laia un DVD. Esto lo podemos hacer de siete maneras diferentes. Nos sobran seis DVD que tenemos que repartir de todas las maneras posibles entre Óscar y Roger. A Óscar le damos un subconjunto cualquiera de este conjunto formado por los seis DVD y a Roger la damos el resto. La cantidad de subconjuntos de un conjunto de seis elementos es 2^6.

Por la regla de la multiplicación, el resultado del problema será: $7 \cdot 2^6 = 448$.

3. Tipos de distribuciones de objetos

Hemos tratado el problema de la distribución de objetos en diversos lugares de este módulo y, también, en módulos anteriores. Ahora presentaremos un problema con mucha casuística, con el fin de ver qué herramientas son necesarias para resolverlo en cada uno de sus casos.

Hay que pegar quince adhesivos en tres motos y queremos calcular de cuántas maneras se puede hacer en los supuestos siguientes:

1) El número de adhesivos a cada moto no es fijo ni hay ninguna restricción.

	adhesivos distinguibles	adhesivos no distinguibles
motos distinguibles	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$
motos no distinguibles	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$

2) El número de adhesivos en cada moto no es fijo, pero en cada moto hay que colocar, como mínimo, un adhesivo.

	adhesivos distinguibles	adhesivos no distinguibles
motos distinguibles	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$
motos no distinguibles	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$

3) El número de adhesivos en una moto es cinco, en otra siete, y en la última, tres.

	adhesivos distinguibles	adhesivos no distinguibles
motos distinguibles	$\boxed{9}$	$\boxed{11}$
motos no distinguibles	$\boxed{10}$	$\boxed{12}$

4) El número de adhesivos en cada moto no es fijo, pero en la primera moto tiene que haber entre cinco y nueve adhesivos, en la segunda, entre tres y cinco y, en la última, menos de cuatro.

	adhesivos distinguibles	adhesivos no distinguibles
motos distinguibles	$\boxed{13}$	$\boxed{15}$
motos no distinguibles	$\boxed{14}$	$\boxed{16}$

La dificultad para resolver los distintos apartados no es la misma. Hay apartados donde, usando las técnicas que ya conocemos, la solución será fácil de encontrar; hay apartados que resolveremos aplicando la técnica de las funciones generadoras y hay otros que dejaremos sin resolver de una manera eficiente. Según los adhesivos y/o las motos sean distinguibles o no lo sean estaremos ante un problema de distribuciones o particiones o, incluso, en algún caso, nos faltarán recursos para diagnosticarlo.

Llamemos A al conjunto de los quince adhesivos y B al conjunto formado por las tres motos.

El caso $\boxed{1}$ es sencillo. Notemos, en primer lugar, que hay quince tipos de objetos distintos. Cada posibilidad consiste en una 15-muestra ordenada con repetición de elementos de B. En total, pues, habrá tantas posibilidades como variaciones con repetición de tres elementos tomados de quince en quince, o sea $VR(3, 15) = 3^{15}$.

Recordar

Una r-muestra ordenada con repetición de un conjunto de n elementos también se llama **variación con repetición de n elementos, tomados de r en r**, y la cantidad de r-muestras que podemos hacer es:

$$VR(n, r) = n^r.$$

El caso $\boxed{2}$, en cambio, no es nada fácil. Lo que nos piden equivale a preguntar por la cantidad de maneras de hacer una partición en el conjunto A en tres clases disjuntas, o en dos clases, o en una sola clase, o sea: $\sum_{i=1}^{3} S(15, i)$, donde $S(15, i)$ significa el número de Stirling que hemos visto en la definición 3.2.

El caso $\boxed{3}$ vuelve a ser fácil de calcular utilizando las herramientas de la combinatoria elemental. Si los adhesivos son indistinguibles y las motos son distinguibles, el resultado será la cantidad de soluciones en números enteros, no negativos, de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 15$. Obsérvese que este problema ya había sido resuelto en el módulo anterior y que su solución venía dada por $CR(3, 15) = \binom{17}{15}$.

Recordar

Una r-muestra no ordenada sin repetición de un conjunto de n elementos también se llama **combinación de n elementos, tomados de r en r**, y la cantidad de r-muestras que podemos hacer es:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Este ítem del problema es equivalente a colocar quince objetos iguales en tres cajas distintas. También podemos considerar la solución estudiando las distintas maneras de escribir tiras de quince signos $\oplus$ y dos signos $|$. Por ejemplo, una manera de escribirlos sería:

$$\oplus | \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus | \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus$$

Los signos $\oplus$ representan los objetos que queremos colocar en las cajas y los signos $|$ las separaciones entre las cajas. En el diagrama anterior hemos colocado un objeto en la primera caja, ocho en la segunda y seis en la tercera. Observemos que, en general, tenemos diecisiete lugares en los cuales tenemos que colocar quince signos $\oplus$ y dos signos $|$. Esto lo podemos hacer eligiendo dos lugares de entre los diecisiete de todas las maneras posibles y, allí, escribir el signo $|$. El resultado será $C(17, 2) = \binom{17}{2}$ (observar que este resultado es equivalente al valor $CR(3, 15)$ calculado anteriormente).

Recordar

Una r-muestra no ordenada con repetición de un conjunto de n elementos también se llama **combinación con repetición de n elementos, tomados de r en r**, y la cantidad de r-muestras que podemos hacer es:

$$CR(n, r) = \binom{n + r - 1}{r}.$$

El caso $\boxed{4}$ se puede ver como una variante del anterior. Tendríamos que calcular la cantidad de soluciones en números enteros, no negativos, de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, de manera que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Una manera de resolver el problema sería considerando unos nuevos valores enteros, no negativos, a, b, y escribir las antiguas variables, x_1, x_2, x_3 en función de x_1, a, b. Así: $x_2 = x_1 + a$; $x_3 = x_2 + b = x_1 + a + b$. Entonces, sustituyendo estos valores en la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, el problema a resolver se transforma en encontrar la cantidad de soluciones enteras, no negativas, de $x_1 + (x_1 + a) + (x_1 + a + b) = 15$ o, equivalentemente, de $3x_1 + 2a + b = 15$ de manera que todas las variables x_1, a, b sean enteras, no negativas. Este cálculo lo haremos con la ayuda de las funciones generadoras.

En el apartado segundo del problema hay una restricción sobre la manera de colocar los adhesivos en las motos y es que tiene que haber, como mínimo, un adhesivo en cada moto.

El caso $\boxed{5}$ lo podríamos resolver utilizando el cálculo de la cantidad de funciones exhaustivas entre dos conjuntos que hemos estudiado en el módulo anterior. Se trataría de contar el número de aplicaciones exhaustivas $f : A \to B$. La condición que la aplicación sea exhaustiva viene determinada por el hecho de que, como mínimo, tiene que haber un adhesivo en cada moto.

En el caso $\boxed{6}$ las motos son indistinguibles. Cada partición del conjunto de adhesivos A en tres partes (no vacías) nos da una solución al problema. Finalmente, lo que nos piden es el número de Stirling $S(15, 3)$ (ver la definición 3.2).

El caso $\boxed{7}$ es como el $\boxed{3}$, sólo que ahora vamos a añadir la condición que en cada moto haya, como mínimo, un adhesivo. El resultado será la cantidad de soluciones en números enteros, positivos, de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 15$. Este tipo de cálculo ya lo hemos estudiado en el módulo anterior y sabemos que da $\binom{15-1}{3-1}$.

El caso $\boxed{8}$ es muy parecido al caso $\boxed{4}$. Tendríamos que calcular la cantidad de soluciones en números enteros, positivos, de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, de manera que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Igual que hemos comentado en el caso $\boxed{4}$, su solución la podremos encontrar usando la técnica de las funciones generadoras.

Finalmente, los últimos apartados.

Los casos $\boxed{9}$ y $\boxed{10}$ son equivalentes a preguntarnos cuántas particiones podemos hacer en un conjunto de quince elementos en clases disjuntas de siete, cinco y tres elementos cada una. Es un problema de distribuciones como los que que hemos resuelto en la página 12, sección 2.2. Los quince adhesivos siempre son distinguibles, pero, en el caso $\boxed{9}$ las motos son distinguibles y en el caso $\boxed{10}$ no lo son.

En el caso $\boxed{10}$ las motos son indistinguibles; por ello si miramos, por ejemplo, la distribución

$$\underbrace{1,2,3,4,5}_{\text{moto 1}} - \underbrace{6,7,8,9,10,11,12}_{\text{moto 2}} - \underbrace{13,14,15}_{\text{moto 3}}$$

y

$$\underbrace{6,7,8,9,10,11,12}_{\text{moto 1}} - \underbrace{1,2,3,4,5}_{\text{moto 2}} - \underbrace{13,14,15}_{\text{moto 3}}$$

nos damos cuenta que es la misma distribución, puesto que no sabemos distinguir entre la primera y la segunda moto. El problema, en el caso $\boxed{10}$, consiste en calcular las permutaciones con repetición de tres elementos (las motos) en que la primera se toma siete veces, la segunda, cinco y la tercera, tres. O sea, el número multinomial $\binom{15}{5,\ 7,\ 3} = \dfrac{15!}{5!\,7!\,3!}$.

En cambio, en el caso $\boxed{9}$, podamos empezar actuando igual que en el caso $\boxed{10}$ pero, al final, tendremos que considerar más distribuciones, puesto que, por ejemplo, las distribuciones

$$\underbrace{1,2,3,4,5}_{\text{moto 1}} - \underbrace{6,7,8,9,10,11,12}_{\text{moto 2}} - \underbrace{13,14,15}_{\text{moto 3}}$$

y

$$\underbrace{6,7,8,9,10,11,12}_{\text{moto 1}} - \underbrace{1,2,3,4,5}_{\text{moto 2}} - \underbrace{13,14,15}_{\text{moto 3}}$$

son diferentes, ya que sabemos distinguir entre las motos. Por cada una de las distribuciones calculadas en el caso $\boxed{10}$ podemos reordenar las motos de 3! maneras. Así, el resultado será $3! \cdot \dfrac{15!}{5!\,7!\,3!}$.

El caso $\boxed{11}$ da como resultado $P(3) = 3!$ y el caso $\boxed{12}$ da 1.

El último apartado del problema, por el momento, es mejor dejarlo. Volveremos a él cuando hayamos estudiado las funciones generadoras.

Hay dos tipos de funciones generadoras, las ordinarias que veremos a continuación y nos servirán para resolver los casos $\boxed{4}$, $\boxed{8}$, $\boxed{15}$ y $\boxed{16}$, y las funciones generadoras exponenciales, que no estudiaremos en éste módulo, y que nos ayudarían a resolver los casos $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{13}$ y $\boxed{14}$.

4. La técnica de las funciones generadoras

La técnica de las funciones generadoras es importante en el campo de la combinatoria. Nos servirá para resolver algunos tipos de problemas de distribuciones. Hasta ahora, los problemas de distribuciones que hemos aprendido a resolver consistían en colocar objetos (a veces distinguibles y a veces indistinguibles) en cajas (que podían ser distinguibles o no). Ahora, en este capítulo, veremos una técnica que permite resolver ciertos problemas de distribuciones cuando los objetos que queremos distribuir están sometidos a algunas restricciones. En nuestro enfoque nos limitaremos a las funciones generadoras ordinarias, utilizadas cuando los objetos que queremos distribuir son indistinguibles y no veremos, en este capítulo, la técnica de las funciones generadoras exponenciales más propia en los casos en que los objetos a distribuir son distinguibles.

4.1. Funciones generadoras ordinarias

Definición 3.7

Sea $g_0, g_1, g_2, \cdots, g_r, \ldots$ una secuencia de números reales. La **función generadora (ordinaria)** asociada a los g_i viene expresada por

$$g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_r x^r + \ldots \tag{4.1}$$

Ejemplo 3-28

Sea $1, -2, 3, -8, 0, 0, \ldots$ una secuencia de números. La función generadora asociada a esta secuencia es el polinomio:

$$g(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 8x^3.$$

Ejemplo 3-29

Sea $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$, una secuencia infinita de números. La función generadora viene expresada, en este caso, por la serie de potencias:

$$g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$$

Así, una función generadora se expresa como una serie de potencias o bien como un polinomio, si hay un número finito de elementos en la secuencia. Hay que ver una función generadora, no como una función que da un resultado $g(x)$ para cada valor de x, sino como una representación de los coeficientes donde el significado de cada g_i viene expresado por la potencia x^i a la que acompaña. No nos interesará una evaluación de $g(x)$, sino la interpretación que lleva asociada.

Ejemplo 3-30

Dada la secuencia $1, 2, 3, -4, -5, -6, 7, 8 \ldots$ o, equivalentemente, su función generadora asociada $g(x) = 1+2x+3x^2-4x^3-5x^4-6x^5+7x^6+8x^7+\ldots$, el coeficiente g_{10} de la potencia x^{10} es -11.

Ejemplo 3-31

Dada la función generadora $g(x) = (1+x+x^3)^2x^3$, el coeficiente g_5 del término x^5 es 1, puesto que si desarrollamos el producto indicado nos queda

$$g(x) = x^3 + 2x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + x^9.$$

A continuación veremos cómo se pueden plantear problemas de distribuciones de objetos indistinguibles en cajas a partir del cálculo del coeficiente g_i de un cierto monomio x^i en una cierta función generadora $g(x)$.

Observar

Hay problemas a los cuales se les puede asociar una función generadora. Resolver el problema será equivalente a calcular un cierto coeficiente de esta función generadora.

Ejemplo 3-32

Queremos distribuir siete bolas idénticas en dos cajas distintas. ¿De cuántas maneras se puede conseguir?

Este problema lo podemos resolver pensando que x_1 es la cantidad de bolas que vamos a poner en la primera caja y x_2 la cantidad de bolas que vamos a poner en la segunda caja. Entonces, la solución que nos piden consiste en contar la cantidad de soluciones enteras, no negativas, de la ecuación $x_1 + x_2 = 7$. El resultado (ver el capítulo dedicado a las muestras no ordenadas con repetición) ya sabemos que es $CR(2,7) = \binom{2+7-1}{7} = \binom{8}{7} = 8$.

También podríamos resolver este mismo problema asignando el polinomio

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

a la caja 1 y el polinomio

$$f_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

a la caja 2 (notemos que los dos polinomios son iguales). Los exponentes de cada término del primer polinomio se corresponden con el número de bolas que puede haber en la primera caja. El segundo polinomio tiene la misma interpretación respecto a la segunda caja.

Consideremos, ahora, la función generadora del problema:

$$g(x) = f_1(x)f_2(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)^2 =$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 8x^7 + \ldots + x^{14}.$$

Observemos que al calcular el producto $f_1(x)f_2(x)$ obtenemos el monomio x^7 diversas veces. Cada vez que obtenemos x^7 es el resultado de multiplicar x de $f_1(x)$ por x^6 de $f_2(x)$, o bien x^2 de $f_1(x)$ por x^5 de $f_2(x)$, x^3 de $f_1(x)$ por x^4 de $f_2(x)$, etc. Finalmente, el coeficiente g_7 del término x^7 del producto $g(x) = f_1(x)f_2(x)$ nos da las maneras en que podemos distribuir las siete bolas en las dos cajas. El resultado del problema es el coeficiente g_7 de x^7 en la función generadora $g(x)$.

Veamos, ahora, un ejemplo que podemos resolver utilizando la misma técnica de las funciones generadoras, pero que ya no es tan sencillo de resolver si quisiéramos hacerlo por los procedimientos de la combinatoria básica.

Ejemplo 3-33

Queremos repartir doce juegos de ordenador, iguales, entre tres niños, Joan, Marta y Pedro, siguiendo los criterios siguientes. Joan tiene que recibir cuatro, cinco o seis juegos; Marta, dos como mínimo y Pedro, cinco como máximo. ¿De cuántas maneras se puede hacer la distribución?

Consideremos de manera extensiva las distribuciones posibles

Joan	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
Marta	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6
Pedro	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0

Consideremos ahora los tres polinomios

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^4 + x^5 + x^6 \\ f_2(x) &= x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 \\ f_3(x) &= x^0 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \end{aligned}$$

y observemos que el primer polinomio va asociado a las restricciones que se han impuesto a Joan, el segundo a las que se han impuesto a Marta y el tercero, a Pedro. Notemos que los exponentes se corresponden, en cada caso, con el número de juegos que puede recibir cada niño a lo largo de las diecisiete distribuciones factibles.

Si ahora consideramos el producto de los polinomios $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)$ y nos fijamos en las formas en que el producto producirá el monomio x^{12}, nos van a aparecer casos como por ejemplo $x^6 \cdot x^3 \cdot x^3$ o bien $x^4 \cdot x^6 \cdot x^2$; tanto uno como otro nos indican una de las columnas de la tabla precedente, es decir, una distribución factible de los doce juegos de ordenador. Visto así, podemos concluir que cada distribución factible de los juegos se corresponderá, exactamente, con uno de los casos en que en el producto de los tres polinomios se obtiene el resultado x^{12}. Así, la función generadora asociada al problema es

$$g(x) = (x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

y la solución viene determinada por el coeficiente g_{12} de x^{12} que resulta del producto.

Ejemplo 3-34

Estas vacaciones tenemos previsto salir nueve noches con una única persona cada noche, y disponemos de siete amigos/amigas para que nos acompañen. Josep dispone de cuatro noches libres; Carmen, de tres; Tere, de cuatro; Miky, de dos; Jordi, de tres; Nina de cinco; y, finalmente, Paco, de cuatro. Además queremos salir, como mínimo, dos noches con Josep.

Observemos que, del mismo modo que en el ejemplo anterior, queremos distribuir las nueve noches (indistinguibles, puesto que no nos interesa el orden en que salgamos con los amigos) entre siete personas (distinguibles).

El polinomio asociado a cada amigo es:

Josep :	$x^2 + x^3 + x^4$
Carmen :	$x^0 + x^1 + x^2 + x^3$
Tere :	$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$
Miky :	$x^0 + x^1 + x^2$
Jordi :	$x^0 + x^1 + x^2 + x^3$
Nina :	$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
Paco :	$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$

Cada término x^i significa, en este problema, que saldremos i noches con aquella persona. Por esto observamos que en el polinomio asociado a Josep no hay los términos x^0 ni x^1. También observamos que el grado máximo de cada polinomio corresponde a las noches libres, como máximo, de que dispone cada amigo.

La función generadora del problema $g(x)$ será el producto de los polinomios

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5),$$
$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2,$$
$$(x^2 + x^3 + x^4),$$
$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3)^2,$$
$$(x^0 + x^1 + x^2)$$

y el número de posibilidades diferentes de salir acompañado de un amigo, corresponderá al coeficiente g_9 de x^9 en la función generadora $g(x)$.

Ejemplo 3-35

La cantidad de maneras de escoger veinticinco pastelillos de entre siete gustos diferentes si tenemos que seleccionar entre dos y seis de cada gusto la podríamos calcular siguiendo el mismo esquema utilizado en los ejemplos precedentes. La solución vendrá determinada por el coeficiente g_{25} de la función generadora:

$$g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7$$

Por lo general, utilizaremos las funciones generadoras ordinarias cuando se trate de problemas de distribuir objetos indistinguibles en cajas, pero los problemas que, de verdad, aconsejan su uso son aquellos en que hay ciertas restricciones, como hemos visto en los tres ejemplos anteriores. Esta técnica nos servirá para resolver los casos $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{15}$ y $\boxed{16}$ de la sección 3, algunos de los cuales habíamos dejado pendientes.

En el módulo anterior habíamos visto cómo calcular el número de soluciones enteras, no negativas, de una ecuación de la forma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ y, también, el número de soluciones enteras, positivas, de una ecuación de la forma $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = s$. Estos cálculos también se podrían llevar a cabo utilizando la técnica de las funciones generadoras pero, cuando es realmente aconsejable es en los casos en los que, aparte de que las variables sean números enteros no negativos o enteros positivos, haya más restricciones.

Ejemplo 3-36

El número de soluciones enteras y positivas ($x_i > 0$) de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ lo podríamos ver como el número de maneras de distribuir cinco objetos iguales entre tres individuos x_1, x_2, x_3 de manera que a cada individuo le toque, como mínimo, un objeto. Por ejemplo, la solución $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ se puede interpretar como que al individuo x_1 le hemos dado un objeto, al individuo x_2 le hemos dado un objeto y a el individuo x_3 le hemos dado los tres objetos que quedaban.

A cada individuo le podemos asociar el polinomio $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, que se ha de interpretar (leyendo los exponentes de la x) como que a este individuo le podemos dar uno o dos o tres o cuatro o cinco objetos.

La solución del problema es el coeficiente g_5 de la función generadora

$$g(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3.$$

Observemos que, también, podríamos tomar como función generadora

$$g(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^3.$$

Ejemplo 3-37

El número de soluciones enteras no negativas ($x_i \geq 0$) de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ lo podríamos ver como el número de maneras de distribuir cinco objetos iguales entre tres individuos x_1, x_2, x_3.

A diferencia del ejemplo anterior, ahora, podemos asociar el polinomio

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

a cada individuo. En el ejemplo anterior el término de grado más pequeño era x, puesto que siempre teníamos que asegurar que cada individuo recibía un objeto como mínimo.

El coeficiente g_5 de la función generadora

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3$$

es la solución al problema.

Observemos que, también, podríamos tomar como función generadora

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^3.$$

Ejemplo 3-38

El número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ tales que $1 \leq x_1 \leq 2$ y $x_2, x_3 \geq 0$ se puede calcular como el coeficiente g_5 de la función generadora

$$g(x) = (x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2.$$

Podemos pensar el problema como en los ejemplos anteriores, o sea como el cálculo del número de maneras de distribuir cinco objetos iguales entre tres individuos x_1, x_2, x_3. Observemos que la función generadora $g(x)$ es el producto de tres polinomios, uno para cada individuo. Las restricciones impuestas a la variable x_1 quieren decir que el individuo x_1 sólo puede recibir uno o dos objetos, por ello su polinomio es $(x + x^2)$ donde los exponentes de la x nos indican los objetos que puede recibir. Los otros dos individuos tienen asociado el polinomio $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$, puesto que pueden recibir desde cero hasta cinco objetos.

Observar, también, que el individuo x_1 recibirá, como mínimo, un objeto y, por lo tanto, podremos asegurar que los otros individuos no recibirán más de cuatro, o sea que el polinomio asociado a x_2 y x_3 podía haber sido $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ en lugar del que les habíamos asociado anteriormente. Así, finalmente, la función generadora habría sido:

$$g'(x) = (x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^2$$

Aunque las dos funciones generadoras $g(x)$ y $g'(x)$ no sean iguales, el coeficiente g'_5 de esta última tiene exactamente el mismo valor que el coeficiente g_5 de la primera.

4.2. Ejercicios

3-39 Utilizando las funciones generadoras, interpretar el cálculo del número de soluciones enteras de la ecuación $a + b + c = 10$, donde cada variable debe valer entre 2 y 4,

3-40 Encontrar una función generadora $g(x)$, donde el coeficiente g_r de x^r signifique el número de soluciones enteras, no negativas, de la ecuación $2a + 3b + 5c = r$.

3-41 Plantear una función generadora y determinar cuál es el término cuyo coeficiente corresponde al número de maneras de distribuir cien objetos iguales en cuatro cajas.

- Hay que tener en cuenta que las cajas son distinguibles y cada una debe contener un objeto como mínimo.
- Hay que tener en cuenta que las cajas son indistinguibles y cada una debe contener un objeto como mínimo.

4.3. Soluciones

3-39 Interpretando el problema de manera que la solución venga expresada por una función generadora, la respuesta consiste en el coeficiente g_{10} de x^{10} del desarrollo de la función generadora dada por $g(x) = (x^2 + x^3 + x^4)^3$.

3-40 Observar que podemos interpretar el problema como si quisiéramos hallar el número de soluciones enteras, no negativas de la ecuación $x_1+x_2+x_3 = r$ de manera que $x_1 = 2a$, $x_2 = 3b$ y $x_3 = 5c$.

Para construir los polinomios asociados a cada x_i observar que los posibles valores de x_1 son enteros, no negativos y, además, múltiplos de dos: así, su función generadora será $(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)$; los posibles valores de x_2 son enteros, no negativos y, además, múltiplos de tres: así, su función generadora será $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)$ y los posibles valores de x_3 son enteros, no negativos y, además, múltiplos de cinco: así, su función generadora será $(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots)$.

La respuesta al problema viene dada por la función generadora

$$g(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots).$$

3-41 En el primer caso, el número de distribuciones posibles corresponde al número de soluciones enteras y positivas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$.

El coeficiente g_{100} del término x^{100} de la función generadora siguiente nos da el número de distribuciones que pide el enunciado:

$$g(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4.$$

En el segundo caso, como los objetos y las cajas son indistinguibles, el número de distribuciones posibles corresponde al número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100,$$

con las restricciones dadas por $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$.
Si, como mínimo, hay un objeto en cada caja, entonces $0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$.

Tomemos $x_2 = x_1+a$, $x_3 = x_2+b = x_1+a+b$ y finalmente $x_4 = x_3+c = x_1+a+b+c$, con $x_1 > 0$ y $a, b, c \geq 0$. Si sustituimos x_2, x_3 y x_4 en la ecuación anterior, ésta es equivalente a

$$x_1 + (x_1 + a) + (x_1 + a + b) + (x_1 + a + b + c) = 100,$$

que podemos escribir como

$$4x_1 + 3a + 2b + c = 100,$$

donde $x_1 > 0$ y $a, b, c \geq 0$. El coeficiente g_{100} del término x^{100} de la función generadora siguiente nos da el número de distribuciones que pide el enunciado:

$$g(x) = (x^4+x^8+x^{12}+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x+x^2+\cdots).$$

Se habrá observado que en los ejemplos y ejercicios anteriores no hemos calculado explícitamente el resultado. En cada caso, hemos dicho que el resultado era el coeficiente g_i de un cierto x^i de una función generadora, pero no lo hemos calculado. Se ha hecho de esta forma puesto que este cálculo, en general, no es sencillo y la única manera que teníamos de llevarlo a cabo era desarrollar los productos indicados y escribir la función generadora de manera que sólo tuviéramos que observar el coeficiente buscado. Comprobémoslo en un ejercicio:

Ejercicio 3-42

Lanzamos tres dados diferentes (blanco, verde y rojo) y queremos saber de cuántas maneras podemos obtener una suma de trece puntos.

Solución: Se trata de calcular el coeficiente g_{13} de x^{13} en la función generadora:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\cdot(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\cdot \\ &\quad (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) = \left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^3 \end{aligned}$$

Haciendo operaciones encontramos:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{18}+3x^{17}+6x^{16}+10x^{15}+15x^{14}+21x^{13}+25x^{12}+27x^{11}+ \\ &\quad +27x^{10}+25x^9+21x^8+15x^7+10x^6+6x^5+3x^4+x^3 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $g_{13} = 21$.

A continuación, daremos algunas herramientas para calcular explícitamente estos coeficientes, sin necesidad de tener que hacer, de manera extensiva, los productos indicados.

4.4. Cálculo de los coeficientes de las funciones generadoras

Hasta ahora, hemos utilizado las funciones generadoras para obtener una solución implícita (el valor de un cierto coeficiente g_i) para los problemas combinatorios planteados. Naturalmente, en la práctica, conviene explicitar numéricamente cuál es el total de selecciones o distribuciones pedidas, o sea, no indicar solamente cuál es el coeficiente que nos da la solución a un problema, sino calcularlo. Para facilitar este proceso introduciremos, a continuación, algunas de las ecuaciones combinatorias que aparecen más a menudo en el cálculo de los coeficientes concretos de una función generadora.

Proposición 3.8

$$(1+qx^m)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (qx^m)^r.$$

Demostración: Es el caso particular del teorema del binomio donde $a = 1, b = qx^m$. ∎

Ejemplo 3-43

$(1-x^8)^4 = \sum_{r=0}^{4} \binom{4}{r} (-x^8)^r = 1 - 4x^8 + 6x^{16} - 4x^{24} + x^{32}.$

Ejemplo 3-44

En el desarrollo de $(1-3x^2)^5$ el coeficiente del término x^3 es cero y el coeficiente del término x^8 es el coeficiente de $\binom{5}{4}(-3x^2)^4$, o sea, $\binom{5}{4}(-3)^4 = 405$.

Proposición 3.9

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r.$$

Demostración: Podemos reescribir $\frac{1}{(1+x)^n}$ como $(1+x)^{-n}$. si $n \in \mathbb{N}$ el desarrollo en serie de Maclaurin de $(1+x)^{-n}$ es

$$1 + (-n)x + (-n)(-n-1)\frac{x^2}{2!} + (-n)(-n-1)(-n-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Por otro lado,

$$\frac{(-n)\cdot(-n-1)\cdot(-n-2)\cdot\ldots\cdot(-n-(r-1))}{r!}$$
$$= (-1)^r \, \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+r-1)}{r!}$$
$$= (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

por lo tanto,

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r.$$

El caso $\frac{1}{(1-x)^n}$ se deduce directamente de lo que acabamos de demostrar. Observar que el efecto del término $(-1)^r$, que va alternando los signos, queda anulado por la alternancia de signos debida al hecho que ahora tenemos $-x$ en lugar de x. ∎

En particular, son útiles las funciones generadoras:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^r + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^r x^r + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (r+1)x^r + \ldots$$

Ejemplo 3-45

Según la proposición 3.9 podemos escribir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^4} = (1-x)^{-4} &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{4+r-1}{r} x^r \\ &= \binom{3}{0} + \binom{4}{1} x + \binom{5}{2} x^2 + \binom{6}{3} x^3 + \ldots\end{aligned}$$

Ejemplo 3-46

Según la proposición 3.9 podemos escribir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^4} = (1+x)^{-4} &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{4+r-1}{r} x^r \\ &= \binom{3}{0} - \binom{4}{1} x + \binom{5}{2} x^2 - \binom{6}{3} x^3 + \ldots\end{aligned}$$

Ejemplo 3-47

El coeficiente de x^{21} en el desarrollo de $\frac{1}{(1+x)^7}$ es $(-1)^{21}\binom{7+21-1}{21} = -\binom{27}{21} = -296010.$

Proposición 3.10

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

Demostración: Por cálculo directo tenemos el siguiente resultado:

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n) = 1 - x^{n+1}$$

por lo tanto,

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n.$$

∎

Ejemplo 3-48

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9=\frac{1-x^{10}}{1-x}$$

Estas proposiciones anteriores serán utilizadas para el cálculo efectivo del valor de los coeficientes de una función generadora. Para fijar ideas vamos a detallar un caso concreto, pero su utilidad es general.

Por ejemplo, calculemos el coeficiente de x^{21} en la expresión

$$(x^3+x^4+\ldots+x^{10})^4$$

Para hacerlo, observemos que

$$(x^3+x^4+\ldots+x^{10})^4=\left(x^3(1+x+x^2+\ldots+x^7)\right)^4=x^{12}(1+x+x^2+\ldots+x^7)^4,$$

o sea que el problema se puede reducir a buscar el coeficiente de x^9 en

$$(1+x+x^2+\ldots+x^7)^4.$$

Usando la proposición 3.10 tenemos:

$$(1+x+x^2+\cdots+x^7)^4=\left(\frac{1-x^8}{1-x}\right)^4=\underbrace{(1-x)^{-4}}_{\alpha(x)}\underbrace{(1-x^8)^4}_{\beta(x)}.$$

Ahora llamemos $\alpha(x)=(1-x)^{-4}$ y $\beta(x)=(1-x^8)^4$.

Recordar que nuestro interés es calcular el coeficiente de x^9 en el polinomio producto $\alpha(x)\beta(x)$. Este coeficiente provendrá de multiplicar elementos de $\alpha(x)$ de grado 0 por elementos de $\beta(x)$ de grado 9, o de grado 1 por elementos de $\beta(x)$ de grado 8, o de grados 2 y 7 respectivamente; o de grados 3 y 6, etc. Llamaremos α_j al coeficiente del término de grado j en el desarrollo de $\alpha(x)$ y, del mismo modo, β_i será el coeficiente del término de grado i en el desarrollo de $\beta(x)$. Así, la búsqueda del coeficiente de x^9 en $\alpha(x)\beta(x)$ se reduce a considerar todos los productos $\alpha_j\beta_i$, con $0\leq j\leq 9$, $0\leq i\leq 9$ y $j+i=9$.

Según la proposición 3.9, los coeficientes del polinomio $\alpha(x)=\dfrac{1}{(1-x)^4}$ se pueden calcular como $\alpha_j=\dbinom{4+j-1}{j}$.

Según la proposición 3.8, podemos escribir

$$\beta(x)=(1-x^8)^4=\binom{4}{0}-\binom{4}{1}x^8+\binom{4}{2}x^{16}-\binom{4}{3}x^{24}+\binom{4}{4}x^{32}$$

Los coeficientes β_i, del polinomio $\beta(x)=(1-x^8)^4$, son nulos a excepción de

$$\beta_0 = \binom{4}{0},\ \beta_8 = -\binom{4}{1},\ \beta_{16} = \binom{4}{2},\ \beta_{24} = -\binom{4}{3} \text{ y } \beta_{32} = \binom{4}{4}.$$

Así, el coeficiente de x^9 que estamos buscando, es:

$$\alpha_9\beta_0 + \alpha_1\beta_8 =$$

$$= \binom{4+9-1}{9} \cdot \binom{4}{0} - \binom{4+1-1}{1} \cdot \binom{4}{1} = \binom{12}{9} - \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 204.$$

4.5. Ejercicios

3-49 Calcular el coeficiente de x^{16} de $(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^5$.

3-50 Resolver el ejemplo 3-35 de la selección de pastelillos. Recordar que hace falta determinar el coeficiente g_{25} de la función generadora $g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7$.

4.6. Soluciones

3-49 Observar los cálculos siguientes:

$$\begin{aligned}(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^5 &= (x^2(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots))^5 \\ &= \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^5 = x^{10}\ \underbrace{\frac{1}{(1-x)^5}}_{\alpha(x)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, sólo nos hace falta determinar el coeficiente de x^6 en $\alpha(x) = (1-x)^{-5}$ y, por la proposición 3.9, sabemos que vale $\binom{5+6-1}{6} = \binom{10}{6} = 210.$

3-50 Empecemos simplificando $g(x)$.

$g(x) = (x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^7 = (x^2)^7(1+x+x^2+x^3+x^4)^7 = x^{14}(1+x+x^2+x^3+x^4)^7.$

Por lo tanto, calcular el coeficiente de x^{25} en $g(x)$ es lo mismo que calcular el coeficiente de x^{11}, pero ahora en la función generadora $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7$.

Vamos a utilizar la proposición 3.10 (sustituimos en aquella proposición el parámetro n por 4) y podremos escribir $f(x)$ de la manera siguiente:

$$f(x) = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^7 = \underbrace{(1-x)^{-7}}_{\alpha(x)}\underbrace{(1-x^5)^7}_{\beta(x)}$$

Sea $\beta(x)$ el polinomio $(1-x^5)^7$ y consideremos la proposición 3.8, que nos permitirá escribir el desarrollo de $\beta(x)$:

$$\beta(x) = 1 - \binom{7}{1}x^5 + \binom{7}{2}x^{10} - \binom{7}{3}x^{15} + \cdots (-1)^y\binom{7}{y}x^{5y} + \cdots$$

Llamemos β_i al coeficiente de x^i en este desarrollo, o sea, $\beta_0 = 1$; $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$; $\beta_3 = 0$; $\beta_4 = 0$; $\beta_5 = -7$; $\beta_6 = 0$; ...

Sea $\alpha(x)$ el polinomio $\alpha(x) = (1-x)^{-7} = \dfrac{1}{(1-x)^7}$ y utilicemos la proposición 3.9 para escribir el desarrollo:

$$\alpha(x) = (1-x)^{-7} = 1 + \binom{7+1-1}{1}x + \binom{7+2-1}{2}x^2 + \ldots + \binom{7+y-1}{y}x^y + \ldots$$

Llamemos α_i al coeficiente de x^i en este desarrollo, o sea, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 7$; $\alpha_2 = 28$; ....

Ahora observamos que $f(x)$ es el producto $\alpha(x)\beta(x)$ y, por lo tanto, el coeficiente de x^{11} que buscamos será el resultado de calcular

$$\beta_0\alpha_{11} + \beta_5\alpha_6 + \beta_{10}\alpha_1 = 1\binom{17}{11} - 7\binom{12}{6} + 21\binom{7}{1}.$$

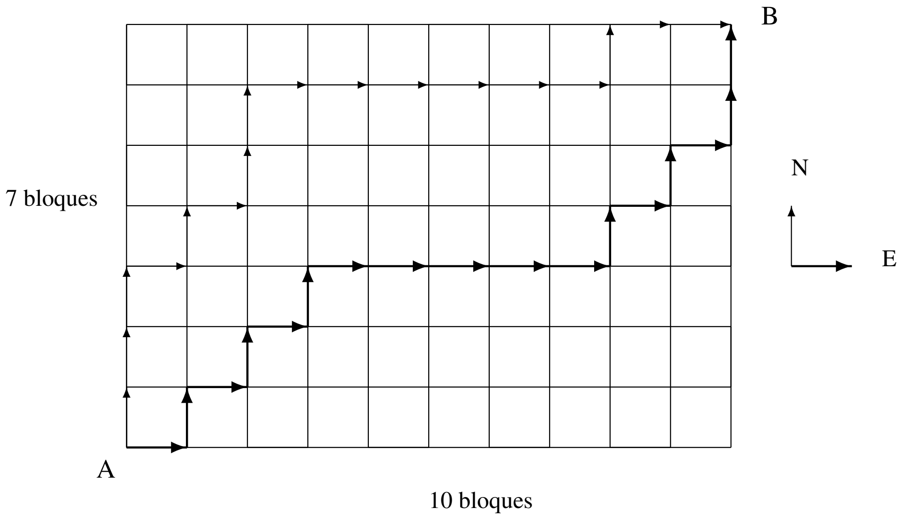
Ejercicios de autoevaluación

3-51 Encontrar el coeficiente g_7 de x^7 en $g(x) = (1 - x)^k$ para los valores de $k = 9$ y $k - 9$.

3-52 ¿De cuántas maneras se pueden distribuir diez objetos distinguibles en cuatro cajas numeradas de manera que en la primera caja haya tres objetos, en la segunda dos, en la tercera uno y en la cuarta cuatro?

3-53 ¿De cuántas maneras se pueden distribuir cinco objetos distinguibles en tres cajas numeradas si queremos que en la caja tres haya dos objetos?

3-54 Consideremos el plano de la figura para ir del punto A al punto B siguiendo el camino más corto (circulando por las calles). El recorrido total será de diecisiete bloques. Obviamente, esto se puede hacer de muchas maneras. ¿De cuántas?



3-55 Calcular el coeficiente del término $a^2c^3d^4e$ en el desarrollo de $(a+b+c+d+e)^{10}$.

3-56 Encontrar la función generadora ordinaria asociada al problema de encontrar el número de soluciones enteras, no negativas, de la ecuación $3a + 2b + 4c + 2d = r$.

3-57 Encontrar el número de soluciones enteras de la ecuación $a+b+c+d+e+f = 20$, sabiendo que $a \in \{1, \ldots, 5\}$ y las otras variables valen, como mínimo, dos.

3-58 En la *Operación Triunfo*, cada participante es valorado por cuatro jurados independientes en una escala que va de uno a seis puntos. Para ser finalista, el *chaval de Bellaterra* tiene que recibir, al menos, veintidós puntos. Encontrar de cuántas maneras los jurados pueden dar los puntos al *chaval de Bellaterra* para que llegue a finalista.

3-59 Nueve compañeros de curso pretenden reunir 9,00 € para un regalo. De cuántas maneras lo pueden hacer si Josep dará entre 1,00 € y 2,00 € y cualquier otro miembro del grupo dará, como máximo, 1,00 € (cada compañero da un número entero de euros).

3-60 Si lanzamos un dado doce veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea treinta?

3-61 Contestar y dejar el resultado indicado como coeficiente de un cierto término de una función generadora:

1) De cuántas maneras se pueden obtener 100 € si utilizamos los billetes del sistema euro. (Los billetes son de 500 €, 200 €, 100 €, 50 €, 20 €, 10 € y 5 €).

2) De cuántas maneras se puede obtener 1 € utilizando las monedas del sistema euro. (Las monedas son de 2 €, 1 €, 0,5 €, 0,2 €, 0,1 €, 0,05 €, 0,02 € y 0,01 €).

3-62 ¿De cuántas maneras diferentes podemos reunir 85 € si utilizamos billetes de 1 €, 5 €, 10 € y 20 €?

3-63 Disponemos de un número ilimitado de bloques de 1 cm., 2 cm. y 3 cm. de altura. Combinando estos bloques sin que importe el orden, ¿cuántas torres de altura $n = 15$ cm. podemos construir? (suponer que los bloques de cada tamaño son indistinguibles entre sí).

3-64 Utilizar un argumento combinatorio para demostrar que el coeficiente de x^{2n+1} en $f(x)$ y el coeficiente de x^{2n-2} en $g(x)$ son iguales (encontrar, también, cuánto vale este coeficiente).

$$f(x) = (x + x^2 + \ldots + x^n)^3 \qquad g(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})^3.$$

3-65 Para hacer una prueba piloto sobre el comportamiento de los políticos en el Parlamento del Estado español, se han reunido científicos del País Vasco, Galicia y Catalunya. Encontrar de cuántas maneras distintas se puede hacer un grupo de nueve personas de manera que ninguna autonomía tenga mayoría absoluta en el grupo.

3-66 La suma de cuatro enteros positivos, tomados siempre en orden no decreciente, es r y la cantidad de maneras de escoger estos enteros es g_r. Encontrar la función generadora ordinaria asociada a la secuencia $\{g_r\}$.

3-67 Resolver los casos $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{15}$ y $\boxed{16}$ del problema propuesto en la sección 3 utilizando la técnica de las funciones generadoras ordinarias.

Solucionario

3-51 Si $k = 9$, utilizando la proposición 3.8, podemos deducir que el coeficiente g_7 de x^7 es $g_7 = -\binom{9}{7} = -36$.

Si $k = -9$, por la proposición 3.9, podemos deducir directamente que el coeficiente g_7 de x^7 es $g_7 = CR(9,7) = \binom{9+7-1}{7} = \binom{15}{7} = 6435$.

3-52 El número de posibles distribuciones es:

$$\binom{10}{3,2,1,4} = \frac{10!}{3!2!1!4!} = 12600.$$

3-53 El número de posibles distribuciones es:

$$\binom{5}{3,0,2} + \binom{5}{0,3,2} + \binom{5}{2,1,2} + \binom{5}{1,2,2} = 80.$$

3-54 Si introducimos los símbolos ↑ (movimiento hacia el norte) y → (movimiento hacia el este), entonces un recorrido de diecisiete bloques no es más que una palabra de longitud diecisiete utilizando los símbolos del alfabeto $\{\uparrow, \rightarrow\}$ o, si se quiere, una permutación con repetición de dos elementos (el ↑ y el →) donde el primero se toma siete veces y el segundo diez.

El número total de posibles recorridos es $PR(17,7,10) = \binom{17}{7,10} = \frac{17!}{7!10!} = 19448$.

3-55 El coeficiente de $a^2c^3d^4e$ en el desarrollo de $(a+b+c+d+e)^{10}$ es:

$$\binom{10}{2,0,3,4,1} = \frac{10!}{2!0!3!4!1!} = 12600.$$

3-56 La solución al problema planteado es el coeficiente g_r de x^r en la función generadora:

$g(x) = (1 + x^3 + x^6 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)^2(1 + x^4 + x^8 + \ldots)$.

3-57 La respuesta viene dada por el coeficiente g_{20} de x^{20} en el desarrollo de la función generadora $g(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + \cdots)^5$.

Podemos simplificar:

$g(x) = x^{11}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + \cdots)^5 = x^{11}\frac{(1-x^5)}{(1-x)}\left(\frac{1}{1-x}\right)^5 = \frac{x^{11}(1-x^5)}{(1-x)^6}$.

El coeficiente que buscamos es el de x^9 en $f(x) = \underbrace{(1-x^5)}_{\alpha(x)}\underbrace{(1-x)^{-6}}_{\beta(x)}$.

Tras desarrollar $\beta(x)$ utilizando la proposición 3.9, comprobamos que x^9 sólo se puede conseguir en los términos de coeficientes $\alpha_0\beta_9 + \alpha_5\beta_4$, ya que:

$$f(x) = (1-x^5)(1 + \binom{6}{1}x^1 + \binom{7}{2}x^2 + \cdots)$$

Por lo tanto, el número de soluciones enteras de la ecuación $a+b+c+d+e+f=20$ es $\alpha_0\beta_9+\alpha_5\beta_4=\binom{6+9-1}{9}-\binom{6+4-1}{4}=\binom{14}{9}-\binom{9}{4}=1876.$

3-58 La función generadora del problema es

$$g(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$$

y nos interesa el coeficiente g_{22} de x^{22}, g_{23} de x^{23} y g_{24} de x^{24}.

Pero $g(x)=x^4(1+x+x^2+\ldots+x^5)^4=x^4\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$, o sea que nos interesa el coeficiente b_{18} de x^{18}, b_{19} de x^{19} y b_{20} de x^{20} en $b(x)=\underbrace{(1-x^6)^4}_{\alpha(x)}\underbrace{(1-x)^{-4}}_{\beta(x)}$.

Tenemos que calcular $b_{18}+b_{19}+b_{20}$:

$$\begin{aligned}b_{18}&=\alpha_0\beta_{18}+\alpha_6\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_6+\alpha_{18}\beta_0\\&=CR(4,18)-C(4,1)CR(4,12)+C(4,2)CR(4,6)-C(4,3)CR(4,0)\\&=\binom{21}{18}-4\binom{15}{12}+6\binom{9}{6}-4=10.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{19}&=\alpha_0\beta_{19}+\alpha_6\beta_{13}+\alpha_{12}\beta_7+\alpha_{18}\beta_1\\&=CR(4,19)-C(4,1)CR(4,13)+C(4,2)CR(4,7)-C(4,3)CR(4,1)\\&=\binom{22}{19}-4\binom{16}{13}+6\binom{10}{7}-16=4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{20}&=\alpha_0\beta_{20}+\alpha_6\beta_{14}+\alpha_{12}\beta_8+\alpha_{18}\beta_2\\&=CR(4,20)-C(4,1)CR(4,14)+C(4,2)CR(4,8)-C(4,3)CR(4,2)\\&=\binom{23}{20}-4\binom{17}{14}+6\binom{11}{8}-4\binom{5}{2}=1.\end{aligned}$$

La respuesta es $b_{18}+b_{19}+b_{20}=10+4+1=15$.

3-59 La función generadora del problema es: $g(x)=(x+x^2)(1+x)^8=x(1+x)^9$ y buscamos el coeficiente g_9 de x^9 o, lo que es el mismo, el coeficiente de x^8 en $(1+x)^9$ que, aplicando la proposición 3.8, resulta ser $\binom{9}{8}=9$.

3-60 Tenemos que calcular el coeficiente g_{30} de x^{30} en la función generadora

$$g(x)=(x+x^2+\ldots+x^6)^{12}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}g(x)&=x^{12}(1+x+x^2+\cdots+x^5)^{12}=x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{12}\\&=x^{12}\underbrace{(1-x^6)^{12}}_{\alpha(x)}\underbrace{(1-x)^{-12}}_{\beta(x)}.\end{aligned}$$

El coeficiente g_{30} del término de grado 30 es

$$\begin{aligned}\alpha_0\beta_{18}+\alpha_6\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_6+\alpha_{18}\beta_0 &= CR(12,18)-C(12,1)CR(12,12)\\ &+C(12,2)CR(12,6)-C(12,3)CR(12,0)\\ &= \binom{29}{18}-12\binom{23}{12}+66\binom{17}{6}-220\\ &= 19188950.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad es $\dfrac{19188950}{6^{12}}$.

3-61 Resolveremos los dos casos por separado:

1) Queremos encontrar la cantidad de soluciones enteras, no negativas, de la ecuación:

$$100x+50y+20z+10t+5s=100.$$

La función generadora asociada a este problema es:

$$\begin{aligned}g(x) = (1+x^{100})(1+x^{50}+x^{100})(1+x^{20}+x^{40}+\cdots)\\ (1+x^{10}+x^{20}+\cdots)(1+x^{5}+x^{10}+\cdots).\end{aligned}$$

Si se desarrolla esta función generadora, el coeficiente del término de grado 100 es $g_{100}=50$. Este desarrollo hay que hacerlo manualmente o con algún software de cálculo simbólico.

2) Del mismo modo, la solución es igual al número de soluciones enteras, no negativas, de la ecuación siguiente:

$$x+0{,}5y+0{,}2z+0{,}1s+0{,}05t+0{,}02u+0{,}01v=1$$

que también se puede escribir como:

$$100x+50y+20z+10s+5t+2u+1v=100.$$

En este caso, la función generadora es:

$$\begin{aligned}g(x) = (1+x^{100})(1+x^{50}+x^{100})(1+x^{20}+x^{40}+\cdots)(1+x^{10}+x^{20}+\cdots)\\ (1+x^{5}+x^{10}+\cdots)(1+x^{2}+x^{4}+\cdots)(1+x+x^{2}+x^{3}+\cdots),\end{aligned}$$

y el resultado que nos piden es el coeficiente del término de grado 100, que vale 4563. Observar, igual que antes, que no es recomendable encontrarlo manualmente, es mejor utilizar algún software de cálculo simbólico que permita la manipulación de polinomios.

3-62 La solución al problema planteado consiste en calcular el coeficiente g_{85} de x^{85} en la función generadora:

$$g(x)=(1+x+x^2+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)(1+x^{10}+x^{20}+\ldots)(1+x^{20}+x^{40}+\ldots)=$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}\cdot\frac{1}{1-x^{20}}.$$

Para calcular este coeficiente es mejor utilizar algún programa que permita la manipulación de polinomios. El resultado es $g_{85}=190$.

3-63 La solución al problema planteado consiste en encontrar la cantidad de soluciones enteras y no negativas de la ecuación: $x+2y+3z=15$.

Tenemos que calcular el coeficiente g_{15} de x^{15} en la función generadora:

$$g(x)=(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots).$$

El coeficiente que nos piden vale 27 (se ha calculado con un software de cálculo simbólico).

3-64 $f(x)$ es la función generadora que corresponde al problema de encontrar la cantidad de soluciones enteras y positivas (comprendidas entre 1 y n), de $x + y + z = 2n + 1$. Esta cantidad de soluciones viene dada por el coeficiente f_{2n+1} de x^{2n+1}. Análogamente, el coeficiente g_{2n-2} representa la cantidad de soluciones enteras (comprendidas entre 0 y $n-1$), de $x + y + z = 2n - 2$.

Observemos que dada una terna, solución de $x+y+z = 2n-2$, podemos obtener (sumando una unidad a cada variable) una solución de $x + y + z = 2n + 1$. Recíprocamente, dada una solución de $x+y+z = 2n+1$, podemos restar una unidad a cada variable (es posible restar una unidad, puesto que $x, y, z > 1$) y obtenemos una solución de $x+y+z = 2n-2$.

3-65 La solución al problema consiste en encontrar la cantidad de soluciones naturales que satisfacen la ecuación: $x + y + z = 9$ de manera que $0 < x, y, z < 5$. La función generadora asociada al problema es $g(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^3$ y tenemos que encontrar el coeficiente g_9 de x^9.

Sabemos que $g(x) = x^3(1+x+x^2+x^3)^3 = x^3\left(\dfrac{1-x^4}{1-x}\right)^3$ y, por lo tanto, el coeficiente que hay que calcular acaba siendo el del término de grado 6 en $\underbrace{(1-x^4)^3}_{\alpha(x)}\underbrace{(1-x)^{-3}}_{\beta(x)}$.

Este coeficiente vale $\alpha_0\beta_6 + \alpha_4\beta_2 = CR(3, 6) - 3CR(3, 2) = \dbinom{8}{6} - 3\dbinom{4}{2} = 10$.

3-66 Podemos enfocar el problema observando que el primer número (entero, positivo) es a, el segundo número tiene que ser más grande o igual que este y será de la forma $a + b$, donde b es un entero no negativo. El tercer número lo podemos ver como $a + b + c$ y el cuarto como $a + b + c + d$, donde c, d son enteros no negativos.

Finalmente, el problema consiste en encontrar las soluciones de la ecuación siguiente:

$$a + (a + b) + (a + b + c) + (a + b + c + d) = r,$$

o, lo que es lo mismo, de la ecuación:

$$4a + 3b + 2c + d = r,$$

donde a es un entero positivo y b, c, d son enteros no negativos.

La función generadora que buscamos es:

$$g(x) = (x^4+x^8+x^{12}+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)$$

3-67 Resolveremos los casos de manera separada:

$\boxed{3}$ Como los adhesivos no son distinguibles, hace falta utilizar una función generadora ordinaria:

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^3 = \frac{1}{(1-x)^3}$$

que, por la proposición 3.9, se convierte en:

$$g(x) = 1 + \binom{3}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \cdots$$

El coeficiente g_{15} del término de grado 15 es $\dbinom{17}{15}$.

$\boxed{4}$ Como habíamos comentado en la página 22, la solución de este caso consiste en encontrar las soluciones enteras, no negativas, de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, con las restricciones $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, ya que, recordemos que las tres motos son idénticas y, por ejemplo, es lo mismo poner un, tres y once adhesivos, que poner tres, once y un adhesivos, respectivamente, en cada moto. Las restricciones se pueden escribir como: $x_2 = x_1 + a$ y $x_3 = x_2 + b = x_1 + a + b$, donde $a, b \geq 0$. De este modo, la ecuación anterior se convierte en: $x_1 + (x_1 + a) + (x_1 + a + b) = 15$. Es decir, se trata de encontrar las soluciones enteras, no negativas de $3x_1 + 2a + b = 15$. Tal como hemos hecho en problemas anteriores, la solución es el coeficiente g_{15} del término de grado 15 de la función generadora:

$$g(x) = (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

El resultado es $g_{15} = 27$.

7 La solución es parecida al caso $\boxed{3}$, pero la ecuación, en este caso, tiene soluciones estrictamente positivas. Es equivalente a buscar el número de soluciones enteras, no negativas, de la ecuación $y_1 + y_2 + z_3 = 12$, que son $\binom{14}{12}$.

8 Como el caso $\boxed{4}$, pero, de nuevo, hay que cambiar la ecuación por $y_1 + y_2 + y_3 = 12$, con las restricciones $y_1 \leq y_2 \leq y_3$. Podemos transformar el problema en encontrar las soluciones enteras, no negativas, de $3y_1 + 2a + b = 12$. Tal como hemos hecho en problemas anteriores, la solución es el coeficiente g_{12} del término de grado 12 de la función generadora:

$$g(x) = (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

El resultado es $g_{12} = 19$.

15 Tenemos que encontrar la cantidad de soluciones enteras de $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ con las restricciones $5 \leq x_1 \leq 9$, $3 \leq x_2 \leq 5$ y $x_3 \leq 3$. La solución consiste en calcular el coeficiente g_{15} del término de grado 15 de la función generadora

$$g(x) = (x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)(x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3).$$

Este coeficiente es $g_{15} = 6$.

16 Es exactamente igual que el caso anterior. Hay seis soluciones que son: $(7, 5, 3)$, $(8, 5, 2)$, $(8, 4, 3)$, $(9, 5, 1)$, $(9, 4, 2)$, $(9, 3, 3)$.

Ecuaciones recurrentes. Complejidad computacional

Ramon Masià
Jaume Pujol
Josep Rifà
Mercè Villanueva

P06/75006/01397

www.uoc.edu

Índice

Introducción

En este módulo veremos otra técnica que se utiliza en la resolución de ciertos problemas combinatorios, es la técnica de las ecuaciones recurrentes. Para tener una primera aproximación a las ecuaciones recurrentes, consideremos la secuencia $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$, donde el término general a_r es la solución de un cierto problema computacional que depende del valor de la entrada r. Ya vimos, en el módulo precedente, algunos métodos para calcular el término general a_r usando la técnica de las funciones generadoras. En algunos casos será posible calcular el término a_r de la secuencia a partir de términos anteriores de ésta, previamente conocidos. Por ejemplo, observemos la secuencia $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$ donde vemos que el primer término es $a_0 = 4$ y que la diferencia entre cada dos términos consecutivos es $d = 3$. Entonces, el término r-ésimo se puede expresar a partir del término anterior, el $(r-1)$-ésimo, de este modo : $a_r = a_{r-1} + d$. Esta ecuación es un ejemplo de ecuación recurrente. A la condición $a_0 = 4$ la llamaremos *la condición inicial*. Evidentemente, una vez conozcamos la condición inicial y la diferencia entre cada dos términos, podemos ir calculando cada término de la secuencia a partir de los anteriores. Muchas veces nos interesará conocer, directamente, un término, por ejemplo a_{100}, sin necesidad de calcular los noventa y nueve términos anteriores. Hablaremos de **resolver la ecuación recurrente** para referirnos a este cálculo de un término genérico de la secuencia. En nuestro caso, $a_r = 4 + 3r$ y, por lo tanto, $a_{100} = 4 + 3 \cdot 100 = 304$.

En la segunda parte del módulo veremos una introducción a la complejidad computacional. Para empezar, introduciremos con la ayuda de ejemplos la idea intuitiva de cuándo un problema es fácil y cuándo es difícil. En el supuesto de que el problema se resuelva mediante un algoritmo, el concepto de eficiencia del algoritmo traduce la idea de la dificultad para resolverlo. Veremos cómo se puede estudiar la eficiencia de un algoritmo y que hay algoritmos (y problemas) que son intrínsecamente difíciles.

A continuación, introduciremos el concepto de complejidad algorítmica que nos permitirá expresar, de una manera fácil, la idea de eficiencia de un algoritmo y comparar diferentes algoritmos que resuelven un mismo problema.

El concepto de complejidad lo utilizaremos repetidamente en la segunda parte de la asignatura, en el estudio de los algoritmos, para la resolución de ciertos problemas asociados a la teoría de grafos.

1. Ecuaciones recurrentes lineales

Introducción

Dada una secuencia de números que cumplen una cierta relación entre sí, vamos a estar interesados en expresar el término general en función de algunos de los términos precedentes. Diremos que ésta es una definición *recursiva* de la secuencia puesto que el término general no es explicitado, sino referido a otros términos anteriores en la secuencia. Naturalmente, para que el proceso tenga sentido hará falta que conozcamos explícitamente el valor de los primeros términos de la secuencia.

En esta sección consideraremos problemas que admiten esta clase de formulación recursiva. En general, la solución de un problema Q –no necesariamente numérico– que relaciona n objetos, se puede pensar en términos de la solución que correspondería al problema Q' que tiene el mismo enunciado que Q, pero que sólo relaciona $n-1$ objetos. Entendemos que Q' no tendrá una solución más compleja que Q y que, por tanto, la reducción será útil. Si podemos establecer una relación entre la solución para Q' y la correspondiente a Q, el proceso de reducción puede ser repetido hasta llegar a un problema de resolución inmediata y, a partir de aquí, rehacer la cadena de soluciones que nos volverá a llevar hasta Q.

Primero veremos, mediante algunos ejemplos, cómo podemos establecer un enunciado recursivo y, después, cómo resolver la recurrencia que relaciona las soluciones, o sea, cómo plantear una fórmula explícita para el término general que no dependa de los términos anteriores.

1.1. Planteamientos recurrentes

Definición 4.1

Sea X la sucesión $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ donde, para todo índice $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos $x_i \in \mathbb{R}$. Diremos que

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} + b_n$$

es una **ecuación recurrente lineal con coeficientes constantes** para X, donde $k \in \mathbb{N}$ y para todo índice $j \in 0, 1 \cdots k$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (con $n \geq k$) tenemos que $a_j, b_n \in \mathbb{R}$.

Cuando $\forall n$ sea $b_n = 0$, diremos que la ecuación recurrente es **homogénea**. Si $a_k \neq 0$ el **orden** de la ecuación que hemos visto en la definición (4.1) es k y los k valores concretos $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ son las **condiciones iniciales** que determinan cuál será la sucesión. Observemos que si las condiciones iniciales son diferentes podemos generar secuencias diferentes pero que seguirán la misma ley de formación.

Ejemplo 4-1

La ecuación siguiente

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} - 1 \qquad \forall n \geq 2$$

es una ecuación recurrente lineal de orden 2, no homogénea ($b_n = -1$). Los coeficientes constantes son $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$.
Con las condiciones iniciales $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ nos genera los términos

$$\begin{aligned} &x_2 = x_1 + 2x_0 - 1 = 1 + 2 \cdot 0 - 1 = 0 \\ &x_3 = x_2 + 2x_1 - 1 = 0 + 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ &x_4 = x_3 + 2x_2 - 1 = 1 + 2 \cdot 0 - 1 = 0 \\ &\ldots \end{aligned}$$

o sea, la sucesión alternada $(0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$.
En cambio, tomando las condiciones iniciales $x_0 = x_1 = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} &x_2 = 1 + 2 \cdot 1 - 1 = 2 \\ &x_3 = 2 + 2 \cdot 1 - 1 = 3 \\ &x_4 = 3 + 2 \cdot 2 - 1 = 6 \\ &\ldots \end{aligned}$$

que es la sucesión $(1, 1, 2, 3, 6, \ldots)$.

Ejemplo 4-2

La ecuación siguiente

$$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad \forall n \geq 3$$

es una ecuación recurrente lineal de orden 3, homogénea ($b_n = 0$). Los coeficientes constantes son $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ y $a_3 = -2$.
Con las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$ nos genera los términos

$$\begin{aligned} &x_3 = 2x_2 + x_1 - 2x_0 = 2 + 1 + 0 = 3 \\ &x_4 = 2x_3 + x_2 - 2x_1 = 6 + 1 - 2 = 5 \\ &x_5 = 2x_4 + x_3 - 2x_2 = 10 + 3 - 2 = 11 \\ &\ldots \end{aligned}$$

o sea, la sucesión $(0, 1, 1, 3, 5, 11, \ldots)$.

Veamos, a continuación, algunos ejemplos de formulación recursiva de algunos problemas combinatorios.

Ejemplo 4-3

Supongamos el caso siguiente de reproducción de conejos a partir de un macho y una hembra recién nacidos. Cada pareja es capaz de reproducirse al cabo de un mes de haber nacido y produce —a partir de este momento— otro macho y otra hembra cada mes. Si no se muere ninguno, ¿cuántos conejos tendremos al cabo de un año?

Sucesión de Fibonacci

El problema de la reproducción de los conejos fue enunciado por Leonardo de Pisa, hijo de un tal Bonaccio, a principios del s. XIII. La sucesión resultante es conocida con el nombre de *sucesión de Fibonacci* y tiene la particularidad de aparecer a menudo en varios procesos evolutivos naturales.

Para obtener la ecuación recurrente que representa el enunciado iterativo de que disponemos situémonos al final del mes k-ésimo ($k \geq 2$). Tendremos tantas parejas de conejos como las que teníamos al final del mes anterior $k-1$, más las parejas nacidas en el mes actual k. Ahora bien, en el mes k habrán nacido tantas parejas como las que había al final del mes $k-2$ (dado que están un mes antes de poder procrear). Así, pues, si x_n representa el total de parejas de conejos al final del mes n

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$$

con $x_0 = x_1 = 1$, puesto que inicialmente y al final del primer mes sólo había una pareja.

La solución para el número de parejas de conejos al cabo de doce meses será el término $x_{12} = x_{11} + x_{10}$. Por sustitución progresiva vamos obteniendo $x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 5$, o sea la sucesión $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots)$. Por lo tanto se obtienen $x_{12} = 233$ parejas al cabo de un año.

Ejemplo 4-4

Tracemos $n \geq 0$ rectas en el plano de tal manera que no haya dos de ellas que sean paralelas ni tres que se corten en un mismo punto. Calculemos cuántas regiones (x_n) nos determinarán las n rectas.

En la figura 1.4 vemos el caso de $n = 1, 2$ o 3 rectas, donde se forman, respectivamente, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ y $x_3 = 7$ regiones.

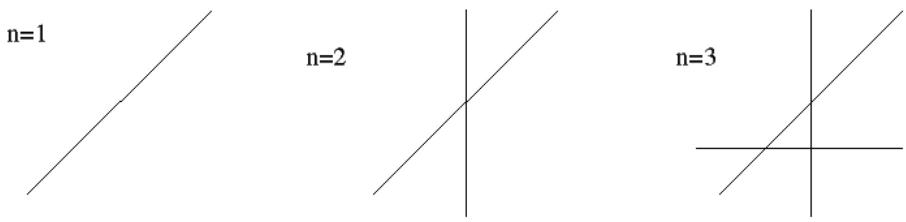


Figura 1.4: Rectas en el plano.

A partir de la observación de estos tres casos podemos llegar a la conclusión que la n-ésima recta trazada añade n regiones a las que se habían formado con las $n-1$ rectas precedentes. Así,

$$x_n = x_{n-1} + n \qquad \forall n \geq 1$$

siendo $x_0 = 1$.

Ejemplo 4-5

Consideremos, a continuación, el problema de las *torres de Hanoi* (E. Lucas, 1883). Consiste en trasladar, uno por uno, los cinco (y, en general, n) discos del palo A al palo C (figura 1.5) con el número mínimo de movimientos. Durante el proceso se puede usar el palo B y en ningún momento puede haber un disco situado sobre otro de más pequeño.

Calcular el número mínimo de movimientos que son necesarios para trasladar quince discos.

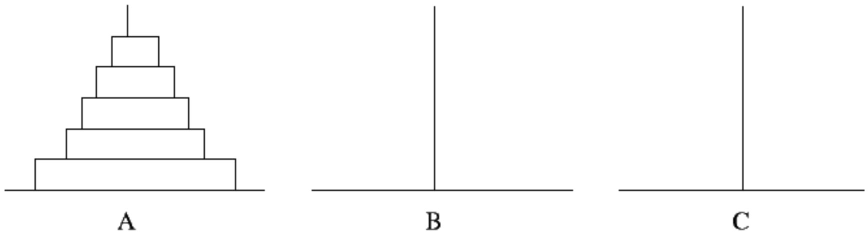


Figura 1.5: Torres de Hanoi $(n = 5)$

Vamos a suponer que sabemos cómo trasladar eficientemente $n - 1$ discos de un palo a otro que está vacío, y sea x_{n-1} el número de movimientos necesarios para ello. Una manera recursiva de analizar el problema consiste en trasladar los $n - 1$ discos superiores de A a B usando C. Acto seguido, pasar el disco inferior de A a C y, finalmente, trasladar los $n-1$ discos de B a C usando el palo A. Es fácil darse cuenta de que el esquema propuesto no hace movimientos innecesarios; además, para el cálculo, tan sólo nos hace falta saber trasladar *un* disco hacia un palo vacío.

De esta forma, hemos formado la ecuación recurrente (recordemos que hemos trasladado dos veces $n - 1$ piezas, primero de A a B y, después, de B a C)

$$x_n = 2x_{n-1} + 1 \qquad \forall n \geq 2$$

siendo $x_1 = 1$.

Si, inicialmente, hay cinco discos en el palo A, el número mínimo de movimientos necesarios para trasladarlos al palo C viene dado por x_5. Empezando por $x_1 = 1$ y sustituyendo en la ecuación recurrente obtenemos $x_2 = 2x_1 + 1 = 3$, $x_3 = 7$, $x_4 = 15$ y finalmente $x_5 = 31$.

Si hay quince discos, tendremos que calcular x_{15}. Observemos que para ello tendríamos que encontrar todos los términos de la sucesión hasta llegar a x_{15}. Más adelante veremos como hay que calcular x_{15} de manera eficiente, sin tener que obtener los catorce términos precedentes.

Ejemplo 4-6

Tenemos que subir una escalera de $n \geq 1$ peldaños. Decidimos, en cada paso, subir un peldaño o bien subir dos. Con estas condiciones calcularemos de cuántas maneras diferentes podemos llegar arriba.

El total de maneras, x_n, de subir la escalera lo podemos descomponer en dos subtotales. El total de maneras en que hemos subido un peldaño en el primer paso y nos queda, por lo tanto, una escalera de $n - 1$ peldaños, más el total de maneras en que hemos subido dos peldaños en el primer paso, donde nos queda todavía una escalera de $n - 2$ peldaños para subir. Así

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \qquad \forall n \geq 3$$

siendo $x_1 = 1;\ x_2 = 2$. (Observar que es el mismo término general que obteníamos en la sucesión de Fibonacci del ejemplo 4-3.)

Con estos ejemplos, hemos visto cómo podemos resolver un problema combinatorio, planteando primero una ecuación recurrente, dando unas condiciones iniciales y finalmente calculando un término específico de la sucesión, que representará la solución del problema.

Número áureo

Si tomamos un par de términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci (x_n, x_{n-1}) –por ejemplo $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 13)$, etc.– y hacemos el cociente entre ellos obtenemos como resultado $1,5;\ 1,6;\ 1,62;$ etc. y, en general, unos valores $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ que convergen a un número fijo llamado **número áureo**.
Este valor nos da la proporción (base/altura) con la que está construido el Partenón de Atenas, las pirámides de Egipto y otros edificios emblemáticos.

Tal como hemos podido observar en el ejemplo 4-5, no siempre se puede calcular rápidamente un término de la sucesión, ya que primero tendremos que calcular todos los términos precedentes. Por esto nos interesará encontrar una fórmula explícita para el término general de la sucesión, x_n, que no dependa de los términos anteriores. A continuación, veremos diferentes métodos para resolver esta cuestión. Primero veremos un **método iterativo** que no resultará demasiado eficiente para ecuaciones recurrentes de orden mayor que 1. Después veremos un método más sistemático, llamado **método de las raíces**, para ecuaciones recurrentes de orden mayor o igual que 2. Las ecuaciones recurrentes de los ejemplos 4-4 y 4-5 las resolveremos con el método iterativo, puesto que son de orden 1 y las de los ejemplos 4-1, 4-2, 4-3 y 4-6 (de órdenes superiores a 1) las resolveremos con el método de las raíces.

1.2. Resolución iterativa

Buscar una fórmula explícita para una ecuación recurrente de orden 1 se puede hacer fácilmente mediante un proceso iterativo, a partir de las condiciones iniciales, hasta que se determina una hipótesis sobre la ley seguida para formar la sucesión. A continuación, se puede proceder a demostrar esta hipótesis por inducción para ver si era correcta o no. En caso de que no lo fuera, haría falta revisar la iteración y formular otra hipótesis.

Ejemplo 4-7

Empecemos por encontrar una fórmula explícita para la ecuación recurrente de orden 1 del ejemplo 4-5,

$$x_n = 2x_{n-1} + 1 \qquad \forall n \geq 2$$

siendo $x_1 = 1$. A partir de esta fórmula, calcularemos el mínimo número de movimientos que hace falta hacer para trasladar, uno por uno, quince discos del palo A al palo C.

Si desarrollamos los primeros términos obtenemos

$$\begin{aligned}
&x_2 = 2x_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3\\
&x_3 = 2x_2 + 1 = 2(2 + 1) + 1 = 2 \cdot 2 + 3 = 7\\
&x_4 = 2x_3 + 1 = 2(2 \cdot 2 + 3) + 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 7 = 15\\
&x_5 = 2x_4 + 1 = 2(2 \cdot 2 \cdot 2 + 7) + 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 15 = 31\\
&\ldots
\end{aligned}$$

así, podemos tomar como hipótesis

$$x_n = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1.$$

A continuación vamos a ver si esta fórmula es correcta, utilizando el método de demostración por inducción sobre n.

Para $n = 2$ es cierta, puesto que $x_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 2^2 - 1$.

Consideremos que la fórmula es cierta hasta $n = k$.

Ahora bien, $x_{k+1} = 2x_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$, por lo tanto, la hipótesis era correcta.

Ahora resulta fácil ver que el mínimo número de movimientos para quince discos es

$$x_{15} = 2^{15} - 1 = 32767.$$

Ejemplo 4-8

A continuación encontraremos una fórmula explícita para la ecuación recurrente de orden 1 del ejemplo 4-4,

$$x_n = x_{n-1} + n \qquad \forall n \geq 1$$

siendo $x_0 = 1$ y calcularemos cuántas regiones nos determinan veinte rectas en el plano.

Desarrollando los primeros términos obtenemos

$$\begin{aligned} &x_1 = x_0 + 1 = 1 + 1 = 2 \\ &x_2 = x_1 + 2 = 1 + 1 + 2 = 4 \\ &x_3 = x_2 + 3 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7 \\ &\ldots \end{aligned}$$

así, podemos tomar como hipótesis

$$x_n = 1 + (1 + 2 + \ldots + n).$$

Procedemos por inducción. Para $n = 1$ tenemos $x_1 = 1 + 1 = 2$. Consideremos la hipótesis correcta hasta $n = k$ y calculemos, ahora, el siguiente término:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + (k+1) = 1 + (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) \\ &= 1 + (1 + 2 + \ldots + k + (k+1)) \end{aligned}$$

de manera que podemos afirmar que la hipótesis era correcta para todo valor de n.

La suma de los n primeros enteros positivos se puede expresar como $(1+2+\ldots+n) = \dfrac{(n+1)n}{2}$, por lo tanto, podemos escribir la solución de la manera siguiente:

$$x_n = 1 + \frac{(n+1)n}{2}$$

Si trazamos veinte rectas en el plano, nos determinarán $x_{20} = 1 + 210 = 211$ regiones.

1.3. Ecuaciones recurrentes homogéneas

La resolución iterativa de las ecuaciones recurrentes no es fácil de utilizar cuando la ecuación tiene orden superior a 1. Por esto, ahora veremos un procedimiento sistemático, llamado **método de las raíces**, donde no es necesario hacer ninguna suposición sobre la forma del término general de la sucesión. Consideraremos el caso particular de la ecuación de orden 2. Los resultados se pueden extender, por analogía, al caso general.

Observar

Las raíces de la ecuación característica de una ecuación recurrente sirven para construir la sucesión que satisface la ecuación recurrente.

Empecemos por suponer el caso de la ecuación recurrente homogénea de orden 2:

$$x_n - a_1 x_{n-1} - a_2 x_{n-2} = 0 \qquad \forall n \geq 2,\ a_2 \neq 0. \qquad (1.1)$$

Proposición 4.2

La ecuación recurrente homogénea de orden dos (1.1) tiene como solución no trivial la secuencia $1, t, t^2, t^3, \ldots$ $(t \neq 0)$ si y sólo si

$$t^2 - a_1 t - a_2 = 0. \qquad (1.2)$$

Demostración: Primero: si la secuencia $1, t, t^2, t^3, ...$ es solución de (1.1) quiere decir que

$$t^k = a_1 t^{k-1} + a_2 t^{k-2} \qquad \forall k \geq 2$$

y, siendo $t \neq 0$, podemos dividir por t^{k-2} y obtenemos

$$t^2 = a_1 t + a_2$$

es decir,

$$t^2 - a_1 t - a_2 = 0.$$

Segundo: si $t^2 - a_1 t - a_2 = 0$, entonces igual que antes, pero procediendo en sentido contrario llegamos a que $1, t, t^2, t^3, ...$ es solución de (1.1). ∎

Definición 4.3

La ecuación (1.2) se llama la **ecuación característica** de la ecuación recurrente.

Ejemplo 4-9

Vamos a encontrar fórmulas explícitas para las sucesiones que cumplan la siguiente ecuación recurrente homogénea de orden 2.

$$x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0 \qquad \forall n \geq 2.$$

La ecuación característica de la ecuación recurrente es $t^2 - t - 6 = 0$. Tenemos que,

$$t^2 - t - 6 = (t+2)(t-3)$$

por lo tanto, las raíces son $t = -2$ y $t = 3$. Así, por la proposición 4.2 dos soluciones de la ecuación son las sucesiones

$$\begin{array}{l} 1, -2, (-2)^2, (-2)^3, ..., (-2)^n, ... \quad \text{y} \\ 1, 3, 3^2, 3^3, ..., 3^n, ... \end{array}$$

Observar, además, que la sucesión

$$s_n = (-2)^n + 3^n$$

formada por la suma de las dos soluciones también es solución. Efectivamente,

$$\begin{array}{l} ((-2)^{n-1} + 3^{n-1}) + 6((-2)^{n-2} + 3^{n-2}) \\ = -2(-2)^{n-2} + 3 \cdot 3^{n-2} + 6((-2)^{n-2} + 3^{n-2}) \\ = 4(-2)^{n-2} + 9 \cdot 3^{n-2} = (-2)^n + 3^n = s_n. \end{array}$$

Este hecho no es característico de este ejemplo, sino que se corresponde al caso general, tal como veremos a continuación.

Observar

Si las soluciones de la ecuación característica de una ecuación recurrente son λ y γ, entonces la secuencia $s_n = \alpha\lambda^n + \beta\gamma^n$ satisface los requisitos de la ecuación recurrente (α y β son arbitrarios).

Proposición 4.4

Si $p_0, p_1, p_2, ...$ y $q_0, q_1, q_2, ...$ son soluciones de la misma ecuación recurrente homogénea de orden 2, entonces, para cada par de constantes α, β, la secuencia

$$s_n = \alpha p_n + \beta q_n \qquad \forall n \geq 0$$

también es solución de la ecuación.

Demostración: Si $p_0, p_1, p_2, ...$ y $q_0, q_1, q_2, ...$ son soluciones de la misma ecuación recurrente quiere decir que

$$\begin{aligned} p_n &= a_1 p_{n-1} + a_2 p_{n-2} \\ q_n &= a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2} \ \ (\forall n \geq 2). \end{aligned}$$

Tomemos $s_n = \alpha p_n + \beta q_n$ $(\forall n \geq 0)$. Ahora, $\forall n \geq 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} & a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} = a_1(\alpha p_{n-1} + \beta q_{n-1}) + a_2(\alpha p_{n-2} + \beta q_{n-2}) \\ & = \alpha(a_1 p_{n-1} + a_2 p_{n-2}) + \beta(a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2}) \\ & = \alpha p_n + \beta q_n = s_n \end{aligned}$$

y esto quiere decir que s_n es también una secuencia que verifica la ecuación recurrente. ∎

Si no tenemos en cuenta las condiciones iniciales, hay infinitas sucesiones que cumplen la ecuación recurrente (α y β pueden tomar valores cualesquiera). Si tenemos en cuenta las condiciones iniciales, específicas para la ecuación, hará falta determinar el valor de las constantes α y β resolviendo un sistema de ecuaciones. En este caso habrá una única sucesión que será solución.

Ejemplo 4-10

Buscaremos la única sucesión que cumple la ecuación recurrente del ejemplo 4-9

$$x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0 \qquad \forall n \geq 2$$

con las condiciones iniciales $x_0 = 0,\ x_1 = 1$.

Tal como hemos visto en el ejemplo 4-9, la ecuación recurrente tiene como soluciones $(-2)^n$ y 3^n. Además, por la proposición 4.4 sabemos que las sucesiones $\alpha(-2)^n + \beta 3^n$ también son soluciones para cualquier par de constantes α y β. Si tomamos las condiciones iniciales $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 = \alpha(-2)^0 + \beta 3^0 = \alpha + \beta \\ x_1 &= 1 = \alpha(-2)^1 + \beta 3^1 = -2\alpha + 3\beta \end{aligned}$$

y, de aquí, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ 1 &= -2\alpha + 3\beta \end{aligned}$$

que tiene la solución $\alpha = -\dfrac{1}{5}$, $\beta = \dfrac{1}{5}$. Por lo tanto, la única solución que verifica las condiciones iniciales es

$$x_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n.$$

Ejemplo 4-11

Calcularemos la solución de la ecuación recurrente del ejemplo 4-3 (sucesión de Fibonacci)

$$x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0 \qquad \forall n \geq 2$$

con condiciones iniciales $x_0 = x_1 = 1$.

la ecuación característica de la ecuación recurrente es $t^2 - t - 1 = 0$. Las raíces son

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Así, la solución general es

$$x_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Si tomamos las condiciones iniciales $x_0 = x_1 = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta \\ 1 &= \alpha\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

de donde resulta $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$. Por tanto, el término general viene dado por

$$x_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

o, lo que es lo mismo,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Consideremos ahora el caso en que la ecuación característica tiene una única raíz doble.

Proposición 4.5

Si la ecuación característica $t^2 - a_1 t - a_2 = 0$ tiene una raíz p doble, entonces, las secuencias

$$\begin{aligned} &1, p, p^2, p^3, ..., p^n, ... \qquad y \\ &0, 1, 2p, 3p^2, ..., np^{n-1}, ... \end{aligned}$$

verifican la ecuación recurrente $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} \quad \forall n \geq 2$.

Observar

Si la ecuación característica de una ecuación recurrente tiene una raíz **doble** λ, entonces la secuencia $s_n = \alpha\lambda^n + \beta n \lambda^{n-1}$ satisface la ecuación recurrente (α y β son arbitrarios).

Demostración: Si p es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio

$$q(t) = t^2 - a_1 t - a_2$$

definido por la ecuación característica quiere decir que $q(p) = 0$ y, además, que $q'(p) = 0$ (recordar que una raíz doble de un polinomio anula a éste y a la derivada del mismo). Así, podemos buscar una solución alternativa a $\{ p^n \}$ a través de la derivada.
Tenemos que

$$t^n - a_1 t^{n-1} - a_2 t^{n-2} = t^{n-2} q(t)$$

y, derivando esta expresión respeto de t,

$$nt^{n-1} - a_1(n-1)t^{n-2} - a_2(n-2)t^{n-3} = (n-2)t^{n-3}q(t) + t^{n-2}q'(t)$$

donde la parte de la derecha se anula, para cada n, cuando $t = p$. Así, la sucesión $\{ np^{n-1} \}$ también es una solución de la ecuación recurrente. ∎

Ejemplo 4-12

Calcularemos la solución de la ecuación recurrente

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$$

con $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

La ecuación característica viene dada por

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

que podemos escribir como

$$(t-1)^2 = 0$$

es decir, $t = 1$ es una raíz doble. Por lo tanto, las soluciones vienen dadas por las dos sucesiones

$$\begin{array}{l} 1, 1, 1^2, 1^3, ... \\ 0, 1, 2 \cdot 1, 3 \cdot 1^2, ... \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{l} 1, 1, 1, 1, ..., 1^n, ... \\ 0, 1, 2, 3, ..., n, ... \end{array}$$

La solución general de la ecuación será, pues, de la forma

$$x_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot n$$

y, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, formamos el sistema

$$\begin{array}{l} x_0 = 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha \\ x_1 = 2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = \alpha + \beta \end{array}$$

que tiene como solución $\alpha = \beta = 1$. Así, la solución que verifica las condiciones iniciales es

$$x_n = 1 + n.$$

Finalmente, para el caso general de la ecuación recurrente lineal de orden N se pueden demostrar resultados análogos a los que hemos visto para el caso $N = 2$. Así, podemos escribir el resultado siguiente:

Teorema 4.6

Si el polinomio característico de la ecuación homogénea de orden N tiene k ceros diferentes $p_1, p_2, ..., p_k$ donde cada p_i tiene multiplicidad m_i, entonces, las sucesiones definidas por

$$\begin{array}{l} x_n = p_i^n; \\ x_n = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+2) p_i^{n-m+1} \end{array}$$

donde, $m \in \{2, ..., m_i\}$ y $i = \{1, 2, ..., k\}$, forman un sistema de N soluciones linealmente independientes para la ecuación homogénea.

Ejemplo 4-13

Calcularemos la solución general de la ecuación recurrente

$$x_n - 6x_{n-1} + 12x_{n-2} - 8x_{n-3} = 0.$$

La ecuación característica es

$$t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; (t-2)^3 = 0.$$

Dado que tiene una única raíz $t = 2$ de multiplicidad 3 podemos formar las tres soluciones

$$x_n = 2^n, \quad x_n = n\,2^{n-1}, \quad x_n = n(n-1)\,2^{n-2}$$

así, la solución general es

$$x_n = \alpha\,2^n + \beta n\,2^{n-1} + \gamma n(n-1)2^{n-2}$$

α, β y γ constantes.

Ejemplo 4-14

Calcularemos la solución general de la ecuación recurrente

$$x_n - 9x_{n-1} + 15x_{n-2} + 25x_{n-3} = 0.$$

La ecuación característica es $t^3 - 9t^2 + 15t + 25 = 0 \;\Leftrightarrow\; (t-5)^2(t+1) = 0$. Como tiene una raíz doble $t = 5$ y una raíz simple $t = -1$, podemos formar las tres soluciones $x_n = 5^n$, $x_n = n\,5^{n-1}$ y $x_n = (-1)^n$. Así, la solución general es

$$x_n = \alpha\,5^n + \beta n\,5^{n-1} + \gamma(-1)^n,$$

donde α, β y γ son constantes.

Ejemplo 4-15

Calcularemos la solución general de la ecuación recurrente

$$x_n - 4x_{n-1} + x_{n-2} + 10x_{n-3} - 4x_{n-4} - 8x_{n-5} = 0.$$

La ecuación característica es $t^5 - 4t^4 + t^3 + 10t^2 - 4t - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; (t-2)^3(t+1)^2 = 0$. Esta ecuación tiene una raíz $t = 2$ de multiplicidad 3 y una raíz $t = -1$ de multiplicidad 2, por tanto podemos formar las soluciones $x_n = 2^n$, $x_n = n\,2^{n-1}$, $x_n = n(n-1)\,2^{n-2}$, $x_n = (-1)^n$ y $x_n = n(-1)^{n-1}$. La solución general es

$$x_n = \alpha\,2^n + \beta n\,2^{n-1} + \gamma\,n(n-1)\,2^{n-2} + \delta(-1)^n + \mu\,n(-1)^{n-1},$$

donde α, β, γ, δ y μ son constantes.

1.4. Ecuaciones recurrentes no homogéneas

Consideremos, ahora, el caso de la ecuación recurrente no homogénea de orden 2.

$$x_n - a_1x_{n-1} - a_2x_{n-2} = b_n \qquad \forall n \geq 2,\; a_2 \neq 0. \tag{1.3}$$

Teorema 4.7

Sea $R_n = r_0, r_1, r_2, ..., r_n, ...$ una solución de la ecuación recurrente no homogénea, y supongamos que conocemos dos soluciones $P_n = p_0, p_1, p_2, ..., p_n, ...$ y $Q_n = q_0, q_1, q_2, ..., q_n, ...$ de la ecuación recurrente homogénea correspondiente ($b_n = 0 \ \forall n \geq 2$). Entonces, toda solución $X_n = x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ de la ecuación no homogénea se puede expresar en la forma

$$X_n = \alpha P_n + \beta Q_n + R_n$$

siendo α y β constantes a determinar.

Observar

Para encontrar la solución de una ecuación recurrente no homogénea, primero resolveremos la ecuación homogénea y, entonces, añadiremos una solución particular.

Demostración: Tenemos que

$$r_n - a_1 r_{n-1} - a_2 r_{n-2} = b_n \qquad \forall n \geq 2.$$

Restando esta expresión de (1.3) obtenemos

$$(x_n - r_n) - a_1(x_{n-1} - r_{n-1}) - a_2(x_{n-2} - r_{n-2}) = 0 \qquad \forall n \geq 2.$$

Así, la sucesión $D_n = X_n - R_n$ es una solución de la ecuación homogénea. Sabemos además, por el lema 4.4, que podemos escribir

$$D_n = \alpha P_n + \beta Q_n$$

siendo α y β constantes a determinar, y dado que $X_n = D_n + R_n$ ya hemos acabado la demostración. ∎

El teorema 4.7 nos muestra cómo se puede calcular la solución general de la ecuación no homogénea a partir de una solución cualquiera (llamada **solución particular**). Para determinar esta solución particular, se ensaya por analogía una solución del mismo tipo que el término b_n. Así, si b_n es un polinomio de grado 3, probaremos la solución $c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3$, siendo c_0, c_1, c_2, c_3 constantes a determinar, mientras que si se trata de una exponencial de base 2, ensayaremos $c\,2^n$, siendo c una constante a determinar.

Ejemplo 4-16

Ahora resolveremos la ecuación

$$x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = n^2 \qquad \forall n \geq 2$$

con las condiciones iniciales $x_0 = 0, x_1 = 2$.

Utilizando la ecuación característica determinamos las dos soluciones para la ecuación homogénea. Así

$$t^2 - t - 2 = 0$$

se puede factorizar como

$$(t-2)(t+1) = 0$$

que da las dos raíces $t = 2$ y $t = -1$ y, por lo tanto, las dos soluciones son 2^n y $(-1)^n$.

Ahora el problema es encontrar la solución particular.

Ensayemos una solución de la ecuación no homogénea tomando

$$x_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$$

Si ahora sustituimos en la ecuación recurrente que queremos resolver tendremos

$$\begin{array}{l}(c_0 + c_1 n + c_2 n^2) - (c_0 + c_1(n-1) + c_2(n-1)^2) \\ -2(c_0 + c_1(n-2) + c_2(n-2)^2) = n^2\end{array}$$

que, desarrollando, da

$$(-2c_0 + 5c_1 - 9c_2) + (-2c_1 + 10c_2)n - 2c_2 n^2 = n^2$$

donde, igualando coeficiente a coeficiente los dos polinomios de cada lado de la igualdad, se forma el sistema

$$\begin{aligned}-2c_0 + 5c_1 - 9c_2 &= 0 \\ -2c_1 + 10c_2 &= 0 \\ -2c_2 &= 1\end{aligned}$$

que tiene como solución $c_0 = -4$, $c_1 = -\dfrac{5}{2}$, $c_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Así, vemos que la solución general es la solución $(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)$ de la ecuación homogénea a la cual añadiremos la solución particular que acabamos de encontrar:

$$x_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n - 4 - \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}n^2.$$

Si ahora imponemos las condiciones iniciales, podemos determinar las constantes α y β, así

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 = \alpha + \beta - 4 \\ x_1 &= 2 = 2\alpha - \beta - 4 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

que da el sistema

$$\begin{aligned}0 &= \alpha + \beta - 4 \\ 2 &= 2\alpha - \beta - 7\end{aligned}$$

que tiene como solución $\alpha = \dfrac{13}{3}$, $\beta = -\dfrac{1}{3}$.

Finalmente, la solución es la sucesión

$$x_n = \frac{13}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^{n+1} - 4 - \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}n^2.$$

Para el caso general de la ecuación de orden N tenemos

Teorema 4.8

Sea R_n una solución de la ecuación recurrente no homogénea de orden N, y tomemos $A_n, B_n, ..., W_n$ como N soluciones independientes de la ecuación homogénea correspondiente. Entonces, toda solución X_n de la ecuación no homogénea se puede expresar en la forma

$$X_n = \alpha An + \beta B_n + \cdots + \omega W_n + R_n$$

siendo $\alpha, \beta, ..., \omega$ constantes a determinar.

1.5. Ejercicios

4-17 Resolver la ecuación recurrente:

$$x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0; \qquad x_0 = 1,\, x_1 = 2$$

4-18 Resolver la ecuación recurrente:

$$x_n - 2x_{n-1} - x_{n-2} + 2x_{n-3} = 0; \qquad x_0 = 0,\, x_1 = x_2 = 1$$

4-19 Resolver la ecuación recurrente:

$$x_n + 4x_{n-1} + 5x_{n-2} + 2x_{n-3} = 0; \qquad x_0 = 1,\, x_1 = 2,\, x_2 = 3$$

4-20 Sabemos que una ecuación recurrente lineal y homogénea de orden 7 tiene una raíz -3 de multiplicidad dos, otra raíz 2 de multiplicidad cuatro y una raíz 5 simple. ¿Cuál es la solución general de esta ecuación recurrente?

1.6. Soluciones

4-17 La ecuación característica es

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \iff (t-3)(t-2) = 0$$

por lo tanto, las raíces son $t = 3$ y $t = 2$. Así, la solución general es

$$x_n = \alpha 3^n + \beta 2^n.$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, formamos el sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 = \alpha + \beta \\ x_1 &= 2 = 3\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

que tiene como solución $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Así, la solución que verifica las condiciones iniciales es

$$x_n = 2^n.$$

4-18 La ecuación característica es

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0 \iff (t-1)(t+1)(t-2) = 0$$

por lo tanto, las raíces son $t = 1$, $t = -1$ y $t = 2$. Así, la solución general es

$$x_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n.$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, formamos el sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ x_1 &= 1 = \alpha - \beta + 2\gamma \\ x_2 &= 1 = \alpha + \beta + 4\gamma \end{aligned}$$

que tiene como solución $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{3}$ y $\gamma = \frac{1}{3}$. Así, la solución que verifica las condiciones iniciales es

$$x_n = \frac{1}{3}\Big[(-1)^{n+1} + 2^n\Big].$$

4-19 La ecuación característica es

$$t^3 + 4t^2 + 5t + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (t+1)^2(t+2) = 0$$

por lo tanto, las raíces son $t = -1$ con multiplicidad 2 y $t = -2$. Así, la solución general es

$$x_n = \alpha(-1)^n + \beta n(-1)^{n-1} + \gamma(-2)^n.$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, formamos el sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 = \alpha + \gamma \\ x_1 &= 2 = -\alpha + \beta - 2\gamma \\ x_2 &= 3 = \alpha - 2\beta + 4\gamma \end{aligned}$$

que tiene como solución $\alpha = -7$, $\beta = 11$ y $\gamma = 8$. Así, la solución que verifica las condiciones iniciales es

$$x_n = (7 + 11n)(-1)^{n-1} + 8(-2)^n.$$

4-20 La solución general es

$$\begin{aligned} x_n = \; & \alpha\,(-3)^n + \beta\,n\,(-3)^{n-1} + \gamma\,2^n + \delta n\,2^{n-1} + \varphi\,n(n-1)\,2^{n-2} + \\ & + \lambda\,n(n-1)(n-2)\,2^{n-3} + \mu\,5^n. \end{aligned}$$

2. Problemas y algoritmos

2.1. Problemas fáciles y difíciles

A lo largo del curso se ven un gran número de problemas, algunos más fáciles de resolver que otros. Este concepto de dificultad a menudo es subjetivo y no responde a la naturaleza propia del problema o del método utilizado para resolverlo.

Los motivos por los que un problema se puede considerar difícil de resolver pueden ser varios:

- El número de posibles soluciones es demasiado grande para encontrar la mejor solución por búsqueda exhaustiva entre todas las soluciones posibles.
- El problema es tan complicado que nos vemos obligados a utilizar modelos simplificados, la solución de los cuales está lejos de la solución del problema inicial.
- La función de evaluación utilizada para describir la calidad de una solución no es lo suficientemente buena o no se ajusta a las necesidades del problema.
- La persona que tiene que resolver el problema no está lo suficientemente preparada para encontrar la solución.

Ejemplo 4-21

Subjetivamente, el problema de buscar las soluciones de una ecuación con varias incógnitas parece bastante difícil. Por ejemplo, encontrar el número de soluciones enteras no negativas de una ecuación de la forma $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$.

Pero, en este caso concreto, el problema es fácil de resolver, ya que en un módulo anterior vimos que es equivalente a calcular las r-muestras no ordenadas con repetición que se pueden construir a partir de un conjunto de n elementos. Por ejemplo, la ecuación $x + y + z + t = 6$ tiene $CR(4,6) = \binom{4+6-1}{6} = 84$ soluciones enteras no negativas.

Intrínsecamente, pues, este problema se puede considerar fácil de resolver puesto que lo hemos podido transformar en otro problema del cual conocíamos un método de resolución eficiente.

Operadores lógicos

El operador $\vee$ representa la **O** lógica, mientras que el operador $\wedge$ representa la **Y** lógica. Además, la notación $\overline{x}$ se utiliza para indicar el valor contrario al de x, es decir, $x = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = 1$.

Ejemplo 4-22

Un problema elemental en lógica binaria es el de encontrar alguna solución a una expresión booleana de la forma

$$(x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (\overline{x}_3 \vee x_4) \ldots = 1$$

donde las variables x_i toman valores 0 o 1.

Por ejemplo, la expresión

$$(x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge x_3 = 1 \tag{2.1}$$

tiene como solución $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$.

Aunque este problema es muy parecido al del ejemplo anterior, no se conoce ninguna transformación que nos permita saber, de una manera eficiente, si una ecuación como la (2.1) tiene solución, y en caso afirmativo, cuántas. El único método efectivo consiste en buscar las posibles soluciones de manera exhaustiva.

Si la ecuación tiene pocas variables, entonces el espacio de posibles soluciones es reducido y se puede encontrar la solución (en caso de que la haya) con pocos recursos. El espacio de posibles soluciones de la ecuación (2.1) contiene 2^3 elementos.

Si el número de variables es muy elevado entonces es prácticamente imposible buscar la solución de manera exhaustiva. Para una ecuación con cien variables, el espacio de posibles soluciones contiene 2^{100} elementos. Este problema se considera intrínsecamente difícil.

De manera general podríamos decir que la dificultad de un problema depende de aspectos inherentes al mismo (espacio de búsqueda, modelización, etc.) y de otros aspectos que dependen de la capacidad para encontrar un buen método o algoritmo de resolución.

Observar

La eficiencia de un algoritmo es una medida de su dificultad centrada en la cantidad de recursos que utiliza el algoritmo.

Tanto en un caso como en otro, sería interesante disponer de una “medida” de su dificultad. En los problemas que se pueden resolver mediante un algoritmo, se utiliza el concepto de *eficiencia* (cantidad de recursos que utiliza un algoritmo) como medida de su dificultad. En las secciones siguientes intentaremos precisar más este concepto que aplicamos repetidamente en la asignatura.

2.1.1. Ejercicios

4-23 Supongamos que queremos encontrar, de manera exhaustiva, todas las soluciones enteras, no negativas, de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$, ¿cuál es el cardinal del conjunto de todas las soluciones posibles?

4-24 Calcular el cardinal del conjunto de todas las soluciones posibles de la ecuación booleana

$$x \wedge \overline{x} \wedge y \wedge z = 1$$

y detallar todas las soluciones.

4-25 Consideremos una ecuación booleana con cien variables y supongamos que un ordenador es capaz de verificar mil posibles soluciones por segundo. Calcular el tiempo necesario para verificar las posibles soluciones de la ecuación.

2.1.2. Soluciones

4-23 Cada variable puede tomar valores x_i, donde $0 \leq x_i \leq n$. Así, el conjunto de posibles soluciones tendrá cardinal $(n+1)^m$.

4-24 El cardinal del conjunto de soluciones es $2^3 = 8$ pero no habrá ninguna solución, ya que si $x = 1$ necesariamente $\overline{x} = 0$.

4-25 El espacio de posibles soluciones tiene $2^{100} \cong 10^{30}$ elementos. Si en cada segundo verificamos mil soluciones, necesitaríamos

$$\frac{10^{30}}{10^3} = 10^{27} \text{ segundos} = 0{,}3 \cdot 10^{20} \text{ años}$$

La edad del universo es aproximadamente $15 \cdot 10^9$ años.

2.2. Introducción al análisis de algoritmos

Definición 4.9

Un **algoritmo** es un conjunto de instrucciones, claramente especificadas, que hay que seguir para resolver un problema.

Una vez definido un algoritmo, para resolver un problema es importante determinar la cantidad de recursos (como el tiempo o el espacio de memoria) que el algoritmo consume.

Si un algoritmo tarda un año en resolver un problema, seguramente no será de mucha utilidad. Del mismo modo, si un algoritmo necesita un gigabyte de memoria principal, seguramente tampoco será muy útil.

Para un problema concreto se pueden encontrar diferentes algoritmos que lo resuelvan. Naturalmente, interesa escoger aquel que sea más *eficiente*, es decir, aquel que utilice menos recursos.

Ejemplo 4-26

Los algoritmos siguientes intercambian el contenido de dos variables:

algoritmo *Intercambio1* (a, b) **inicio** $a \leftarrow a + b$ $b \leftarrow a - b$ $a \leftarrow a - b$ **fin**	**algoritmo** *Intercambio2* (a, b) **inicio** $c \leftarrow a$ $a \leftarrow b$ $b \leftarrow c$ **fin**

Recursos utilizados por cada algoritmo:

Intercambio1	*Intercambio2*
2 variables	3 variables
3 asignaciones	3 asignaciones
3 operaciones aritméticas	

Podemos concluir que el primer algoritmo utiliza más recursos temporales (hace más operaciones) y el segundo más recursos espaciales (más memoria).

Esta idea de eficiencia, interpretada como cantidad de recursos, nos permitirá distinguir entre problemas fáciles y problemas difíciles de una manera objetiva. Es importante, antes de empezar, ver cómo podemos calcular la cantidad de recursos utilizados por un algoritmo.

Nos centraremos principalmente en el estudio de los recursos temporales de un algoritmo, es decir, en el tiempo de ejecución del algoritmo. Dado que este tiempo de ejecución depende del sistema de cálculo (ordenador) utilizado, supondremos, para simplificar el análisis, que todas las operaciones elementales tardan el mismo tiempo (en la próxima sección veremos que esta simplificación no representa ninguna debilidad en el análisis).

El ejemplo siguiente nos permitirá ver las bases del análisis del tiempo de ejecución.

Ejemplo 4-27

Este algoritmo calcula la suma de los n ($n \geq 1$) primeros números naturales.

```
1 función Suma(n)
2   inicio
3     parcial ← 0
4     para i ← 1 hasta n
5         parcial ← parcial + i
6     finpara
7     retorno (parcial)
8   fin
```

Las líneas 1, 2 y 8 forman parte de la declaración del algoritmo y se considera que no consumen recursos. Las líneas 3 y 7 consumen una unidad de tiempo cada una (según nuestra suposición que todas las operaciones elementales tardan lo mismo). La línea 5 consta de una suma y una asignación, y se ejecuta n veces. En total tarda $2n$ unidades de tiempo. Finalmente, la línea 4 consta de una inicialización, $n+1$ comparaciones ($y \leq n$) y n incrementos de la variable y. En total, $2n+2$ unidades de tiempo. Sumando el tiempo que se tarda en ejecutar todo el algoritmo obtenemos un total de $2 + 2n + 2n + 2 = 4n + 4$ unidades de tiempo. Diremos, también, que el problema de calcular la suma de los n primeros números naturales tiene un *coste* $T(n) = 4n + 4$ usando el algoritmo propuesto.

Así, pues, en general podemos definir el coste de un algoritmo como:

Definición 4.10

El **coste** de un algoritmo es una función $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, no decreciente, que calcula la cantidad de recursos (temporales y espaciales) que utiliza el algoritmo.

y podemos destacar que:

El coste de un algoritmo...

... es una función natural de variable natural, cuyo valor depende del *tamaño* del problema que se quiere resolver. El objetivo del análisis es estudiar la variación del coste de un problema cuando varía su tamaño.

- El coste de un algoritmo (que incluye el tiempo de ejecución, el espacio de memoria utilizado, etc.) es una función no decreciente, ya que no es posible que el tiempo de ejecución o la memoria disminuya cuando aumenta el número de pasos. En el ejemplo anterior, $T(n) = 4n + 4$.
- La función T es una función que depende del *tamaño* del problema que se quiere resolver (en el ejemplo, la cantidad n de números naturales que queremos sumar).
- el objetivo de este análisis consiste en estudiar cómo varía el coste asociado a la resolución de un problema cuando varía su tamaño. En nuestro ejemplo, si el tamaño se duplica, entonces el coste también se duplica. Es decir, hay una dependencia *lineal* entre el coste de la solución y el tamaño del problema.

En lo que queda de esta sección, cuando hagamos referencia al coste de un algoritmo entenderemos, por defecto, que nos referimos al coste temporal.

A veces no es necesario describir completamente un algoritmo para calcular (de manera aproximada) el coste asociado a la resolución de un problema. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 4-28

Para calcular una potencia entera y positiva, x^n, de un número necesitamos hacer $n-1$ multiplicaciones. Así, podemos decir que un algoritmo, para calcular x^n, necesitaría $n-1$ unidades de tiempo o que el problema de calcular la potencia x^n con este algoritmo tiene un coste $T_M(n) = n - 1$. Por ejemplo, el cálculo de 2^{62} tendría un coste de 61 con este algoritmo.

¿Podemos calcular esta potencia, x^n, con menos multiplicaciones?

Observar que x^5 se puede calcular como $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ o como $x^2 \cdot x^2 \cdot x$. En el primer caso, necesitamos cuatro multiplicaciones, y en el segundo sólo tres. Para calcular x^{62} podríamos proceder de la manera siguiente:

$$\begin{array}{rcl} x^{62} & = & x^{31} \cdot x^{31} \\ x^{31} & = & x^{30} \cdot x \\ x^{30} & = & x^{15} \cdot x^{15} \\ x^{15} & = & x^{14} \cdot x \\ x^{14} & = & x^{7} \cdot x^{7} \\ x^{7} & = & x^{6} \cdot x \\ x^{6} & = & x^{3} \cdot x^{3} \\ x^{3} & = & x^{2} \cdot x \\ x^{2} & = & x \cdot x \end{array}$$

En total hacemos nueve multiplicaciones en lugar de las sesenta y una iniciales. Llamaremos a esta técnica, método de *multiplicar y elevar*.

Para contar el número de multiplicaciones en función de n, tenemos que distinguir dos tipos de valores: si n es par hay una multiplicación de la forma $x^{n/2} \cdot x^{n/2}$; si n es impar hay una multiplicación de la forma $x^{n-1} \cdot x$ y otra de la forma $x^{(n-1)/2} \cdot x^{(n-1)/2}$. Así, el número mínimo de multiplicaciones se obtendrá cuando n sea par y potencia de 2. El coste será $T_{min}(n) = \log_2 n$. El número máximo de multiplicaciones se obtendrá cuando en cada paso n sea impar, es decir, cuando n sea una potencia de 2 menos 1. En este caso, $T_{max}(n) = 2\lfloor \log_2 n \rfloor$.

Este ejemplo pone de manifiesto que:

- Para calcular el coste de un problema no hace falta describir todas las operaciones de un algoritmo. A menudo, será suficiente calcular el coste de las operaciones que consumen más recursos. En el ejemplo, esta operación es la multiplicación.
- La función que representa el coste de un algoritmo no siempre se puede expresar de una forma única. Sin embargo, siempre se pueden calcular los valores máximo y mínimo de la función de coste y los valores de entrada para los cuales estos valores máximo y mínimo se alcanzan. En el ejemplo, el valor mínimo (*mejor caso*) es $\log_2 n$ que se logra cuando n es una potencia de 2 y el valor máximo (*peor caso*) es $2\lfloor \log_2 n \rfloor$ que se logra cuando n es una potencia de 2 menos 1.

Acabaremos esta sección con otro ejemplo que nos muestra una aplicación de las ecuaciones recurrentes al análisis de algoritmos.

Ejemplo 4-29

Uno de los métodos básicos de clasificación es el *método de clasificación por intercambio (burbuja)*. En este método una secuencia de n números almacenados en una tabla se ordenan comparando pares de números consecutivos. Por ejemplo, para ordenar la secuencia $4, 2, 3, 1$ procederíamos a comparar el 4 con el 2. Como el 2 es más pequeño que el 4, intercambiaremos el 4 y el 2. A continuación, compararemos el 4 con el 3 y, de nuevo, procederemos a intercambiar el 4 y el 3. Finalmente, compararemos el 4 con el 1 y también los intercambiaremos:

$$\underbrace{4, 2}, 3, 1 \rightarrow 2, 4, 3, 1$$
$$2, \underbrace{4, 3}, 1 \rightarrow 2, 3, 4, 1$$
$$2, 3, \underbrace{4, 1} \rightarrow 2, 3, 1, 4$$

Al final de este proceso (*paso*) tendremos el 4 correctamente situado después de haber hecho tres comparaciones y tres intercambios. Si repetimos este proceso dos veces más (dos pasos más) conseguiremos ordenar toda la secuencia inicial. Observar que, en cada paso, el número de comparaciones disminuye en una unidad y que no siempre una comparación da lugar a un intercambio.

Procederemos a calcular el número total de comparaciones que hemos hecho (es la operación central del algoritmo) para ordenar n números. Llamemos $T(n)$ al número total de comparaciones que hace falta hacer para ordenar los n números. Tras $n-1$ comparaciones habremos situado el valor más grande al final de la secuencia y nos quedará una secuencia de $n-1$ números para ordenar en el paso siguiente. Esta secuencia necesitará $T(n-1)$ comparaciones para conseguir quedar ordenada. Así, podemos escribir la ecuación recurrente,

$$T(n) = T(n-1) + n - 1, \quad (n \geq 1)$$

además, $T(1) = 0$ puesto que con un solo elemento no hace falta hacer ninguna comparación.

Ésta es una ecuación recurrente lineal de orden 1 que se resuelve usando la técnica iterativa vista en la sección 1.2. En este caso, también se puede resolver, de manera muy sencilla, por otro procedimiento.

Sustituyendo $T(n-1)$ por su valor, $T(n-2) + n - 2$, etc., llegamos a la expresión:

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$$

El resultado de esta suma vale

$$T(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Este resultado indica que el coste para ordenar una secuencia de n números enteros por el método de la burbuja es $n(n-1)/2$.

Suma de n números

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), a los siete años, obtuvo la suma de uno hasta sesenta de manera inmediata cuando se dio cuenta que $1 + 60 = 2 + 59 =$ $= 3 + 58 = \ldots = 30 + 31$ y que se podía calcular la suma agrupando los términos en la forma anterior. Así la suma es $30 \cdot 61 = 1830$. Había descubierto la conocida fórmula:

$$1 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

2.2.1. Ejercicios

4-30 ¿Cuál de las dos versiones del algoritmo de intercambio del ejemplo 4-26 (página 24) parece más adecuada para intercambiar el contenido de dos variables cualesquiera?

4-31 ¿Cuántas unidades de tiempo se precisan para sumar los sesenta primeros números naturales utilizando el algoritmo del ejemplo 4-27 (página 25) ? ¿Sabríais escribir un algoritmo más eficiente para calcular la suma de los n ($n \geq 1$) primeros números naturales?

4-32 Calcular el número de multiplicaciones necesarias para calcular 2^{11}, 2^{15}, 2^{16}, 2^{20} siguiendo el algoritmo de *multiplicar y elevar* (ejemplo 4-28, página 26). Comprobar, en cada caso, que este número de multiplicaciones está acotado por $\lfloor \log_2 n \rfloor$ y $2\lfloor \log_2 n \rfloor$.

4-33 Hacer una tabla comparativa del número de multiplicaciones necesarias para calcular una potencia siguiendo los dos métodos del ejemplo 4-28 (página 26). Tomar los valores de $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Deducir para qué valores de n es preferible utilizar cada uno de los métodos.

4-34 Utilizando la técnica iterativa (confrontar la sección 1.2.) resolver la ecuación recurrente $T(n) = T(n-1) + n - 1$ del ejemplo 4-29 (página 27) con $T(1) = 0$.

2.2.2. Soluciones

4-30 Las dos versiones son prácticamente iguales en cuanto a la eficiencia, pero la primera versión sólo se puede utilizar cuando los datos son de tipo numérico. La segunda versión se puede utilizar para cualquier tipo simple de datos.

4-31 Para sumar los sesenta primeros números naturales necesitaríamos

$$4n + 4 = 4 \cdot 60 + 4 = 244$$

unidades de tiempo.

Podríamos usar el algoritmo siguiente, basado en la fórmula de Gauss, para calcular la suma de los n primeros números naturales

función *Suma*(n)
  inicio
    $parcial \leftarrow n \cdot (n+1)/2$
    retorno $(parcial)$
  fin

Este algoritmo calcula la suma de los n primeros números naturales en cuatro unidades de tiempo (cinco si contamos el **retorno**).

4-32 La tabla siguiente da un resumen del resultado

n	$\lfloor \log_2 n \rfloor$	*multiplicar y elevar*	$2\lfloor \log_2 n \rfloor$
11	3	5	6
15	3	6	6
16	4	4	8
20	4	5	8

4-33 La tabla sería

n	multiplicar	*multiplicar y elevar*
1	0	0
2	1	1
3	2	2
4	3	2
5	4	3
6	5	3

y demuestra que para $n \leq 3$ es indiferente utilizar uno u otro método. A partir de $n = 4$ es mejor el método de multiplicar y elevar.

4-34 Desarrollando los primeros términos obtenemos

$$\begin{aligned}
&T(1) = 0\\
&T(2) = T(1) + 1 = 1\\
&T(3) = T(2) + 2 = 1 + 2 = 3\\
&T(4) = T(3) + 3 = 1 + 2 + 3 = 6
\end{aligned}$$

Según la técnica de resolución iterativa que hemos visto en la primera parte de este módulo, tomamos como hipótesis $T(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$ y ahora procedemos por inducción.

Primero simplificamos $T(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Para $n = 1$ tenemos $T(1) = 0$ y la hipótesis es correcta.

Consideramos la fórmula válida hasta $n = k - 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(k) &= T(k-1) + (k-1) && \text{igualdad válida utilizando la ecuación inicial} \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{2} + (k-1) && \text{hipótesis de inducción} \\ &= (k-1)\left(\frac{k-2}{2} + 1\right) \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \end{aligned}$$

de manera que la hipótesis era correcta.

Por lo tanto, $T(n) = n(n-1)/2$.

2.3. La notación O

Observar

Es muy importante conocer la variación del número de operaciones que hace un algoritmo, a medida que varía el tamaño del problema.

En el análisis de un algoritmo es importante saber exactamente cuántas operaciones se hacen, pero todavía es más importante saber cómo varía este número de operaciones cuando aumenta el tamaño del problema.

En el ejemplo 4-27 (página 25) habíamos visto que el número de operaciones necesarias para sumar los n primeros números naturales era $4n + 4$. Podemos decir, simplemente, que el tiempo de ejecución (coste) es proporcional a n o que crece linealmente con n.

En cambio, si aplicamos directamente la fórmula de la suma (ejercicio 4-31, página 28) entonces el número de operaciones es constante (exactamente 4) independientemente del valor de n.

El algoritmo de multiplicar y elevar (ejemplo 4-28, página 26) es un poco más difícil de analizar dado que el número de operaciones varía. En estas situaciones, se toma el valor del peor caso como medida del coste del algoritmo. Así, podemos decir que el coste será proporcional a $2\lfloor \log_2 n \rfloor$ o que crece como dos veces el logaritmo de n.

Finalmente, el algoritmo de clasificación por el método de la burbuja (ejemplo 4-29, página 27) tiene un coste

$$\frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

y diremos que su coste es proporcional a n^2 o que crece cuadráticamente.

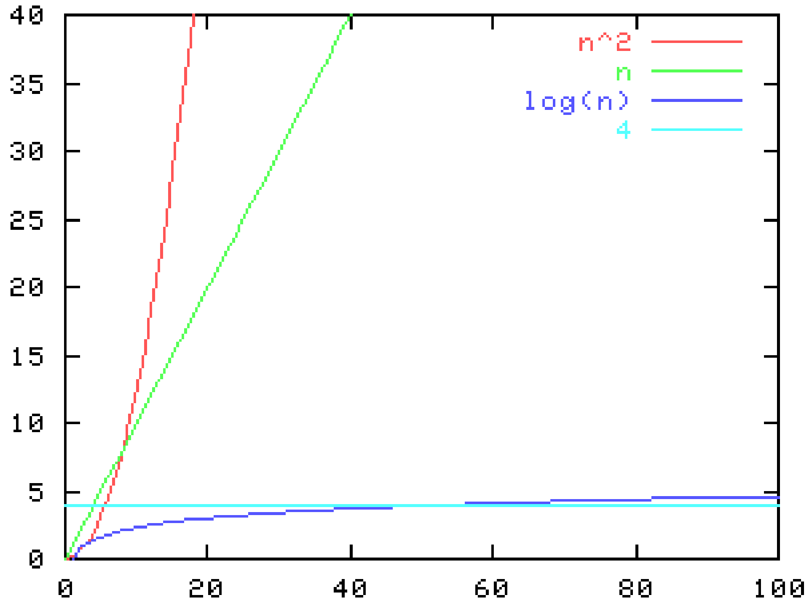


Figura 4-1: Tasas de crecimiento

Definición 4.11

La tasa de crecimiento es el orden de magnitud de la complejidad computacional. Es justamente el término que crece más rápido de la función que nos da la complejidad computacional, según el tamaño n del problema.

La figura 4-1 nos muestra el comportamiento de estas funciones para algunos valores de n. Podemos destacar que, conforme n aumenta, los gráficos se separan y la diferencia entre éstos se hace mayor. Así, podemos decir que la función n^2 es la que tiene mayor *tasa de crecimiento*. A continuación viene la función n, después la función $\log n$ y, finalmente, la función constante 4 es la que tiene menor tasa de crecimiento.

Observar

Las características especiales de la función logarítmica hacen deseable buscar algoritmos de complejidad logarítmica para resolver problemas.

La tabla de la figura 4-2 muestra, numéricamente, la tasa de crecimiento de varias funciones. Observar que para valores pequeños de n las diferencias son pequeñas, pero, conforme n aumenta, las diferencias se hacen mayores. En particular, la función $T(n) = 2^n$ es la que tiene mayor tasa de crecimiento.

Desde el punto de vista del análisis de los algoritmos, todas las funciones que tienen la misma tasa de crecimiento se consideran equivalentes. Las funciones n, $3n + 2$, $n - 1000$ tienen todas la misma tasa de crecimiento y diremos que son del *orden* de n o que tienen una *complejidad del orden de* n. El conjunto de todas las funciones del orden de n se representa por $O(n)$.

Por ejemplo, si la complejidad temporal de un cierto algoritmo es $4n^2 + n + 1$ diremos que la tasa de crecimiento de esta función es del orden de n^2 o que la

$\log n$	n	n^2	2^n
0	1	1	2
1	2	4	4
2.3	5	25	32
3.3	10	100	1024
3.9	15	225	32768
4.3	20	400	1048576
5.6	50	2500	1125899906842620
6.6	100	10000	1267650600228230000000000000000

Figura 4-2: Tasas numéricas de crecimiento

complejidad computacional es $O(n^2)$.

Definición 4.12

Un algoritmo se dice que tiene una **complejidad del orden de** f, y se escribe $O(f)$, si el coste (temporal, espacial, etc.) del algoritmo es una función que tiene la misma tasa de crecimiento que f.

Ejemplo 4-35

1) El algoritmo para sumar los n primeros números naturales tiene una complejidad $O(n)$ si utilizamos el algoritmo del ejemplo 4-27 (página 25). Si aplicamos la fórmula de Gauss, entonces tendrá una complejidad constante que se representa por $O(1)$.

2) El algoritmo para calcular una potencia de exponente entero es un algoritmo lineal, $O(n)$, mientras que el algoritmo de multiplicar y elevar es un algoritmo de complejidad logarítmica, $O(\log n)$.

3) Finalmente, el algoritmo de clasificación por intercambio es un algoritmo cuadrático, puesto que tiene una complejidad del orden de n^2, o sea, $O(n^2)$.

Observemos que $O(f)$ es un conjunto de funciones. Exactamente, todas las funciones que tienen la misma tasa de crecimiento que f. Por ejemplo, $O(n^2)$ contendrá las funciones n^2, n^2+1, $3n^2+n$, $-n^2+2n-1$, etc. Así, podemos escribir $n^2+1 \in O(n^2)$.

Calcular la complejidad de un algoritmo a partir del coste de las operaciones elementales (como hemos hecho en el ejemplo 4-27, página 25) puede ser una tarea complicada si el algoritmo conlleva un gran número de operaciones. Por suerte, hay algunas reglas que nos pueden facilitar este cálculo.

Teorema 4.13

1) Si el coste de un algoritmo es constante, es decir, $T(n) = k$, $k \in \mathbb{N}$ entonces el algoritmo tiene una complejidad $O(1)$.

2) Si el coste de un algoritmo es un polinomio de grado $k \in \mathbb{N}$ en n, o sea $T(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$, entonces el algoritmo tiene una complejidad $O(n^k)$.

3) Si $T_1(n) \in O(f(n))$ y $T_2(n) \in O(g(n))$ entonces $T_1(n) + T_2(n) \in \text{máx}\{O(f(n)), O(g(n))\}$.

4) Si $T_1(n) \in O(f(n))$ y $T_2(n) \in O(g(n))$ entonces $T_1(n) \cdot T_2(n) \in O(f(n) \cdot g(n))$.

Demostración: Consultar, por ejemplo, [1]. ∎

Ejemplo 4-36

Dados dos números enteros x, n, el algoritmo siguiente calcula $x^n/n!$

```
1 función potencia (x, n)
2   inicio
3     pot ← multiplicar_elevar(x, n)
4     fact ← factorial(n)
5     retorno (pot/fact)
6   fin
```

Sólo tenemos que analizar las líneas 3, 4 y 5.

En la línea 3 llamamos al algoritmo de multiplicar y elevar que ya sabemos que tiene una complejidad $O(\log n)$. La asignación de esta línea es constante y, por lo tanto, tiene una complejidad $O(1)$ (regla 1). Ya que primero se ejecuta el algoritmo de multiplicar y elevar y, a continuación, la asignación, podemos aplicar la regla 3 y obtenemos, para la línea 3, una complejidad total $O(\log n)$.

En la línea 4 tenemos una función y una asignación. El cálculo del factorial de un número entero n necesita de $n - 1$ multiplicaciones. Por lo tanto, tendrá una complejidad $O(n)$ (regla 2). La asignación tiene una complejidad $O(1)$. En total, la línea 4 tiene una complejidad $O(n)$ (regla 3).

Finalmente, la línea 5 consta de una división y una operación de retorno del algoritmo. Las dos juntas se ejecutan una única vez. Si aplicamos la regla 1 obtenemos una complejidad $O(1)$.

Resumiendo, tenemos tres líneas que se ejecutan secuencialmente con complejidades $O(\log n)$, $O(n)$ y $O(1)$. Si aplicamos la regla 3 obtenemos una complejidad para todo el algoritmo de $O(n)$, puesto que $f(n) = n$ es la función que tiene la mayor tasa de crecimiento de las tres.

2.3.1. Ejercicios

4-37 Ordenar las funciones siguientes según su tasa de crecimiento

$$2^n, \quad \log n, \quad n^2, \quad (\log n)^2, \quad n^3, \quad \sqrt{n}, \quad n!, \quad n \log n, \quad 6, \quad n$$

4-38 Para cada una de las funciones siguientes indicar a qué orden de complejidad pertenecen. Utilizar, si hace falta, las reglas de cálculo de la complejidad:

$$n - n^5 + 5n^3, 5^n + n^5, 5 + 10^6, \sqrt{n^4 - 2}, n^2 \cdot (\log n + n)$$

4-39 Calcular la complejidad de cada uno de los fragmentos de algoritmo siguientes:

1)
```
1 suma ← 0
2 para i ← 1 hasta n
3     suma ← suma + 1
4 finpara
```

2)
```
1 suma ← 0
2 para i ← 1 hasta n
3     para j ← 1 hasta n
4         suma ← suma + 1
5     finpara
6 finpara
```

3)
```
1 suma ← 0
2 para i ← 1 hasta n
3     para j ← 1 hasta n^2
4         suma ← suma + 1
5     finpara
6 finpara
```

2.3.2. Soluciones

4-37 Utilizaremos el símbolo '$\ll$' para indicar que la tasa de crecimiento es menor:

$$6 \ll \log n \ll (\log n)^2 \ll \sqrt{n} \ll n \ll n \log n \ll n^2 \ll n^3 \ll 2^n \ll n!$$

4-38 $n - n^5 + 5n^3 \in O(n^5)$

$5^n + n^5 \in O(5^n)$

$5 + 10^6 \in O(1)$

$\sqrt{n^4 - 2} \in O(n^2)$

$n^2 \cdot (\log n + n) \in O(n^3)$

4-39 La inicialización de la variable $suma$ tiene un coste 1 y, por lo tanto, una complejidad $O(1)$. La instrucción $suma \leftarrow suma + 1$ tiene un coste de 2 unidades que, de nuevo, es $O(1)$. Así, la complejidad en cada caso, depende de los bucles **para**.

1) La línea 2 tiene una complejidad $O(n)$. Como la línea 3 tiene una complejidad $O(1)$, si aplicamos la regla 4 obtenemos una complejidad $O(n \cdot 1) = O(n)$ para todo el bucle **para**. Si aplicamos la regla 3 obtenemos una complejidad $\max\{O(1), O(n)\} = O(n)$ para todo el algoritmo.

2) La línea 2 tiene una complejidad $O(n)$, la línea 3 tiene una complejidad $O(n)$. Si aplicamos la regla 4 y la 3 obtenemos, $\max\{O(1), O(n \cdot n \cdot 1)\} = O(n^2)$.

3) La línea 2 tiene una complejidad $O(n)$ y la línea 3, $O(n^2)$. Para todo el algoritmo, si aplicamos la regla 3, tendremos una complejidad, $\max\{O(1), O(n \cdot n^2 \cdot 1)\} = O(n^3)$.

Los últimos resultados que hemos visto sobre la complejidad de un algoritmo nos permiten precisar la idea de problema intrínsecamente "difícil".

Definición 4.14

Se dice que un problema pertenece a la clase de problemas *P* (**complejidad polinomial**) si el mejor algoritmo conocido para resolverlo tiene una complejidad $O(P(n))$, donde $P(n)$ es un polinomio en n, el tamaño del problema.

Se dice que un problema pertenece a la clase de problemas *NP* (**complejidad polinomial no determinista**) si el mejor algoritmo conocido para resolverlo, **y con la ayuda de información complementaria**, tiene una complejidad polinomial.

Es evidente que los problemas de la clase P están incluidos en la clase NP pero, actualmente, la comunidad científica todavía desconoce si $P = NP$.

Ejemplo 4-40

La mayoría de problemas que hemos analizado en este capítulo (suma de los n primeros números naturales, cálculo de la potencia entera de un número, clasificación de una secuencia de números, etc.) pertenecen a la clase *P*, puesto que para todos ellos hemos sabido encontrar un algoritmo que tiene una complejidad polinomial.

En cambio, el problema del ejemplo 4-22 (página 23), llamado *SAT*, es un problema que pertenece a la clase *NP*. Para resolver este problema con n variables tendríamos que probar todas las posibilidades y, un algoritmo que lo hiciera así, tendría una complejidad $O(2^n)$, que no es polinomial. No se conoce ningún algoritmo que pueda resolver este problema en un tiempo polinomial. En cambio, si en lugar de considerar el problema genérico sólo consideramos una instancia concreta del mismo (esto sería la información complementaria a que hacíamos referencia en la definición), por ejemplo $x_1 = 0, x_2 = 1, \cdots, x_n = 0$, entonces es fácil (problema de complejidad polinómica) resolver el problema y saber si esta instancia lo satisface o no.

Problemas indecidibles

Hay problemas que son tratables y hay problemas que son intratables, pero todavía puede ser peor: A.Turing demostró que hay problemas **indecidibles**. Son problemas para los cuales es imposible conseguir un algoritmo para resolverlos, aun cuando pudiéramos disponer de una gran capacidad de cálculo o de recursos.

Los problemas que tienen una complejidad polinomial, es decir, que pertenecen a la clase *P*, se consideran computacionalmente *tratables* (fáciles). En cambio, los problemas que pertenezcan a la clase *NP* se consideran computacionalmente *intratables*. El hecho de que muchos problemas estén clasificados actualmente como *NP*, no significa que no pueda haber, en un futuro, algoritmos de clase *P* que los resuelvan (ésta es una línea de investigación actualmente muy activa).

Ejercicios de autoevaluación

4-41 Encontrar una fórmula explícita para la sucesión definida por la siguiente ecuación recurrente de orden 1

$$x_n = x_{n-1} + 2n \qquad \forall n \geq 1,$$

siendo $x_0 = 3$.

4-42 Sea S_n, con $n \geq 1$, la cantidad de maneras de obtener el valor n cuando se suman los términos de una sucesión de unos y doses. Así, por ejemplo, $S_4 = 5$, dado que tenemos las posibilidades $1+1+1+1$; $2+2$; $2+1+1$; $1+2+1$ y $1+1+2$. Formular una ecuación recurrente para obtener S_n.

4-43 Sea x_n $n \geq 1$ el número de vectores binarios de longitud n que no tienen dos unos consecutivos. Formular una ecuación recurrente para obtener x_n.

4-44 Disponemos de un número ilimitado de bloques de 1 cm, 2 cm y 3 cm. de altura. Formular una ecuación recurrente para obtener cuántas torres de altura n se pueden hacer combinando estos bloques, x_n.

4-45 Encontrar y resolver una ecuación recurrente para el número, x_n, de maneras de apilar n fichas, que pueden ser rojas, blancas, verdes o azules, de manera que no haya fichas azules consecutivas. Considerar $x_0 = 1$.

4-46 Se ha cortado un disco circular, en sectores, de forma que nos han quedado $n \geq 2$ sectores diferentes, cada uno en forma de quesito. Cada sector es pintado de un solo color, amarillo, verde, azul o rojo, y no puede haber dos sectores consecutivos con el mismo color. ¿De cuántas maneras diferentes podemos pintar el disco?
(Indicación: formular una ecuación recurrente de orden 2.)

4-47 Resolver las ecuaciones recurrentes:

1)

$$8x_n - 6x_{n-1} + x_{n-2} = 2^n$$

2)

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} - 1; \qquad x_0 = 0,\, x_1 = 1$$

3)

$$x_n + 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = n; \qquad x_0 = 0,\, x_1 = 2$$

4-48 Si sabemos que la sucesión

$$\{x_n\} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, \ldots\} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

se puede expresar mediante una ecuación recurrente lineal y homogénea, de orden 3, se pide determinar la expresión recurrente y calcular el término general para poder hallar x_{99}.

4-49 Calcular la complejidad de cada uno de los fragmentos de algoritmo siguientes:

1)

```
suma ← 0
para i ← 1 hasta n
    para j ← 1 hasta i
        suma ← suma + 1
    finpara
finpara
```

2)

```
suma ← 0
para i ← 1 hasta n
    para j ← 1 hasta i^2
        suma ← suma + 1
    finpara
finpara
```

3)

```
suma ← 0
para i ← 1 hasta n
    para j ← 1 hasta i^2
        si j mód i ≠ 0 entonces
            suma ← suma + 1
        finsi
    finpara
finpara
```

4-50 Los problemas que se pueden resolver mediante algoritmos de complejidad logarítmica son considerados muy eficientes. Esto se debe a las propiedades particulares de la función logaritmo.

1) Demostrar que todas las funciones logarítmicas, $\log_a n$, tienen la misma tasa de crecimiento. Es decir, $\log_a n \in O(\log n)$ para cualquier base de logaritmos que tomemos.

2) La tasa de crecimiento del logaritmo de cualquier función polinómica $log(P(n))$ es $O(\log n)$, donde $P(n)$ representa un polinomio en n.

4-51 Consideremos una secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de números enteros, donde queremos buscar una determinada información b. La manera usual de proceder consiste en comparar consecutivamente b con cada elemento de la secuencia a_i, $i = 1, 2, \ldots$ hasta encontrarlo. ¿Cuál será el número mínimo y el máximo de comparaciones que habrá que hacer para encontrar el número b dentro la secuencia? ¿Cuál es la complejidad de este algoritmo?

Si la secuencia está previamente ordenada, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, entonces podemos proceder de la manera siguiente: comparamos b con $a_{n/2}$. Si $b = a_{n/2}$ hemos acabado la búsqueda. De lo contrario, si $b < a_{n/2}$ seguimos la búsqueda en la subsecuencia $a_1, \ldots, a_{n/2-1}$. Si $b > a_{n/2}$ continuaremos la búsqueda en la subsecuencia $a_{n/2+1}, \ldots, a_n$. ¿Cuál será, en este caso, el número mínimo y máximo de comparaciones que habrá que hacer? ¿Cuál será la complejidad de este algoritmo?

4-52 Para calcular la potencia entera x^n de un número, conocemos un algoritmo muy eficiente que se llama algoritmo de multiplicar y elevar (ver el ejemplo 4-28, página 26).

1) ¿Cuántas multiplicaciones hacen falta para calcular x^8, x^{11}, x^{14}, x^{15}?

2) Obtener la representación binaria de los números enteros 8, 11, 14 y 15.

3) ¿Qué relación hay entre la representación binaria obtenida en el apartado anterior y el número de multiplicaciones calculadas en el primer apartado?

4) Deducir, en función de n, una cota superior para el número de multiplicaciones necesarias para calcular x^n.

5) ¿Cuál es la complejidad del algoritmo de multiplicar y elevar?

4-53 Sea C un conjunto formado por 2^n números enteros, donde $n \geq 1$. Contesta estas cuestiones, que nos van a permitir calcular la cantidad de comparaciones necesarias para determinar los valores máximo y mínimo en C:

1) Si $n = 1$, ¿cuántas comparaciones son necesarias para encontrar el máximo y el mínimo?

2) Si hacemos una partición $C = C_1 \cup C_2$ de manera que C_1 y C_2 contengan la mitad de los elementos de C y $T(n-1)$ es el número de comparaciones necesarias para encontrar el máximo y el mínimo en C_1 (y en C_2), encontrar una ecuación recurrente que relacione $T(n)$ y $T(n-1)$.

3) Resolver la ecuación recurrente obtenida en el apartado anterior y deducir la complejidad del algoritmo para determinar los valores máximo y mínimo en C.

4-54 Determinar una ecuación recurrente para el número mínimo de comparaciones que son necesarias para localizar la coordenada de valor más pequeño en un vector de n coordenadas. Deducir, iterativamente, la forma explícita y demostrar, por inducción, que la forma explícita es correcta.

Solucionario

4-41 Desarrollando los primeros términos obtenemos

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_0 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 \cdot 1\\
&x_2 = x_1 + 2 \cdot 2 = (3 + 2 \cdot 1) + 2 \cdot 2 = 3 + 2(1 + 2)\\
&x_3 = x_2 + 2 \cdot 3 = (3 + 2(1 + 2)) + 2 \cdot 3 = 3 + 2(1 + 2 + 3)\\
&\dots
\end{aligned}
$$

así, podemos tomar como hipótesis

$$x_n = 3 + 2(1 + 2 + \cdots + n).$$

Procedamos por inducción. Para $n = 1$ tenemos $x_1 = 3+2\cdot 1 = 3+2(1)$. Si consideramos la hipótesis cierta hasta $n = k$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + 2(k + 1) = 3 + 2(1 + 2 + \cdots + k) + 2(k + 1)\\
&= 3 + 2(1 + 2 + \cdots + k + (k + 1))
\end{aligned}
$$

de manera que, efectivamente, la hipótesis era correcta para todos los valores.

La suma de los n primeros enteros positivos se puede expresar como

$$(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{(n + 1)n}{2},$$

por lo tanto, podemos escribir la solución de la manera siguiente:

$$x_n = 3 + (n + 1)n.$$

4-42 El total S_n se puede descomponer en dos subtotales. El total de maneras que empiezan por 1 que es, claramente, S_{n-1}, más el total de maneras que empiezan por 2, S_{n-2}. Así

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \qquad \forall n \geq 3$$

siendo $S_1 = 1$ y $S_2 = 2$, puesto que para $n = 2$ tenemos las posibilidades $1 + 1$ y 2.

4-43 El total x_n se puede descomponer en dos subtotales. El número de vectores binarios que empiezan por 0 que es, claramente, x_{n-1}, más los vectores binarios que empiezan por 1. Para estos últimos vectores la siguiente cifra que tomemos tiene que ser un 0, puesto que no puede haber dos unos consecutivos, por lo tanto, hay x_{n-2} vectores binarios que empiezan por 1. Así

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \qquad \forall n \geq 3$$

siendo $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$, puesto que hay dos vectores binarios de longitud 1 y tres vectores binarios de longitud 2 que son $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

4-44 En este caso el total x_n se puede descomponer en tres subtotales. El número de torres, x_{n-1}, que empiecen con un bloque de 1 cm. de altura, el número de torres, x_{n-2}, que empiecen con un bloque de 2 cm y las que empiecen con un bloque de 3 cm, x_{n-3}. Así

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} \qquad \forall n \geq 4$$

siendo $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$.

4-45 El número total de maneras de apilar n fichas x_n se puede descomponer en los casos siguientes. Si empezamos con una ficha roja tenemos x_{n-1} maneras de apilar las fichas, si empezamos con una de blanca tenemos x_{n-1}, si es verde x_{n-1} y, finalmente, si es azul, como no puede haber fichas azules consecutivas, la siguiente tiene que ser roja, blanca o verde, por lo tanto, tenemos $3x_{n-2}$ maneras.

Así
$$x_n = 3x_{n-1} + 3x_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$$
siendo $x_0 = 1$ y $x_1 = 4$.

La ecuación característica de la ecuación recurrente es $t^2 - 3t - 3 = 0$. Las raíces son
$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-3)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

La solución general es
$$x_n = \alpha \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

Si tomamos las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 4$ obtenemos
$$\begin{aligned} x_0 &= 1 = \alpha + \beta \\ x_1 &= 4 = \alpha \left(\tfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right) + \beta \left(\tfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right) \end{aligned}$$

de donde resulta $\alpha = \dfrac{\sqrt{21} + 5}{2\sqrt{21}}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{21} - 5}{2\sqrt{21}}$. Por lo tanto, el término general viene dado por
$$x_n = \frac{\sqrt{21} + 5}{2\sqrt{21}} \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{21} - 5}{2\sqrt{21}} \left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

4-46 Si escogemos un sector cualquiera, entonces S_n, $n \geq 4$, puede ser descompuesto en dos partes, los discos que tienen los dos sectores adyacentes al sector escogido de color diferente y los discos que los tienen del mismo color. En el primer caso, el sector escogido puede ser pintado sólo de dos colores diferentes y el resto de sectores los podemos pintar como si estuviéramos en un disco con $n - 1$ sectores, por lo tanto, lo podemos hacer de $2S_{n-1}$ maneras diferentes. En el segundo caso, el sector escogido lo podemos pintar de tres colores diferentes y el resto de sectores como si fuera un disco con $n-2$ sectores (quitamos el sector escogido y uno de los dos adyacentes, puesto que tienen el mismo color), por lo tanto, lo podemos hacer de $3S_{n-2}$ maneras. Así obtenemos la ecuación recurrente
$$S_n = 2S_{n-1} + 3S_{n-2} \qquad \forall n \geq 4.$$

Si el disco tiene dos sectores, lo podemos pintar de $S_2 = \binom{4}{2} \cdot 2! = 12$ maneras diferentes, puesto que sólo tenemos que escoger dos colores diferentes de un total de cuatro. Si el disco tiene tres sectores, como todos los sectores son adyacentes entre sí, también tenemos que escoger tres colores diferentes de los cuatro. Además, con éstos podemos pintar el disco de dos maneras diferentes, por lo tanto $S_3 = \binom{4}{3} \cdot 3! = 24$.

La ecuación característica de la ecuación recurrente es $t^2 - 2t - 3 = 0$. Las raíces son $t = 3$ y $t = -1$, ya que
$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}.$$
Así, la solución general es
$$S_n = \alpha 3^n + \beta(-1)^n.$$

Si tomamos las condiciones iniciales $S_2 = 12$ y $S_3 = 24$ obtenemos
$$\begin{aligned} S_2 &= 12 = 9\alpha + \beta \\ S_3 &= 24 = 27\alpha - \beta \end{aligned}$$

de donde resulta $\alpha = 1$, $\beta = 3$. Por lo tanto, el término general viene dado por
$$S_n = 3^n + 3(-1)^n.$$

4-47 **1)** La ecuación característica de la ecuación recurrente homogénea

$$8x_n - 6x_{n-1} + x_{n-2} = 0$$

es

$$8t^2 - 6t + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \Big(t - \frac{1}{2}\Big)\Big(t - \frac{1}{4}\Big) = 0$$

por lo tanto, las raíces son $t = \dfrac{1}{2}$ y $t = \dfrac{1}{4}$.

Así, la solución general es

$$x_n = \alpha\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + \beta\Big(\frac{1}{4}\Big)^n + R_n$$

donde R_n es una solución particular de la ecuación recurrente inicial no homogénea. Ensayemos ahora una solución para R_n tomando

$$R_n = c\,2^n$$

y sustituyendo en la ecuación recurrente que tenemos que resolver obtenemos

$$\begin{aligned} 8\,c\,2^n - 6\,c\,2^{n-1} + c\,2^{n-2} &= 2^n \\ 2^{n-2}(8\,c\,2^2 - 6\,c\,2 + c) &= 2^{n-2} \cdot 2^2 \\ 32c - 12c + c &= 4 \end{aligned}$$

que tiene como solución $c = \dfrac{4}{21}$.

La solución general será

$$x_n = x_n = \alpha(\frac{1}{2})^n + \beta(\frac{1}{4})^n + \frac{4}{21}2^n$$

siendo α y β constantes.

2) La ecuación característica de la ecuación recurrente homogénea $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ es

$$t^2 - t - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (t-2)(t+1) = 0$$

por lo tanto, las raíces son $t = 2$ y $t = -1$. Así, la solución general es

$$x_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n + R_n$$

donde R_n es una solución particular de la ecuación recurrente inicial no homogénea. Ensayamos ahora una solución para R_n tomando

$$R_n = c$$

y, sustituyendo en la ecuación recurrente a resolver, tenemos la ecuación

$$c = c + 2c - 1$$

que tiene como solución $c = \dfrac{1}{2}$.

La solución general será

$$x_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n + \frac{1}{2}.$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, formamos el sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 = \alpha + \beta + \tfrac{1}{2} \\ x_1 &= 1 = 2\alpha - \beta + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

que tiene como solución $\alpha = 0$ y $\beta = -\dfrac{1}{2}$. Así, la solución que verifica las condiciones iniciales es

$$x_n = \frac{1}{2}\Big[(-1)^{n+1} + 1\Big].$$

3) La ecuación característica de la ecuación recurrente homogénea

$$x_n + 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0$$

es

$$t^2 + 4t + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (t+2)^2 = 0$$

por lo tanto, hay una única raíz $t = -2$ doble. Así, la solución general es

$$x_n = \alpha(-2)^n + \beta n(-2)^{n-1} + R_n$$

donde R_n es una solución particular de la ecuación recurrente inicial no homogénea. Ensayemos ahora una solución para R_n tomando

$$R_n = c_0 + c_1 n$$

y sustituyendo en la ecuación recurrente que se tiene que resolver obtenemos

$$(c_0 + c_1 n) + 4(c_0 + c_1(n-1)) + 4(c_0 + c_1(n-2)) = n$$

que desarrollando queda

$$(c_0 + 4c_0 - 4c_1 + 4c_0 - 8c_1) + (c_1 + 4c_1 + 4c_1)n = n$$

donde, igualando el termino independiente y el coeficiente de n a ambos lados de la igualdad, se forma el sistema

$$\begin{aligned} 9c_0 - 12c_1 &= 0 \\ 9c_1 &= 1 \end{aligned}$$

que tiene como solución $c_0 = \dfrac{4}{27}$ y $c_1 = \dfrac{1}{9}$.

La solución general será pues

$$x_n = \alpha(-2)^n + \beta n(-2)^{n-1} + \frac{1}{9}n + \frac{4}{27}.$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, formamos el sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 = \alpha + \tfrac{4}{27} \\ x_1 &= 2 = -2\alpha + \beta + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{27} \end{aligned}$$

que tiene como solución $\alpha = -\dfrac{4}{27}$ y $\beta = \dfrac{13}{9}$. Así, la solución que verifica las condiciones iniciales es

$$x_n = -\frac{4}{27}(-2)^n + \frac{13}{9}n(-2)^{n-1} + \frac{1}{9}n + \frac{4}{27}.$$

4-48 Una ecuación recurrente lineal homogénea de orden 3 es de la forma

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + cx_{n-3} \qquad \forall n \geq 3.$$

Se trata de encontrar los coeficientes constantes a, b y c. Para ello sustituimos n por tres valores distintos, mayores o iguales a 3, de manera que podamos formar un sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas

$$\begin{array}{ll} n = 3 & x_3 = ax_2 + bx_1 + cx_0 \\ n = 4 & x_4 = ax_3 + bx_2 + cx_1 \\ n = 5 & x_5 = ax_4 + bx_3 + cx_2 \end{array}$$

Sustituyendo por los términos de la sucesión, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 11 &= 7a + 5b + c \\ 13 &= 11a + 7b + 5c \\ 17 &= 13a + 11b + 7c \end{aligned}$$

que tiene como solución $a = b = 1$, $c = -1$. Por lo tanto, la ecuación recurrente es

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3} \qquad \forall n \geq 3$$

con $x_0 = 1$, $x_1 = 5$ y $x_2 = 7$.

la ecuación característica es

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (t-1)^2(t+1) = 0.$$

Dado que tiene una raíz $t = 1$ de multiplicidad 2 y otra $t = -1$ de multiplicidad 1, podemos formar las tres soluciones

$$x_n = 1^n; \quad x_n = n\,1^{n-1}; \quad x_n = (-1)^n$$

así, la solución general es

$$x_n = \alpha + \beta n + \gamma(-1)^n.$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, formamos el sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 = \alpha + \gamma \\ x_1 &= 5 = \alpha + \beta - \gamma \\ x_2 &= 7 = \alpha + 2\beta + \gamma \end{aligned}$$

que tiene como solución $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = 3$ y $\gamma = -\frac{1}{2}$. Así, la solución que verifica las condiciones iniciales es

$$x_n = \frac{3}{2} + 3n - \frac{1}{2}(-1)^n.$$

Por lo tanto, $x_{99} = \frac{3}{2} + 3 \cdot 99 + \frac{1}{2} = 299$.

4-49 En cada algoritmo contaremos el número de veces que se ejecuta la instrucción

$$suma \leftarrow suma + 1.$$

1) El bucle más interno se ejecuta un número variable de veces, dependiendo del valor de la variable i. Cuando $i = 1$, se ejecuta una vez, cuando $i = 2$, dos veces, etc. En total se ejecutará $1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$ veces. La complejidad será de $O(n^2)$.

2) Cuando $i = 1$ el bucle j se ejecuta una vez. Cuando $i = 2$ el bucle j se ejecuta cuatro veces, etc. En total, se ejecutará:

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \sum_{s=1}^{n} s^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La complejidad será $O(n^3)$.

3) Este caso es como el anterior pero tenemos que restar aquellos valores de j que son múltiplos de i. Entre i y i^2 hay i valores que son múltiplos de i. Por ejemplo, cuando $i = 1$ la línea 5 se ejecuta una vez, cuando $i = 2$ la línea 5 se ejecuta $4 - 2$ veces, cuando $i = 3$ la línea 5 se ejecuta $9 - 3$ veces, etc. En total, se ejecutará:

$$1 - 0 + 4 - 2 + 9 - 3 + \cdots + n^2 - n = \sum_{s=1}^{n} s^2 - \sum_{s=1}^{n} s + 1 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + 1$$

La complejidad será $O(n^3)$.

4-50 La función logarítmica es la inversa de la función exponencial y tiene una tasa de crecimiento muy lenta que la hace muy útil en informática.

1) Todas las funciones logarítmicas tienen la misma tasa de crecimiento independientemente de la base de los logaritmos. Esto es así ya que

$$\log_a n = \frac{\log n}{\log a} = \frac{1}{\log a} \log n \in O(\log n)$$

2) Es suficiente darse cuenta de que

$$\log(n^a) = a \cdot \log n \in O(\log n)$$

4-51 El primer tipo de búsqueda se llama *búsqueda secuencial*. El número mínimo de comparaciones será 1, cuando el valor b que buscamos esté en la primera posición de la secuencia. El máximo número de comparaciones se obtendrá cuando b esté al final o, simplemente, no esté en la secuencia. Habrá que hacer n comparaciones. La complejidad de este algoritmo es $O(n)$.

Si la secuencia está ordenada podemos proceder con el segundo método llamado *búsqueda binaria*. En este caso, el número mínimo de comparaciones será 1 y se obtendrá cuando b esté en la posición $n/2$. El número máximo de comparaciones es un poco más difícil de calcular Observemos que cada vez que hacemos una comparación negativa también hacemos una división de la secuencia por la mitad. Naturalmente, el número máximo de comparaciones se obtendrá cuando b no esté en la secuencia, es decir, cuando hagamos el máximo posible de divisiones. Contemos, pues, el número de divisiones que habrá que hacer. La tabla siguiente muestra el número de elementos que nos quedan por investigar tras cada división:

Divisiones	Elementos
Inicialmente	n
1	$n/2$
2	$n/4$
$\vdots$	$\vdots$
k	$n/2^k$

El proceso de divisiones se acabará cuando quede un solo elemento para investigar, es decir, cuando

$$\frac{n}{2^k} = 1 \Rightarrow k = \log_2 n$$

Por lo tanto, el número de comparaciones será $\log_2 n$ y, por el ejercicio anterior, tendremos una complejidad $O(\log n)$.

Observemos que el algoritmo de búsqueda binaria es mucho más eficiente que el algoritmo de búsqueda secuencial. Observar, también, que esta mejora se obtiene por el hecho de que sabemos que la secuencia ha estado previamente ordenada. Por ello, es conveniente ordenar previamente cualquier secuencia sobre la que haga falta hacer búsquedas: listas de alumnos, listas de teléfonos, archivos en un disco, etc.

4-52 En el algoritmo de multiplicar y elevar hacemos una multiplicación si n es impar y elevamos al cuadrado si n es par.

1) El número de multiplicaciones es 3, 5, 5, 6

2) Las representaciones binarias son 1000, 1011, 1110 y 1111

3) Observar que el número de multiplicaciones coincide con $\lfloor \log_2 n \rfloor +$ número de 1 (menos 1) en la representación binaria de n. Por ejemplo, para calcular x^8 tenemos que hacer 3 multiplicaciones que coincide con $\log_2 8 + 1 - 1$, puesto que la representación binaria de 8 sólo contiene un 1.

Del mismo modo, para calcular x^{11} tenemos que hacer cinco multiplicaciones, o sea, $\lfloor \log_2 11 \rfloor + 3 - 1$.

Observar que la parte $\lfloor \log_2 11 \rfloor$ corresponde al número de veces que elevamos al cuadrado y, $3-1$, al número de veces que multiplicamos.

4) El número de multiplicaciones está acotado por $\lfloor 2\log_2 n \rfloor$

5) Si aplicamos la regla 4 y el primer apartado del problema 4-50 (página 37), deducimos que el algoritmo tiene una complejidad $O(\log n)$.

4-53 Este ejercicio muestra cómo las ecuaciones recurrentes pueden ayudar a calcular la complejidad de un algoritmo.

1) Si $n=1$ entonces C contiene dos elementos y se necesita una sola comparación para determinar el máximo y el mínimo.

2) Si conocemos el máximo (mínimo) de C_1 y el máximo (mínimo) de C_2 necesitamos una comparación más para determinar el máximo (mínimo) de C. La ecuación recurrente será

$$T(n) = 2T(n-1) + 2 \quad (n \geq 2), \quad T(1) = 1$$

3) Esta ecuación se resuelve utilizando la técnica de las ecuaciones recurrentes. La solución es $T(n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$. Para hacer el cálculo de la complejidad observemos que, aunque hemos calculado el número de comparaciones en función de n, nuestro problema tiene tamaño 2^n. Así, escribimos $N = 2^n$ y el número de comparaciones será $\frac{3}{2}N - 2$ que tiene una complejidad $O(N)$, es decir, tiene una tasa de crecimiento lineal en el tamaño del conjunto C.

4-54 Si encontramos el valor más pequeño de entre $n-1$ números y añadimos otro número, sólo tenemos que hacer una comparación más entre el mínimo que ya habíamos encontrado y el nuevo valor. Si sabemos cuántas comparaciones son necesarias para encontrar el valor más pequeño de un vector de $n-1$ coordenadas, x_{n-1}, entonces

$$x_n = x_{n-1} + 1 \qquad \forall n \geq 2$$

con $x_1 = 0$, puesto que con un solo número no hace falta hacer ninguna comparación.

Para encontrar la fórmula explícita, desarrollamos los primeros términos

$$\begin{aligned} &x_2 = x_1 + 1 = 1 \\ &x_3 = x_2 + 1 = 2 \\ &x_4 = x_3 + 1 = 3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

así, podemos tomar como hipótesis

$$x_n = n - 1.$$

Procedamos por inducción. Para $n=1$ tenemos $x_1 = 0$. Si consideremos la hipótesis cierta hasta $n=k$ podemos escribir

$$x_{k+1} = x_k + 1 = k - 1 + 1 = k$$

lo que demuestra que la hipótesis era correcta.

Bibliografía

1. Skiena, Steven S. (1998). *The Algorithm Design Manual.* Berlín: Springer-Verlag.

Fundamentos de grafos

Ramon Masià
Jaume Pujol
Josep Rifà
Mercè Villanueva

P06/75006/01398

www.uoc.edu

Índice

Introducción

Este módulo es una iniciación a la teoría de grafos, en la que se presentan las definiciones básicas, se demuestran los primeros resultados (entre los que se encuentra la fórmula de los grados), se ven algunos grafos importantes, se analizan algunas operaciones que pueden llevarse a cabo con grafos, se estudia el problema de la existencia de un grafo y, finalmente, se trata el tema del almacenamiento de grafos, problema de gran interés para la algorítmica y la programación.

Es posible que esta disciplina os sea completamente nueva, dado que los puntos de conexión con otras disciplinas matemáticas más usuales son pocos. En todo caso, antes de iniciar su estudio, sería conveniente repasar los contenidos elementales de la combinatoria, cálculo matricial, técnicas de demostración inductiva y, naturalmente, tener cierta madurez matemática.

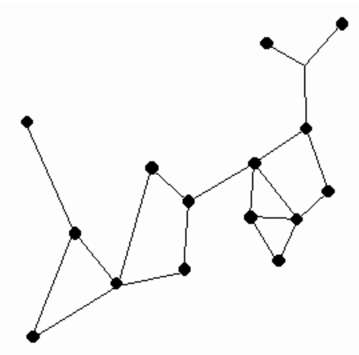
1. Caracterización de un grafo

En muchas situaciones, se establecen una serie de **relaciones** entre diversos **objetos**; un grafo es la estructura constituida por estos objetos y las relaciones que pueden establecerse entre ellos. Los objetos se denominan **vértices** y las relaciones, **aristas**.

Un grafo...

...está formado por vértices (que pueden representar objetos) y aristas que pueden representar las relaciones entre estos objetos).

Los grafos se pueden representar *gráficamente* en el plano; uno de los métodos más utilizados consiste en representar los vértices por **punto** del plano y les relaciones que puedan establecerse entre estos vértices mediante **arcos de curva** (aristas) que los unan (eventualmente segmentos de recta).



Así pues, una situación que involucre objetos, entre los cuales se puede establecer algún tipo de interconexión, se puede describir mediante un grafo: las comunicaciones, las reuniones, la fabricación de circuitos y la coloración de mapas.

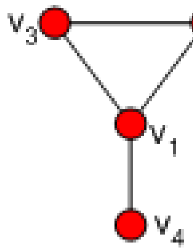
1.1. Grafo

Definición 5.1

Un **grafo** $G = (V, A)$ es una par ordenado (V, A) donde V es un conjunto finito no vacío, cuyos elementos son los **vértices**, y A es un subconjunto del conjunto de parejas no ordenadas (es decir, subconjunto de dos elementos diferentes) de elementos de V; el conjunto A es el conjunto de **aristas**.

Ejemplo 5-1

Se considera el grafo que se representa de la manera siguiente:



En este caso es $G = (V, A)$, donde el conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el conjunto de aristas es $A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}\}$

Notación

Si $a = \{u, v\} \in A$, para simplificar la notación se escribe también $a = uv$ o bien, de forma equivalente, $a = vu$.

1.1.1. Ejercicios

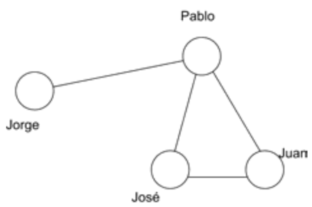
5-2 Proponer un modelo en términos de teoría de grafos (y haced una representación gráfica) de la situación que se describe a continuación. Se consideran las siguientes personas de una clase: Juan, José, Jorge y Pablo. Jorge conoce a Pablo, y Pablo, Juan y José se conocen mutuamente.

5-3 Proponer un modelo de grafos representativo de las comunicaciones por carretera entre diversas ciudades y pueblos, y un segundo modelo representativo de la ausencia de comunicaciones por carretera (es decir, existe una arista entre dos centros si, y sólo si, no están comunicados por una carretera); la situación puede ser ficticia o real.

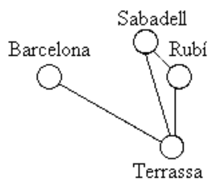
5-4 Considerar una empresa donde hay diversas personas, P_1,P_2,P_3, y una serie de trabajos que se han de realizar, $T_1, \ldots, T_6$, con la posibilidad de que una persona pueda hacer más de una tarea, según sus capacidades. Formular (y dibujar) un modelo en términos de teoría de grafos que recoja la situación de individuos que pueden hacer diferentes tareas, y tareas que puedan ser realizadas por diferentes individuos.

1.1.2. Soluciones

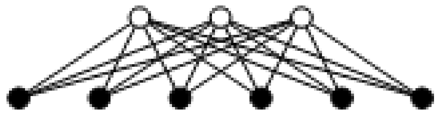
5-2 Un esquema posible sería el siguiente:



5-3 Realmente no hay "una" solución; un posible esquema indicativo, ficticio y trivial, podría ser el siguiente (naturalmente, un modelo real es mucho más complejo):



5-4 Un posible esquema es el del grafo siguiente; corresponde a un tipo de grafo importante, como se verá más adelante: el de los grafos bipartitos, que se dan en muchas situaciones de este tipo de asignaciones de tareas. Las personas y las tareas se indican con vértices de colores diferentes.



1.2. Vértices y aristas

Definición 5.2

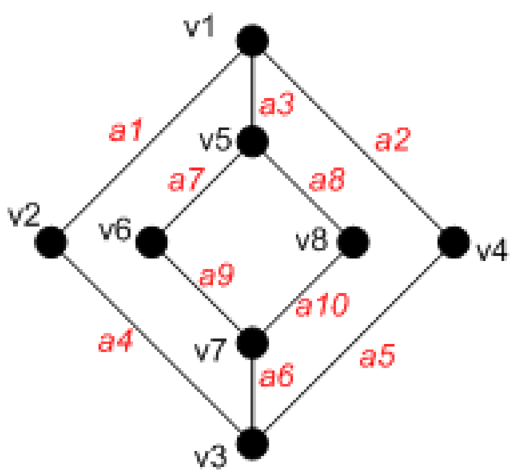
Los vértices $u, v \in V$ son **adyacentes** si, y sólo si, existe la arista uv, es decir, si, y sólo si, $\{u, v\} \in A$. La adyacencia de los vértices u, v se denota $u \approx v$. En este caso se dice que la arista $a = uv$ **une o conecta** los vértices, que son sus **extremos**. Otras denominaciones que indican que los vértices son adyacentes pueden ser:

- Los vértices u, v y la arista uv son **incidentes**.
- Los vértices u y v son vértices **vecinos**.

Igualmente, se dice que dos aristas son **adyacentes** si comparten un extremo.

Ejemplo 5-5

Se considera el grafo siguiente:



Los vértices v_5, v_6 son adyacentes; no lo son los vértices v_6, v_8. Los vértices v_1, v_2 son los extremos de la arista a_1, que se describe como $a_1 = \{v_1, v_2\} = v_1v_2 = v_2v_1$. Las aristas a_4, a_5, a_6 son incidentes con v_3. Las aristas a_2, a_5 son adyacentes.

Las propiedades y algoritmos que relacionan el número de vértices y aristas de un grafo son muy importantes. Para enunciarlas son necesarias algunas definiciones.

Definición 5.3

- Dado un grafo $G = (V, A)$, el **orden del grafo** es el cardinal del conjunto, es decir, el número de vértices del grafo; evidentemente se cumple que $n = |V| \geq 1$.
- La **medida del grafo** es el cardinal del conjunto de aristas, o en otros términos, el número de aristas del grafo; es posible que no haya aristas, de manera que $m = |A| \geq 0$.

No es difícil deducir que:

Proposición 5.4

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2}$$

Definición 5.5

Dado un vértice $v \in V$ del grafo $G = (V, A)$ se define el **grado** $g(v)$ del vértice v como el número de aristas que son incidentes al vértice; de acuerdo con nuestra definición de grafo, el grado coincide con el número de vértices que le son adyacentes, en otros términos

$$g(v) = |\{u \in V \mid v \approx u\}| = |\{u \in V \mid \{u, v\} \in A\}|$$

Los vértices de grado cero se denominan **vértices aislados**.

Ejemplo 5-6

En una reunión de personas, puede describirse el saludo entre los diversos participantes de la reunión como un grafo, cuyos vértices son los asistentes y cuyas aristas son los saludos entre asistentes; el grado de un vértice será el número de personas que ha saludado la persona que representa. Es posible que haya personas que no saluden a nadie, cuyo grado será, evidentemente, 0.

Resulta evidente que:

Proposición 5.6

$$0 \leq g(v) \leq |V| - 1, \quad \forall v \in V$$

Este resultado puede utilizarse para negar la existencia de ciertos grafos.

Ejemplo 5-7

Se observa que no puede existir ningún grafo con la secuencia de grados 2,2,2,3,3,4,8. En efecto, si existiese dicho grafo $G = (V, A)$, se cumpliría que $|V| = 7$ y, si hubiese un vértice v_0 de grado 8, en virtud de la desigualdad anterior, $|V| \geq g(v_0) + 1 \geq$ $\geq 8 + 1 = 9$, cosa que es imposible.

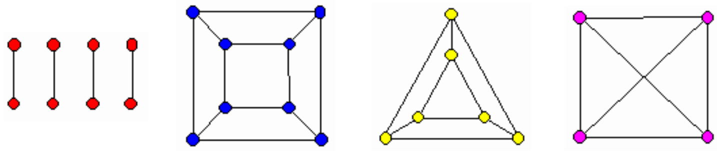
A partir del orden de los vértices de un grafo, puede definirse el grafo regular:

Definición 5.7

Un grafo es **regular** si todos los vértices son del mismo grado; si el grado común es r, entonces se dice que el grafo es r-**regular**.

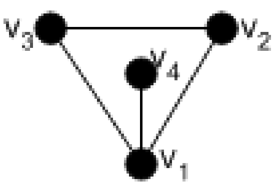
Ejemplo 5-8

A continuación se presentan diversos ejemplos de grafos regulares.



1.2.1. Ejercicios

5-9 Considerar el grafo del esquema adjunto. Describir formalmente el conjunto de vértices y de aristas.



5-10 Representar gráficamente un grafo de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y conjunto de aristas $A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_4\}\}$. Hacer diversas representaciones

5-11 Un grafo 4-regular es como mínimo de orden 5. ¿Es esto cierto?

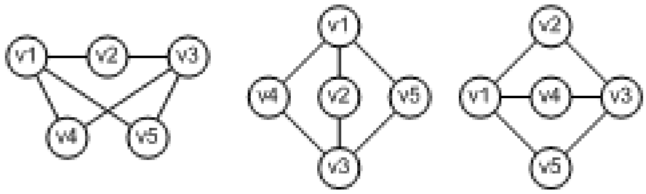
5-12 ¿Qué grafos son 0-regulares?

5-13 ¿Qué medidas son posible, para los grafos de orden 3?

1.2.2. Soluciones

5-9 Es el grafo $G = (V, A)$, con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}\}$

5-10 A continuación se presentan diversas soluciones:



5-11 Cierto, ya que $|V| \geq g(v) + 1 \geq 4 + 1 \geq 5$; en general, si un grafo es r-regular, ha de ser de orden como mínimo $r + 1$.

5-12 Los grafos sin aristas.

5-13 $0 \leq |A| \leq \binom{3}{2} = 3$. Es decir, $0, 1, 2, 3$.

1.3. Subestructuras de un grafo

Definición 5.8

Dado un grafo $G = (V, A)$, un **subgrafo** de G es un grafo $H = (V', A')$ en el que $V' \subset V$,$A' \subset A$, de manera que las aristas del subgrafo unen vértices del subgrafo.

Así, el nuevo conjunto de vértices es un subconjunto del original, y análogamente para las aristas; esto significa que, si dos vértices son adyacentes en H, entonces también lo son mediante una arista persistente en G y, por lo tanto, también son adyacentes en G. En otros términos, si dos vértices de H no son adyacentes en G, tampoco lo son en H, pero es posible que dos vértices de H sean adyacentes en G, y no lo sean en H.

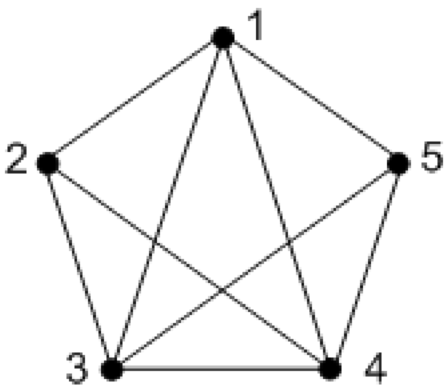
Definición 5.9

- Dado un grafo $G = (V, A)$, se considera un subconjunto $S \subset V$; se define el **subgrafo generado** o **inducido** por S en G como el grafo $\langle S \rangle = (S, A')$, de tal manera que $\{u, v\} \in A' \Leftrightarrow \{u, v\} \in A$ y $u, v \in S$. Así, el conjunto de las aristas de $\langle S \rangle$ son las que, siendo de G, conectan vértices de S.
- Sean $G = (V, A)$ y $H = (V', A')$ dos grafos; se dice que H es **subgrafo generador** o **de expansión** de G si $V' = V$ y $A' \subset A$.

El grado de un vértice u relativo a un subgrafo H se escribe $g_H(u)$.

Ejemplo 5-14

Considerar el grafo representado en la figura:



Un ejemplo de subgrafo puede ser el siguiente: $H = (V', A')$, $V' = \{1, 2, 4, 5\}$, $A' = \{\{2, 4\}, \{4, 5\}\}$. El grado del vértice 4 en el grafo G es 4 y, en cambio, en el subgrafo H el mismo vértice tiene grado 2.

Un subgrafo generador sería, por ejemplo, $H = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{3, 4\}, \{2, 4\}\}\}$.

El subgrafo generado por el conjunto de vértices $S = \{2, 3, 4, 5\}$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es S y el conjunto de aristas es $A' = \{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$.

1.4. Fórmula de los grados

Fórmula de los grados - Teorema 5.10

Dado un grafo $G = (V, A)$, se cumple que

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$$

es decir, la suma de los grados de un grafo es el doble del número de aristas.

Demostración: Tan solo es necesario contar el número de aristas del grafo a partir de las aristas que aporta cada vértice. Cada vértice v aporta al cómputo global de aristas la cantidad de $g(v)$ aristas (cantidad que iguala el grado del vértice), de manera que globalmente el número de aristas sería $\sum_{v\in V} g(v)$ si cada arista no fuese compartida por los dos vértices extremos y, en consecuencia, cada arista es contada dos veces; por lo tanto, la expresión $\sum_{v\in V} g(v)$ cuenta el doble del número de aristas, o sea, $\sum_{v\in V} g(v) = 2|A|$. ∎

Ejemplo 5-15

Se considera un grafo con secuencia de grados 2,2,2,2,2,2,3,1. Se puede calcular fácilmente el número de aristas del grafo sin otra información, y aplicando la fórmula de los grados:

$$|A| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} g(v) = \frac{1}{2}(2+2+2+2+2+2+3+1) = 8$$

Con mucha frecuencia, la fórmula de los grados se utiliza en la resolución de problemas de teoría de grafos; también se utiliza un corolario que es muy fácil de demostrar a partir del lema.

Proposición 5.11

En un grafo cualquiera $G = (V, A)$, el número de vértices de grado impar es par.

Demostración: En efecto, sea P el conjunto de vértices de grado par y S el conjunto de vértices de grado impar, de manera que se tiene la partición $V = P \cup S$. En consecuencia, se puede escribir a partir de la fórmula de los grados:

$$2|A| = \sum_{v\in V} g(v) = \sum_{v\in P\cup S} g(v) = \sum_{v\in P} g(v) + \sum_{v\in S} g(v) = \sum_{v\in P} 2k_v + \sum_{v\in S}(2k_v+1)$$

Esto se debe a que los números pares son de la forma $2k$ y los números impares, de la forma $2k+1$, para un k adecuado, dependiendo del número.

Entonces, a partir de las fórmulas anteriores, se puede escribir

$$2|A| = 2\left(\sum_{v\in P} k_v + \sum_{v\in S} k_v\right) + \sum_{v\in S} 1 = 2\left(\sum_{v\in P} k_v + \sum_{v\in S} k_v\right) + |S|,$$

de donde resulta que el cardinal del conjunto de vértices de grado impar puede escribirse como la diferencia de dos números pares y, en consecuencia, es par:

$$|S| = 2|A| - 2\left(\sum_{v\in P} k_v + \sum_{v\in S} k_v\right)$$

∎

Ejemplo 5-16

No puede existir ningún grafo con esta secuencia de grados: 1,3,3,2,2,2,4. En efecto, si existiese, habría un número impar de vértices de grado impar, cosa que contradiría el corolario de la fórmula de los grados.

Ejemplo 5-17

En una reunión, el número de las personas que saludan a un número impar de personas ha de ser par; es una consecuencia directa del corolario. Se supone que el saludo es mutuo (esto se garantiza en el caso de los apretones de manos).

Ejemplo 5-18

En una clase, el número de alumnos que conocen a un número impar de alumnos (con conocimiento mutuo) es par.

1.4.1. Ejercicios

5-19 En una reunión de ocho personas se producen algunos saludos entre los asistentes. Se supone que dos personas saluden a otras tres, otra persona no salude a nadie, dos personas saluden sólo a una, una persona salude a cuatro, y dos personas saluden a dos. ¿Cuántos saludos se producirían?

5-20 Un asistente a una reunión da la siguiente descripción de la misma: había seis personas; una no conocía a nadie y tampoco saludó a nadie; cada una de las personas restantes saludó a tres asistentes. ¿Puede ser correcta esta descripción?

5-21 ¿Pueden existir grafos $G = (V, A)$ r-regulares con r impar, de orden $|V|$ impar?

5-22 En un grafo 2-regular, el número de aristas y de vértices coinciden. ¿Es esto posible?

5-23 Un grafo con catorce aristas, tres vértices de grado 1, dos vértices de grado 4, un vértice de grado 3 y el resto de grado 2 ha de tener exactamente trece vértices. ¿Es esto cierto?

1.4.2. Soluciones

5-19 8.

5-20 La descripción no puede ser cierta, ya que si así lo fuera, el grafo correspondiente a la reunión tendría secuencia de grados 0, 3, 3, 3, 3, 3, es decir, habría un número impar de vértices de grado impar, en contradicción con el corolario a la fórmula de los grados.

5-21 Se aplica la fórmula de los grados:$2|A| = \sum_{v\in V} g(v) = r|V|$ Se observa claramente una contradicción, ya que el término de la izquierda es par, mientras que el de la derecha es impar, de acuerdo con las hipótesis. Por lo tanto, no puede existir ningún grafo de estas características.

5-22 Es cierto, ya que, por la fórmula de los grados se puede escribir $2|A| = \sum_{v\in V} g(v) =$ $= \sum_{v\in V} 2 = 2|V|$, de donde resulta que $|A| = |V|$.

5-23 Se comprobará la veracidad de la afirmación aplicando la fórmula de los grados, suponiendo que el número de vértices de grado 2 es x; en efecto, se puede escribir $3 + 2 \times 4 + 1 \times 3 + 2x = 2|A| = 28$, de donde $x = 7$; por lo tanto, el número de vértices es 13.

1.5. Algunos grafos importantes

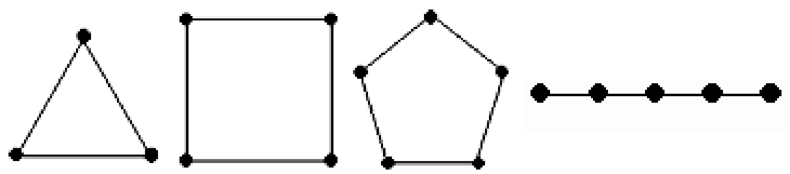
Es necesario conocer alguno de los tipos de grafos más importantes. Los más elementales son:

Definición 5.12

- El **grafo nulo** N_n de orden $n \geq 1$ es el grafo de n vértices y 0 aristas; de manera que $N_n = (V, \emptyset)$, con $|V| = n$. El grafo N_1 se denomina **grafo trivial**. El orden del grafo nulo N_n es n y la medida 0. Es el más simple de todos los grafos.
- El **grafo ciclo** de orden $n \geq 3$ es $C_n = (V, A)$, donde $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_n, v_1\}\} = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{v_n, v_1\}\}$.
- El **grafo trayecto** $T_n = (V, A)$ de orden $n \geq 2$ es el grafo para el que $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\} = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i = 1, \ldots, n-1\}$. El grafo T_n se puede obtener de la eliminación de una arista del grafo ciclo C_n; si, en cambio, se añade una arista a T_n que conecte el primer vértice y el último se obtiene el ciclo C_n.
- El **grafo completo** de orden n es el grafo de n vértices con todas las aristas posibles; es decir, $K_n = (V, A)$, con $|V| = n$ y $|A| = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$.

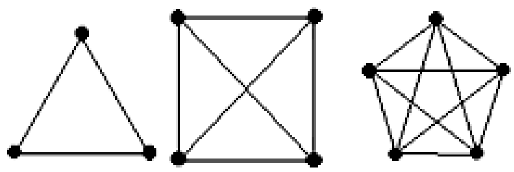
Ejemplo 5-24

Se puede ver en esta figura los grafos ciclo C_3, C_4, C_5. El último grafo es T_5.



Ejemplo 5-25

En las figuras que hay a continuación se puede observar algunas representaciones de los grafos completos K_3, K_4, K_5. Observar que $K_3 = C_3$.



1.5.1. Ejercicios

5-26 ¿Qué grafos ciclos son grafos completos?

5-27 Los únicos grafos 2-regulares son los ciclos C_n. ¿Es esto cierto?

5-28 ¿Hay grafos r-regulares para todo r?

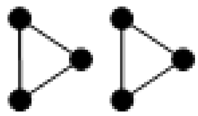
5-29 ¿Cuál es la medida máxima de un grafo de orden 14? ¿Cómo se denomina este grafo?

5-30 ¿Puedes dar un ejemplo de un grafo tal que cada vértice sea incidente con cada arista?

1.5.2. Soluciones

5-26 $C_3 = K_3$

5-27 Falso, como se puede ver en el contraejemplo siguiente (grafo de 6 vértices y 6 aristas, que no es ciclo):



5-28 Sí, el grafo completo K_{r+1} es r-regular.

5-29 La medida máxima es $|A| = \binom{14}{2} = 91$ y corresponde al grafo completo K_{14}.

5-30 El grafo trayecto, T_2.

1.5.3. Los grafos bipartitos

Los grafos bipartitos merecen una atención especial:

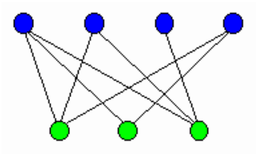
Definición 5.13

Un grafo $G = (V, A)$ es **bipartito** si existe una partición del conjunto de vértices, es decir si $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de manera que las aristas existentes sólo conectan vértices de V_1 con vértices de V_2: es decir, $\{u, v\} \in A$ implica que $u \in V_1$, $v \in V_2$ o $v \in V_1$, $u \in V_2$. De manera equivalente, si $\{u, v\} \in A$, $u \in V_1 \Leftrightarrow v \in V_2$.

En particular, esto significa que no hay aristas que conecten vértices de V_1 ni aristas que conecten vértices de V_2.

Ejemplo 5-31

Este gráfico es un ejemplo de grafo bipartito; se han indicado con colores diferentes los vértices de cada bipartición.



La idea se puede generalizar a los grafos k-partidos. En este caso se tiene una partición $(V_1, \ldots, V_k)$ del conjunto de vértices, de manera que las aristas que hay conectan vértices que pertenecen a conjuntos diferentes de la partición y no hay aristas conectando vértices de un mismo conjunto V_i.

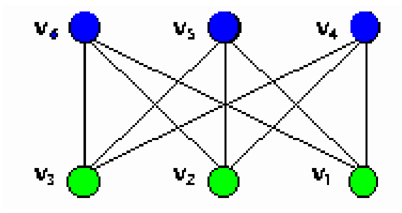
Definición 5.14

El grafo **bipartito completo** $K_{n,m}$ es un grafo $G = (V, A)$ que es bipartito, siendo $|V_1| = n$, $|V_2| = m$, con todas las aristas posibles conectando vértices de V_1 con vértices de V_2.

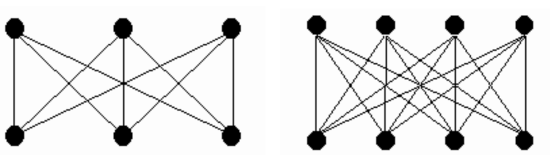
Esto significa en particular que todos los vértices de V_1 son adyacentes a todos los vértices de V_2. En otras palabras, $A = \{\{u, v\} \mid u \in V_1,\ v \in V_2\}$. El orden del grafo es $|V| = n + m$ y su medida es $|A| = nm$. Los vértices de V_1 son todos de grado m y los de V_2 son de grado n. Los grafos bipartitos completos $K_{m,m}$ son m-regulares.

Ejemplo 5-32

Se indican en colores diferentes los vértices de la bipartición, de manera que se tiene $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $V_2\{v_4, v_5, v_6\}$.



Estas figuras son representaciones de $K_{3,3}$, $K_{4,4}$ (de izquierda a derecha).

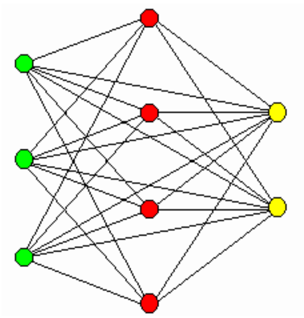


Definición 5.15

En el caso de un grafo k-**partido completo** se tiene una partición del conjunto de vértices en k subconjuntos, de cardinales respectivos $n_1, n_2, \ldots, n_k$, y existen todas las aristas posibles, con la condición de que no haya ninguna arista que conecte vértices de un mismo subconjunto. El grafo correspondiente se representa por $K_{n_1,\ldots,n_k}$.

Ejemplo 5-33

La ilustración corresponde al grafo $K_{3,4,2}$.



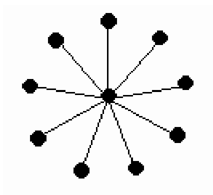
Definición 5.16

El **grafo estrella** E_n de orden n ($n \geq 3$) es un caso particular de grafo bipartito completo, $E_n = K_{1,n-1}$.

el orden del grafo es n y la medida, $n-1$.

Ejemplo 5-34

Este gráfico corresponde a $E_{10} = K_{1,9}$.



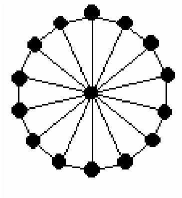
Definición 5.17

El **grafo rueda** R_n de orden n ($n \geq 4$) tiene un único vértice de grado $n-1$ y, si se elimina este vértice y sus aristas incidentes, se obtiene un ciclo de orden $n-1$.

El orden del grafo rueda es n y su medida es $2(n-1)$.

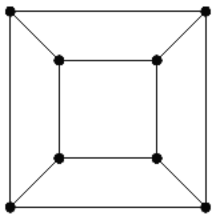
Ejemplo 5-35

Este es el grafo rueda de orden 15: R_{15}.

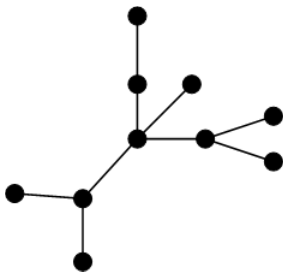


1.5.4. Ejercicios

5-36 Estudiar si el grafo siguiente es bipartito y, en caso afirmativo, representadlo "en forma bipartida", es decir , en forma que deje ver claramente la estructura bipartida.



5-37 Considerar el grafo siguiente, probar que es bipartito y dibujadlo en forma bipartida:



5-38 Considerar un grafo k-partido completo o, más concretamente $(n_1, \ldots, n_k)$-partido completo. ¿Cuál es el orden y la medida del grafo, y cuáles son los grados de los diferentes vértices? ¿Para qué valores es regular el grafo?

5-39 ¿Son bipartitos los grafos ciclo C_n?

5-40 Los grafos trayecto, ¿son todos bipartitos?

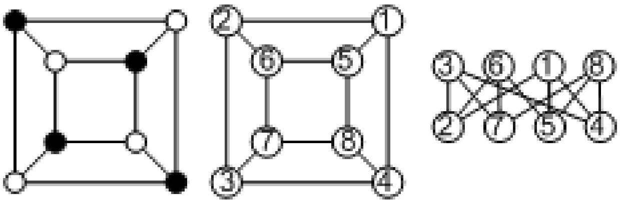
5-41 Indicar algún grafo completo K_n que sea bipartito.

5-42 El grafo trayecto T_3 es un caso especial de grafo estrella. ¿Cierto o falso?

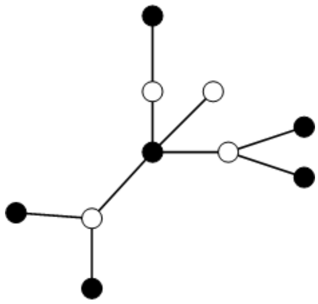
5-43 Buscar un recorrido cerrado sobre el grafo rueda que visite todos los vértices exactamente una vez.

1.5.5. Soluciones

5-36 El grafo es efectivamente bipartito, como se puede ver si se asignan dos colores diferentes a los vértices, de manera que no haya vértices del mismo color adyacentes (ésta es una manera fácil de comprobar si un grafo es o no bipartito); entonces las dos clases de la bipartición son los subconjuntos de vértices del mismo color. Asignando etiquetas a los vértices, también se puede ver una representación que muestra claramente la estructura bipartida.



5-37 Se propone la distribución bipartida de los vértices, que se pone de manifiesto en la bicoloración del esquema siguiente:



5-38 El orden del grafo es $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. La medida del grafo es

$$\frac{1}{2}(n_1(n-n_1) + n_2(n-n_2) + \ldots + n_k(n-n_k))$$

El grafo es regular si $n_i = \frac{n}{k}$, es decir, cuando todas las n_i son iguales. Por lo tanto, el orden del grafo tiene que ser divisible por k.

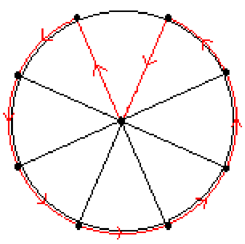
5-39 Depende de la paridad de n (con esta indicación podéis completar la respuesta).

5-40 Cierto.

5-41 K_2. Para $n > 2$ no lo son.

5-42 Cierto, puesto que $T_3 = E_3 = K_{1,2}$.

5-43



1.6. Secuencias gráficas

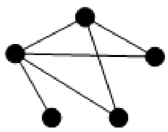
Uno de los primeros problemas que se puede plantear es si, dada una secuencia de números enteros, es posible construir un grafo que la tenga como secuencia de grados. A partir de la fórmula de los grados, es fácil darse cuenta de que esto no siempre es posible.

Definición 5.18

Una secuencia de números enteros no negativos, $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ se denomina **secuencia gráfica** si existe un grafo $G = (V, A)$ de orden n tal que s es la secuencia de grados de G.

Ejemplo 5-44

La secuencia $s : 4, 3, 2, 2, 1$ es una secuencia gráfica. Corresponde al grafo,



Ejemplo 5-45

La secuencia $s : 4, 3, 3, 2, 1$ no es una secuencia gráfica, puesto que no cumple el corolario de la fórmula de los grados.

De la definición de grado de un vértice y de la fórmula de los grados, se pueden establecer dos condiciones necesarias para la existencia de un grafo dada una secuencia de enteros no negativos $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$:

1) $d_i \leq n - 1$, por $1 \leq i \leq n$.

2) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ tiene que ser par.

Ahora bien, estas condiciones no son suficientes.

Ejemplo 5-46

La secuencia $s : 4, 4, 4, 2, 1, 1$ tendría que corresponder a un grafo de orden 6. Cumple las dos condiciones anteriores. En cambio, no hay ningún grafo que tenga esta secuencia de grados. Esto demuestra que las condiciones anteriores son necesarias pero no suficientes.

Caracterización de Havel-Hakimi - Teorema 5.19

Una secuencia $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ de números enteros no negativos, con $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, es una secuencia gráfica si, y sólo si, la secuencia $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ es gráfica.

Demostración: Ver [1]. ∎

Ejemplo 5-47

Según esta caracterización, la secuencia del ejemplo $s : 4, 4, 4, 2, 1, 1$, será gráfica si lo es la secuencia que resulta de eliminar el primer término (4) y restar 1 a los cuatro siguientes; por lo tanto, la secuencia $s : 4, 4, 4, 2, 1, 1$ se transforma en $s' : 3, 3, 1, 0, 1$. Debemos establecer ahora si s' es gráfica, es decir, reordenando, si $s' : 3, 3, 1, 1, 0$ es gráfica. El primer término es 3, por lo tanto, debemos restar 1 a los tres siguientes términos; la secuencia resultantte es $s'' : 2, 0, 0, 0$. Pero esta secuencia no se corresponde con ninún grafo, y por ello ni s'', ni s' ni, tampoco, la secuencia s son gráficas.

1.6.1. Algoritmo de Havel-Hakimi

El teorema de Havel-Hakimi permite, de manera recursiva, reconocer si una secuencia es gráfica.

Formulación del algoritmo de Havel-Hakimi

Entrada: una secuencia de números enteros $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$

Salida: dice si la secuencia es gráfica.

Algoritmo:

Si existe $d_i > n - 1$, entonces la secuencia no es gráfica, **fin**.
mientras no haya ningún $d_i < 0$ y s no sea idénticamente 0.
  Clasificar s en orden decreciente.
  Eliminar d_1 de s y restar 1 unidad a los d_1 elementos siguientes.
finmientras
Si existe $d_i < 0$, entonces la secuencia no es gráfica, **fin**.
Si la secuencia resultante es la secuencia idénticamente 0, entonces s es una secuencia gráfica.

Implementación del algoritmo de Havel-Hakimi

Para implementar el algoritmo se observa que en cada iteración la longitud de la secuencia disminuye en una unidad. La secuencia será gráfica si tras $n - 1$ iteraciones se obtiene solamente un 0.

algoritmo *Havel-Hakimi*(s)
inicio
$grafica \leftarrow$ FALSO
clasificar_descendente(s)
si $(\text{máx}(s) \leq n - 1)$
entonces para $i \leftarrow 1$ **hasta** $n - 1$
$pivote \leftarrow d_1$
$s \leftarrow s- < d_1 >$
para $j \leftarrow 1$ **hasta** $pivote$
$d_j \leftarrow d_j - 1$
finpara
si $(pivote <$ LONGITUD$(s))$
entonces *intercalar_descendente*$(s, pivote)$
finsi
finpara
si $(s = 0)$
entonces $grafica \leftarrow$ CIERTO
finsi
finsi
retorno $(grafica)$
fin

Se observa que,

1) La función *clasificar_descendente*(s) ordena s en orden descendente.

2) La función *intercalar_descendente*(s, d_1) ordena s fusionando dos subsecuencias.

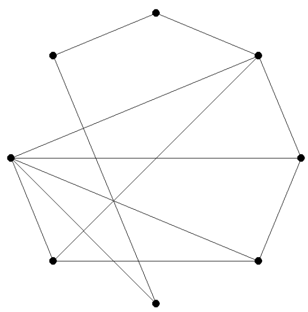
3) Tras $n - 1$ iteraciones la secuencia contendrá un solo elemento.

Ejemplo 5-48

La tabla siguiente muestra la simulación del algoritmo para la secuencia $s : 2, 2, 4, 3, 3, 2, 3, 5$

Iteración	Secuencia	Operación
Inicialmente	2,2,4,3,3,2,3,5	
	5,4,3,3,3,2,2,2	Clasificación
1	3,2,2,2,1,2,2	Primera subsecuencia
	3,2,2,2,2,2,1	Se intercalan subsecuencias
2	1,1,1,2,2,1	Segunda subsecuencia
	2,2,1,1,1,1	Se intercalan subsecuencias
3	1,0,1,1,1	Tercera subsecuencia
	1,1,1,1,0	Se intercalan subsecuencias
4	0,1,1,0	Cuarta subsecuencia
	1,1,0,0	Se intercalan subsecuencias
5	0,0,0	Quinta subsecuencia
Fin		

Por lo tanto, la secuencia es gráfica. Un grafo que tiene esta secuencia de grados es,



Análisis del algoritmo de Havel-Hakimi

Para analizar este algoritmo, se observa que en cada iteración del bucle la longitud de la secuencia disminuye en una unidad. El número total de iteraciones será $n-1$.

Las principales operaciones que se hacen son:

1) Clasificar la secuencia en orden descendente. Esto se puede hacer con los algoritmos clásicos de ordenación como el *quick sort* o el *merge sort* con una complejidad $O(n \log n)$.

2) En el cuerpo del bucle se hacen dos tipos de operaciones:

– Restar una unidad d_1 ($d_1 \leq n-1$) veces.
– Intercalar dos subsecuencias.

Aunque normalmente no se hará una intercalación en cada iteración, se puede suponer el peor de los casos. Es decir, en cada iteración se restan $k-1$ unidades (k es la longitud de la subsecuencia) y se realiza una intercalación. Las intercalaciones se pueden hacer con una complejidad lineal, $O(n)$ y el número de restas será

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

que da una complejidad $O(n^2)$.

Resumiendo, se puede concluir que este algoritmo tiene, en el peor de los casos, una complejidad $O(n^2)$.

1.6.2. Ejercicios

5-49 Usando el algoritmo de Havel-Hakimi decidir si las secuencias siguientes son gráficas

1) $s: 5,5,7,6,4,2,4,5$

2) $s: 2,3,4,5,6,7,8,8,8,8,8,8,8,8,8$

3) $s: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9$

5-50 ¿Puede pasar que grafos con estructuras diferentes tengan la misma secuencia de grados?

5-51 Demostrar que la secuencia de números enteros $2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 1$ es la secuencia de grados de un grafo. Proponer dos ejemplos diferentes de grafos que tengan esta secuencia de grados.

1.6.3. Soluciones

5-49 **1)** Sí que es gráfica:

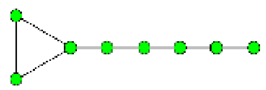
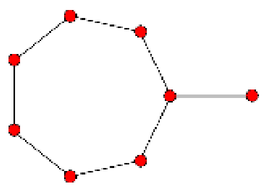
Iteración	Secuencia	Operación
Inicialmente	5,5,7,6,4,2,4,5	
	7,6,5,5,5,4,4,2	Clasificación
1	5,4,4,4,3,3,1	Primera subsecuencia
2	3,3,3,2,2,1	Segunda subsecuencia
3	2,2,1,2,1	Tercera subsecuencia
	2,2,2,1,1	Se intercalan subsecuencias
4	1,1,1,1	Cuarta subsecuencia
5	0,1,1	Quinta subsecuencia
	1,1,0	Se intercalan subsecuencias
6	0,0	Sexta subsecuencia
7	0	Séptima subsecuencia
Fin		

2) No es gráfica.

3) Esta sí que es una secuencia gráfica.

5-50 Considerar un grafo ciclo y el grafo constituido por la reunión de 2 ciclos.

5-51 Se aplicaría el algoritmo de Havel-Hakimi para demostrar que la secuencia es gráfica. Dos posibles grafos que tienen esta secuencia de grados son:

2. Estructura y manipulación de grafos

Muy a menudo es interesante conocer el conjunto de grafos isomorfos entre sí, que son grafos que tienen esencialmente la misma estructura. También es útil conocer modelos de grafos más generales que los que se han presentado hasta ahora, y que surgen de manera natural; es el caso de los multigrafos y pseudografos, y también de los grafos orientados.

Por otro lado, es conveniente disponer de herramientas que permitan manipular grafos, básicamente con el fin de transformar un grafo o de combinar dos o más grafos. Finalmente, se estudiará uno de los grandes problemas prácticos: la representación y almacenamiento de un grafo en términos de estructuras de datos.

2.1. Transformar un grafo

Dado un grafo $G = (V, A)$ se pueden hacer manipulaciones diversas:

1) Eliminar un vértice $u \in V$. Así se obtiene el grafo $G' = G - u$, que es el grafo (V', A'), donde $V' = V \backslash \{u\}$ y A' es el conjunto de aristas de G no incidentes con u. Esta operación se puede generalizar trivialmente a un conjunto $W \subset V$: $G' = G - W = (V \backslash W, \{\{a, b\} \mid a, b \notin W\})$. Esta operación sólo tiene sentido si el grafo no es el trivial.

2) Eliminar la arista $a \in A$. Así se obtiene un grafo, con los mismos vértices, definido por $G' = G - a = (V, A \backslash \{a\})$; la operación se puede generalizar trivialmente a un subconjunto de aristas $B \subset A$, en cuyo caso $G - B = = (V, A \backslash B)$.

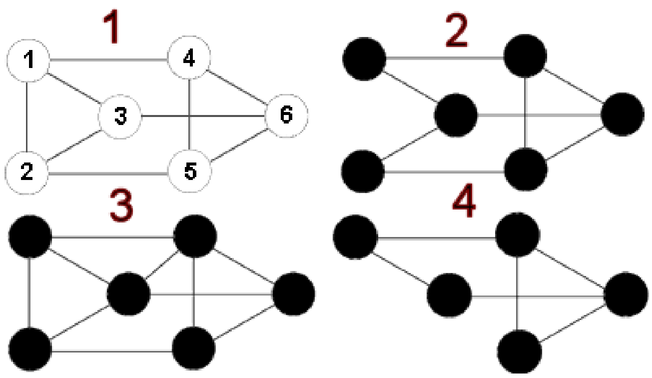
3) Añadir los vértices de un conjunto W tal que $W \cap V = \emptyset$. Así se obtiene un nuevo grafo definido por $G' = G + W = (V \cup W, A)$; en el caso particular de un vértice, la notación se simplifica y se sustituye por $G + u$. Como se verá, esta operación se puede definir en términos de unión con el grafo nulo. Con la adición de vértices no se añaden aristas nuevas.

4) Añadir una arista $\{u, v\}$, siendo u y v dos vértices no adyacentes. Así se obtiene el grafo $G' = (V, A \cup \{\{u, v\}\})$. Este nuevo grafo se puede representar por $G + uv$. El proceso se puede generalizar a conjuntos de más de una arista.

La condición de no adyacencia de los vértices es fundamental, puesto que de lo contrario se crearía una arista múltiple y, por lo tanto, no se estaría en el dominio de los grafos simples, tal y como se ha definido.

Ejemplo 5-52

Sobre el primer grafo se efectúan operaciones de eliminación de vértices y aristas, y de adición de aristas. El cuarto grafo es el resultado de eliminar del original el vértice 2; el segundo grafo resulta de eliminar la arista $\{1, 2\}$ y el tercer grafo se genera con la adición de la nueva arista $\{3, 4\}$.

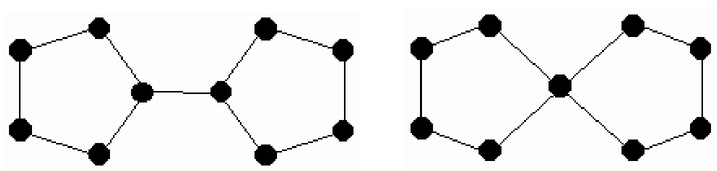


5) Hacer la contracción de la arista $a = \{u, v\}$. En este caso se elimina la arista a, se identifican en un único nuevo vértice w los dos vértices extremos u, v, que desaparecen y, finalmente, el vértice w hereda exclusivamente las adyacencias de los vértices u, v.

La operación de contracción se puede aplicar a todo un conjunto de aristas.

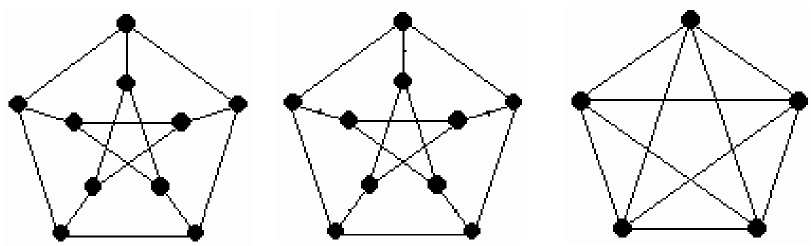
Ejemplo 5-53

Observar en esta figura el resultado de hacer la contracción de una arista del grafo de la izquierda



Ejemplo 5-54

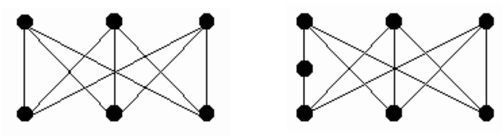
Observar las figuras siguientes, que presentan la contracción de algunas aristas del denominado *grafo de Petersen*, de manera que se deriva el grafo completo K_5 (en la segunda ilustración se marcan las aristas que se contraen):



6) Subdivisión elemental de la arista $a = \{u, v\}$. En este caso se inserta un vértice de grado 2; es decir, dado $w \notin V$, se realizan las operaciones siguientes: eliminación de la arista a, adición del nuevo vértice w y adición de las nuevas aristas $\{u, w\}$ y $\{w, v\}$. También se puede describir como $G - a + w + uw + wv$.

Ejemplo 5-55

Observar el resultado una operación de subdivisión elemental en una arista del grafo $K_{3,3}$.



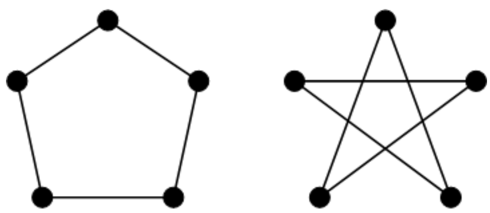
Definición 5.20

Dado el grafo $G = (V, A)$, se define el **complementario** de este grafo, G^c, como el grafo que se construye sobre el mismo conjunto de vértices, de tal modo que dos vértices son adyacentes en G^c si, y sólo si, no lo son en G.

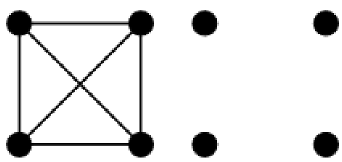
Naturalmente, se cumple que el complementario del complementario es el original: $(G^c)^c = G$.

Ejemplo 5-56

La figura siguiente muestra el grafo C_5 y su complementario (que vuelve a ser C_5).



Y ésta, K_4 y su complementario, N_4.



2.1.1. Ejercicios

5-57 ¿Cuál es el orden y la medida del grafo complementario G^c en términos del orden n y la medida m del grafo original?

5-58 Si G es un grafo de orden n con secuencia de grados $g_1, g_2, \ldots, g_n$, ¿cuál será la secuencia de grados de su complementario, G^c?

5-59 Hay veces en que es necesario estudiar si existen grafos con una determinada secuencia de grados; un procedimiento que se puede aplicar es considerar la secuencia de grados que tendrían los grafos complementarios, si hubiera algún grafo con la secuencia de grados dada. Proponer algún ejemplo donde este procedimiento no aportaría nada nuevo, es decir, donde la secuencia de grados del grafo complementario es la misma que la dada.

5-60 El complementario de un grafo regular, ¿es regular? ¿Se puede afirmar que un grafo es regular si, y sólo si, lo es el complementario?

2.1.2. Soluciones

5-57 El orden es el mismo y la medida es $\binom{n}{2} - m$.

5-58 La secuencia será, $n-1-g_1, n-1-g_2, \ldots, n-1-g_n$.

5-59 Un grafo con secuencia de grados 2, 2, 2, 2, 2 tiene como complementario un grafo con secuencia 2, 2, 2, 2, 2.

5-60 Sí.

2.2. Combinar dos o más grafos

Las operaciones que se presentan a continuación se generalizan fácilmente a más de dos grafos.

Definición 5.21

Dados los grafos $G_1 = (V_1, A1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$, su **unión** es:

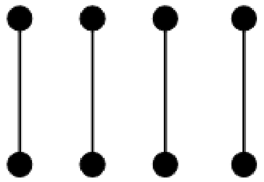
$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$$

Ejemplo 5-61

Si G es un grafo de orden n, entonces $G \cup G^c = K_n$.

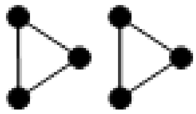
Ejemplo 5-62

El grafo siguiente se puede describir como $K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup K_2$:



Ejemplo 5-63

El grafo siguiente se puede describir como $G = C_3 \cup C_3$:

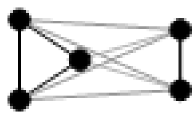


Definición 5.22

Dados los grafos $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$, su **suma** es el grafo que tiene los vértices y las aristas de los grafos originales, más las aristas que conecten todos los vértices del primero con todos los vértices del segundo: $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, (A_1 \cup A_2 \cup \{\{u, v\} \mid u \in V_1,\ v \in V_2\}))$.

Ejemplo 5-64

En el gráfico siguiente se puede ver la suma del 3-ciclo (en negro) con el 2-trayecto (en blanco):



Ejemplo 5-65

Los grafos rueda y estrella se pueden expresar como grafos suma; en efecto, se puede escribir: $R_n = N_1 + C_{n-1}$ y $E_n = N_1 + N_{n-1}$.

Definición 5.23

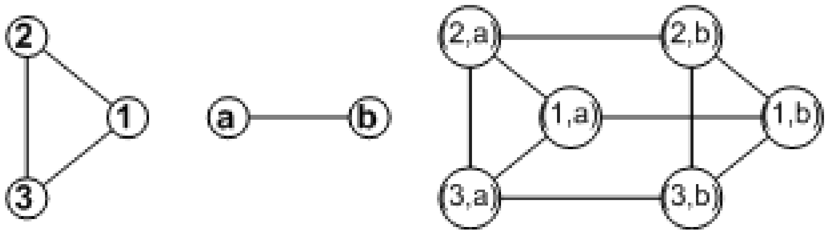
Dados los grafos $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$, se define el **producto** $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, A)$ de manera que los vértices (u_1, v_1), (u_2, v_2) son adyacentes si, y sólo si, se cumple *alguna* de las condiciones siguientes:

1) $u_1 = u_2$ y $v_1 \approx v_2$

2) $u_1 \approx u_2$ y $v_1 = v_2$

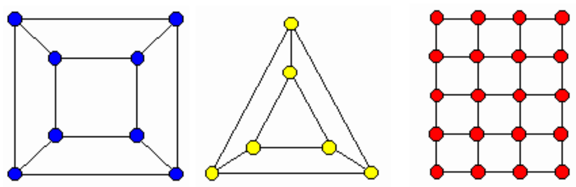
Ejemplo 5-66

El producto de los dos primeros grafos es el tercer grafo:



Ejemplo 5-67

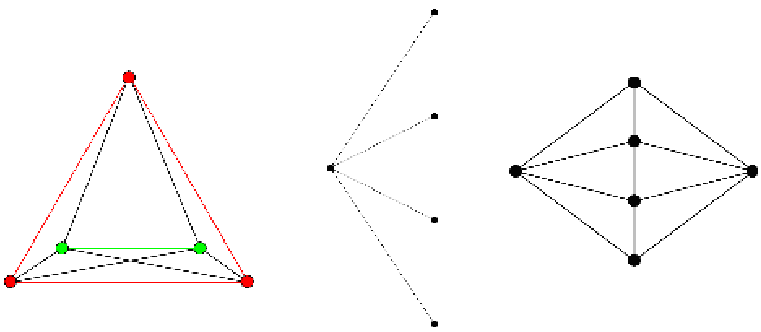
A continuación, se muestran varios ejemplos de grafos producto (de izquierda a derecha): $T_2 \times C_4$, $T_2 \times C_3$, $T_5 \times T_4$.



2.2.1. Ejercicios

5-68 Describir, en términos de las operaciones entre grafos y a partir del grafo nulo, los grafos bipartitos completos $K_{n,m}$.

5-69 Expresar los grafos siguientes en términos de combinaciones de grafos elementales



2.2.2. Soluciones

5-68 $K_{n,m} = N_n + N_m$

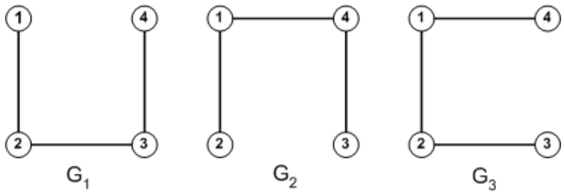
5-69 El grafo de la izquierda es $T_2 + C_3$ (también es $K_4 + N_1$), el central es $N_1 + N_4$, el de la derecha es $N_2 + T_4$.

2.3. Grafos isomorfos

Los grafos se pueden describir de maneras diferentes atendiendo a la numeración o al etiquetado concreto de los vértices, cosa que puede dar lugar a descripciones conjuntistas muy diferentes.

Ejemplo 5-70

Los grafos siguientes,



son grafos con los vértices *etiquetados* y son obviamente diferentes (atendiendo a las etiquetas); en concreto, para todos ellos es $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y, además,

$$G_1 = (V, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\})$$

$$G_2 = (V, \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\})$$

$$G_3 = (V, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}\})$$

que son claramente diferentes, puesto que lo son los respectivos conjuntos de aristas. Aun cuando las estructuras son las mismas, el etiquetado no es irrelevante; puede ser clave para ciertos modelos y aplicaciones si el grafo es el modelo para un proyecto de comunicaciones y los vértices del grafo son poblaciones concretas, entonces es de mucha importancia práctica saber qué vértice queda conectado con cuál o cuáles otros.

Definición 5.24

Dos grafos $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A2)$ son **idénticos** si, y sólo si, $V_1 = V_2$, $A_1 = A_2$.

Dos grafos $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$ son **isomorfos** si, y sólo si, existe una biyección $\varphi : V_1 \to V_2$ que conserva las adyacencias y las no adyacencias, es decir, $u \approx v \Leftrightarrow \varphi(u) \approx \varphi(v)$. En este caso, se dice que φ es un isomorfismo y $G_1 \cong G_2$

Proposición 5.25

Condiciones necesarias de isomorfismo (ninguna de ellas es suficiente):

1) Dos grafos isomorfos son del mismo orden.

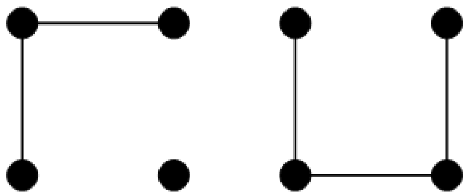
2) Dos grafos isomorfos tienen la misma medida.

3) Si $\varphi : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de los grafos $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$, entonces, por la propiedad de conservación de las adyacencias y las no adyacencias, los vértices correspondientes por la aplicación φ tienen que tener los mismos grados, es decir $g_{G_1}(u) = g_{G_2}(\varphi(u))$; de aquí se deriva, en particular, que las secuencias de grados de dos grafos isomorfos tienen que coincidir. Esta propiedad se puede utilizar para buscar isomorfismos, puesto que sólo pueden asociarse vértices con los mismos grados, cosa que es útil si hay vértices con grados singulares o hay pocos vértices con los mismos grados.

Demostración: Consecuencia inmediata de la definición de isomorfismo entre dos grafos.
∎

Ejemplo 5-71

Un ejemplo simple de aplicación es el caso siguiente; los grafos no son isomorfos porque no son de la misma medida o, alternativamente, porque no tienen la misma secuencia de grados:



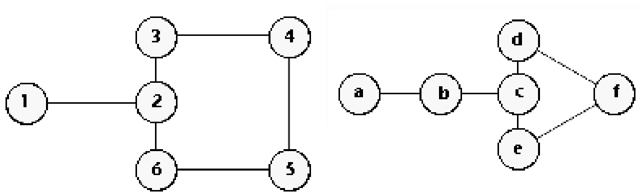
Ejemplo 5-72

Pero estas tres condiciones no son suficientes como lo demuestra el ejemplo siguiente: $G_1 = C_6$, $G_2 = C_3 \cup C_3$, tienen el mismo orden, la misma medida y la misma secuencia de grados, pero no son isomorfos.

La idea general de un isomorfismo es que conserva toda la estructura del grafo, en particular todos los tipos de subgrafos; esto puede ser útil para concluir que dos grafos no son isomorfos. Por ejemplo, si un grafo tiene un triángulo y el otro no, entonces no pueden ser isomorfos.

Ejemplo 5-73

Observar que los grafos de la figura siguiente son del mismo orden, de la misma medida y de la misma secuencia de grados, por lo tanto, la pareja pasa todos los tests anteriores sin que se pueda llegar a ninguna conclusión.

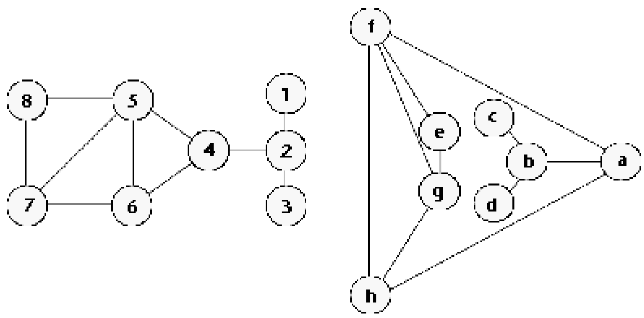


Sea $G_1 = (V_1, A_1)$ el de la izquierda y $G_2 = (V_2, A_2)$ el de la derecha. Se puede comprobar que no son isomorfos: se supone que existe algún isomorfismo $\varphi : V_1 \to V_2$; entonces, dado que los grados de los vértices correspondientes tienen que ser los mismos, la imagen del único vértice de grado 1 de la izquierda tiene que ser el único vértice de grado 1 de la derecha, de manera que $\varphi(1) = a$ y al único vértice de grado 3 de la izquierda debe corresponderle el único vértice del mismo grado de la derecha, de manera que $\varphi(2) = c$; ahora bien, la adyacencia no se conserva, puesto que $1 \approx 2$ y en cambio las imágenes a, c no son adyacentes. Por lo tanto, no puede haber ningún isomorfismo entre los dos grafos.

Se pueden utilizar otros argumentos sobre la estructura: los dos grafos anteriores no pueden ser isomorfos, puesto que el de la izquierda contiene un ciclo C_5, es decir, un subgrafo isomorfo a un 5-ciclo, cosa que no pasa con el de la derecha.

Ejemplo 5-74

Veamos ahora a continuación un ejemplo de isomorfismo; se establecerá la correspondencia isomórfica guiados por la conservación de grados, de adyacencias y no adyacencias. Se indica por G_1 el grafo de la izquierda y por G_2 el grafo de la derecha, y se verá como se puede definir $\varphi : V_1 \to V_2$ de manera que sea un isomorfismo.



El proceso de asignación de imágenes pasa por varias fases:

1) Los vértices de grado 1 tienen que tener como imágenes vértices de grado 1; por lo tanto, hay dos posibilidades (se escogerán la primera y, si conviniera, después se eligiría la segunda):
$$1 \mapsto c \qquad 3 \mapsto d$$

2) el único vértice de grado 4 tiene que tener por imagen el único vértice de grado 4, es decir:
$$5 \mapsto f$$

3) el único vértice de grado 2 tiene que tener como imagen el único vértice de grado 2, es decir:
$$8 \mapsto e$$

4) Falta por asignar las imágenes de los vértices 2,4,6,7, que son de grado 3, a los que corresponderá vértices de grado 3, con criterios de conservación de adyacencias y no adyacencias; 1,3 son adyacentes a 2 y, por lo tanto, la imagen de 2 tendrá que ser adyacente a las imágenes de 1,3, de manera que resultará:
$$2 \mapsto b$$

4 es adyacente a 5,2 y, en consecuencia, la imagen tiene que ser adyacente a las imágenes correspondientes, es decir, a a, de manera que se tendrá

$$4 \mapsto a$$

6 es adyacente a 4,5 y, en consecuencia,

$$6 \mapsto h$$

Finalmente, $7 \mapsto g$ por razones similares.

Una última comprobación permite ver que hay conservación de adyacencias y no adyacencias, y obviamente la correspondencia es biyectiva.

Definición 5.26

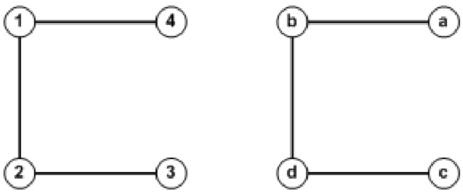
Un grafo es **autocomplementario** si es isomorfo a su complementario.

2.3.1. Ejercicios

5-75 Dos grafos son isomorfos si, y sólo si, lo son los complementarios respectivos. ¿Cierto o falso?

5-76 ¿Cómo se relacionan n y r en el caso de grafos de orden n r-regulares autocomplementarios?

5-77 Establecer una correspondencia isomórfica entre los dos grafos siguientes:



2.3.2. Soluciones

5-75 Cierto.

5-76 n tiene que ser impar y $r = (n-1)/2$.

5-77 $\varphi(1) = b$, $\varphi(2) = d$, $\varphi(3) = c$, $\varphi(4) = a$.

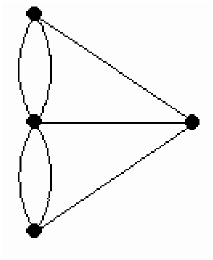
2.4. Multigrafos y pseudografos

Definición 5.27

Un **multigrafo** es un grafo que admite aristas múltiples.

Ejemplo 5-78

En el caso de los puentes de Königsberg, representado más abajo, aparecen aristas múltiples que conectan una pareja de vértices; también aparece esta situación cuando se considera un grafo de comunicaciones entre localidades y hay más de un camino directo que las comunica.



Nota histórica

El estudio de grafos tiene uno de sus momentos fundacionales en el siglo XVIII, con la formulación por parte de Euler del problema de los puentes de Königsberg: consiste en averiguar si hay alguna manera de organizar un recorrido por la ciudad de Köningsberg, con el mismo punto de llegada que de salida y que pase por todos los puentes (aristas del grafo) sin repetir ninguno.

Definición 5.28

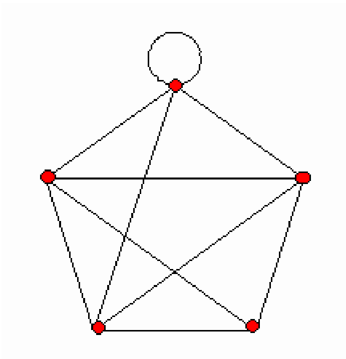
Un **pseudografo** es un grafo que admite aristas del tipo $\{u, u\}$ conectando un vértice consigo mismo (**bucles** o **lazos**), posiblemente de forma múltiple, y también aristas múltiples entre pares de vértices.

Los grados de los vértices se cuentan según la definición original; de ahí que para cada bucle se incrementa en 2 el grado del vértice.

Los grafos *simples* son los que corresponden a la definición original, por contraposición con estas nuevas extensiones.

Ejemplo 5-79

Esta figura representa un pseudografo



2.4.1. Ejercicios

5-80 Indicar la secuencia de grados de los grafos de los puentes de Königsberg.

5-81 Analizar si la fórmula de los grados se puede extender a los multigrafos y pseudografos.

2.4.2. Soluciones

5-80 Grafo de Königsberg: 3,3,3,5.

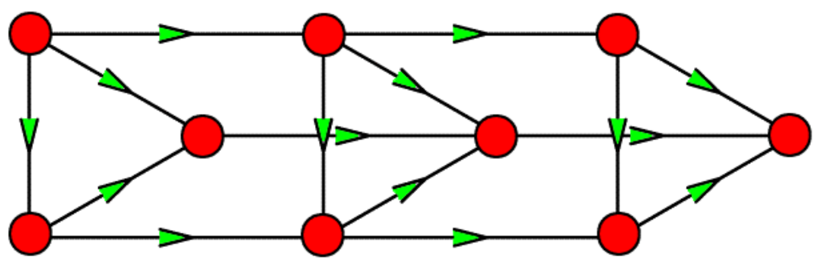
5-81 Sí.

2.5. Grafos orientados

Hay aplicaciones en las cuales las situaciones no se describen correctamente si no se asignan orientaciones o sentidos de recorrido a las aristas del grafo; esto da lugar a grafos orientados, también denominados *dirigidos* o *digrafos*.

Ejemplo 5-82

Esta figura representa un grafo orientado



Definición 5.29

- Un **digrafo** (o **grafo dirigido**) $G = (V, A)$ es un par ordenado, en el que V es un conjunto finito y A es un subconjunto del producto cartesiano $V \times V$.
- Un **arco** o arista orientada, es un par ordenado $(u, v) \in V \times V$; en el caso $u = v$, se tiene un bucle orientado. Las aristas (u, v), (v, u) son diferentes; el **origen** del arco $a = (u, v)$ es el vértice u y el **final** o **extremo** es el vértice v.
- El **orden** del digrafo es el número de vértices y la **medida** es el número de arcos.

Definición 5.30

Para cada vértice $v \in V$ del digrafo se define $g^+(v)$, **grado de salida**, como el número de arcos que tienen el vértice v como origen; o, dicho de otro modo, el cardinal del conjunto $\{(v, u) \mid (v, u) \in A\}$.

Análogamente, el **grado de entrada** $g^-(v)$ es el número de arcos cuyo extremo es el vértice v o, de manera equivalente, el cardinal del conjunto $\{(u, v) \mid (u, v) \in A\}$.

Definición 5.31

Dado el digrafo $G = (V, A)$, se define el **grafo subyacente** (V, A') de manera que $\{u, v\} \in A'$ si, y sólo si, $(u, v) \in A$ o $(v, u) \in A$.

Se pueden considerar también combinaciones de los conceptos anteriores e híbridos, en los cuales por ejemplo no todas las aristas sean orientadas.

2.5.1. Ejercicios

5-83 Indicar cuál es el grado de entrada y salida de cada vértice del grafo del ejemplo 5-82 (página 38).

5-84 Formular una versión para digrafos de la fórmula de los grados en términos de los grados de entrada y de salida de los vértices.

2.5.2. Soluciones

5-83 Grados de entrada: 0, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 3
Grados de salida: 3, 2, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 0.

5-84 $\sum_{v \in V} g^+(v) + \sum_{v \in V} g^-(v) = 2|A|$ o, también, $\sum_{v \in V} g^+(v) = \sum_{v \in V} g^-(v) = |A|$

2.6. Representación y almacenamiento

Ni la representación abstracta ni la representación gráfica de un grafo en el plano son apropiadas para describir el grafo, si se lo quiere manipular mediante un programa; se tienen que proponer métodos alternativos para la descripción y el almacenamiento. En primer lugar, siempre es necesario enumerar los vértices. A continuación, se puede construir la matriz de adyacencias, o bien la lista de adyacencias.

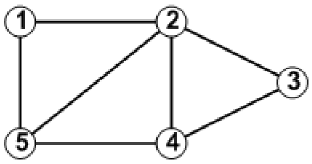
2.6.1. La matriz de adyacencias

Definición 5.32

Dado el grafo $G = (V, A)$, se define la **matriz de adyacencias** de un grafo simple (relativa a una ordenación de los vértices) como la matriz $B = (b_{ij})$ dada por $b_{ij} = 1$ si, y sólo si, los vértices v_i y v_j son adyacentes y $b_{ij} = 0$, en caso contrario.

Ejemplo 5-85

La matriz de adyacencias del grafo



será una matriz cuadrada de orden 5×5

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Observación

La matriz de adyacencias de un grafo simple:

- es simétrica.
- sólo contiene 0 y 1 .
- tiene la diagonal principal ocupada por 0 .

En el caso de multigrafos, pseudografos y grafos orientados, se tiene que tener en cuenta que:

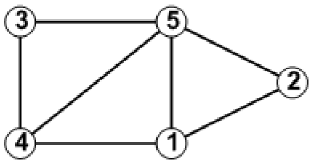
1) Los 0 de la diagonal podrían ser 1 si hubiera lazos.

2) La matriz podría contener valores mayores que uno si hubiera aristas múltiples.

3) La matriz podría no ser simétrica en el caso de grafos orientados.

Ejemplo 5-86

Este ejemplo muestra cómo la matriz de adyacencias depende de una ordenación determinada de los vértices del grafo. Si se modifica la ordenación de los vértices del grafo del ejemplo anterior se obtiene otra matriz de adyacencias:



$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede generalizar el concepto de matriz de adyacencias para multigrafos, pseudografos.

Ejemplo 5-87

La matriz de adyacencias del grafo de Königsberg es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada posición contiene el número de aristas que conectan los dos vértices correspondientes.

Una de las ventajas de la matriz de adyacencias es la simplicidad de la estructura de datos para el almacenamiento, puesto que se puede almacenar en una tabla (*array*) bidimensional.

Para un grafo de orden n sería,

$$G : \underline{\textbf{tabla}}\ [1\,..\,n, 1\,..\,n]\ \textit{entero}$$

De las características de esta estructura de almacenamiento se pueden deducir las propiedades siguientes:

1) Es una estructura muy fácil de manipular y el tiempo necesario para acceder a cada posición es constante.

2) El espacio necesario para almacenar un grafo de orden n es proporcional a n^2. Como que el número de aristas es, como máximo, $\frac{1}{2}n(n-1)$, siempre habrá ceros en la matriz y se tendrà espacio de almacenamiento ocupado innecesariamente.

3) Si el grafo no es dirigido, la matriz será simétrica y todavía se tendrà más espacio ocupado innecesariamente. En estos casos se puede utilizar una **matriz de adyacencias triangular** para almacenar el grafo con un ahorro del 50 % en el espacio ocupado.

Observación

La desventaja principal de la matriz de adyacencias es el espacio ocupado de forma innecesaria.

Observación

La ventaja principal de la matriz de adyacencias es la simplicidad estructural.

2.6.2. La lista de adyacencias

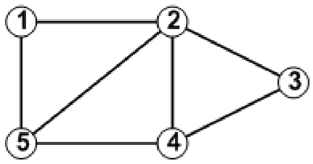
Para evitar el principal inconveniente de la matriz de adyacencias (el espacio ocupado de manera innecesaria) se puede optar por almacenar el grafo en forma de lista de adyacencias.

Definición 5.33

Dado el grafo $G = (V, A)$, se define la **lista de adyacencias** de un grafo simple como una lista de vértices adyacentes a un vértice dado.

Ejemplo 5-88

Para el grafo,



la lista de adyacencias será

1	:	2, 5
2	:	1, 3, 4, 5
3	:	2, 4
4	:	2, 3, 5
5	:	1, 2, 4

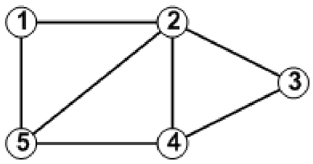
Como en la matriz de adyacencias, la representación depende de la ordenación concreta de los vértices. Además, también se puede generalizar esta estructura para multigrafos, pseudografos y grafos orientados.

Para almacenar la lista de adyacencias se necesita una tabla (*array*) de n punteros, donde el i-ésimo elemento apunta a una lista enlazada de todas las aristas incidentes al vértice i. Para un grafo de orden n sería,

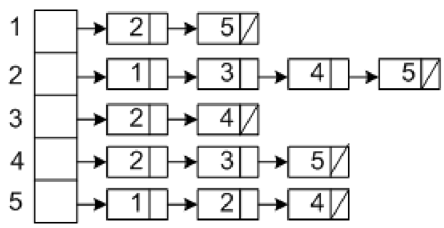
G : **tabla** $[1\,..\,n]$ **puntero** *lista de vértices*

Ejemplo 5-89

Para el grafo



la estructura de datos será,



Comparando esta estructura de datos con la de la matriz de adyacencias se observa que:

1) El espacio necesario para almacenar un grafo de n vértices y m aristas, mediante el uso de una lista de adyacencias, es proporcional a $n + 2m$ ($n + m$ si el grafo es dirigido).

2) La estructura es más difícil de manipular que la matriz de adyacencias. En particular, el tiempo necesario para comprobar si dos vértices son adyacentes no es constante; es proporcional a g_i , si g_i es el grado del vértice i.

3) La elección de una estructura de datos u otra dependerá de las medidas del grafo y de los algoritmos que tengan que utilizarse. Como regla general, la matriz de adyacencias es adecuada para grafos *densos* (los que tienen muchas aristas), en los que $m \sim n^2$. En cambio, la representación como lista de adyacencias es adecuada para grafos poco densos, aquellos que $m << n^2$.

Observación

La desventaja principal de la lista de adyacencias es la dificultad de manipulación.

Observación

La ventaja principal de la lista de adyacencias es la minimización del espacio de almacenamiento.

En la práctica, aunque la lista de adyacencias es más difícil de manipular, tiene mejor comportamiento en la mayoría de los algoritmos.

2.6.3. Ejercicios

5-90 Escribir las matrices de adyacencias y las listas de adyacencias (con las ordenaciones naturales de los vértices) de los grafos nulos, completos, bipartitos completos, trayectos, ciclos, estrella y rueda.

5-91 Indicar cómo se puede calcular el grado de un vértice a partir de la matriz de adyacencias y a partir de la lista de adyacencias. Indicar, también, el número de operaciones elementales que serían necesarias.

5-92 ¿Cómo puede detectar un programa los grafos nulos y completos a partir de la matriz de adyacencias?

5-93 Completar la tabla siguiente, indicando, para cada entrada, qué tipo de representación sería la más adecuada (matriz de adyacencias o lista de adyacencias) y el número de operaciones elementales que serían necesarias para cada uno de los problemas propuestos.

Problema	Representación	Operaciones
Comprobar si el vértice i es adyacente al vértice j		
Calcular el grado del vértice i		
Añadir una arista entre el vértice i y el vértice j		
Comprobar si el grafo es nulo		
Eliminar la arista entre el vértice i y el vértice j		
Calcular la medida del grafo		
Comprobar si el grafo es regular		

2.6.4. Soluciones

5-90 Sólo se pondrán ejemplos de matrices de adyacencias y listas de adyacencias para casos concretos

Grafo nulo (N_5)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo completo (K_5)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo bipartito completo ($K_{2,3}$)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo trayecto (T_5)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo estrella (E_5)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo rueda (R_5)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo ciclo (C_5)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo nulo (N_5)	Grafo completo (K_5)	Grafo bipartito completo ($K_{2,3}$)
1 :	1 : 2, 3, 4, 5	1 : 3, 4, 5
2 :	2 : 1, 3, 4, 5	2 : 3, 4, 5
3 :	3 : 1, 2, 4, 5	3 : 1, 2
4 :	4 : 1, 2, 3, 5	4 : 1, 2
5 :	5 : 1, 2, 3, 4	5 : 1, 2

Grafo trayecto (T_5)	Grafo estrella (E_5)	Grafo rueda (R_5)	Grafo ciclo (C_5)
1 : 2	1 : 2, 3, 4, 5	1 : 2, 3, 4, 5	1 : 2, 5
2 : 1, 3	2 : 1	2 : 1, 3, 5	2 : 1, 3
3 : 2, 4	3 : 1	3 : 1, 2, 4	3 : 2, 4
4 : 3, 5	4 : 1	4 : 1, 3, 5	4 : 3, 5
5 : 4	5 : 1	5 : 1, 2, 4	5 : 1, 4

5-91 Si se supone que se calcula el grado del vértice etiquetado i.

Matriz de adyacencias: sumando los términos de la fila i-ésima. Será necesario hacer n operaciones elementales (n sumas).

Lista de adyacencias: contar el número de elementos de la lista i-ésima. Acceder a la lista i-ésima necesita una operación y contar el número de elementos depende del grado g_i del vértice i-ésimo. En total, $g_i + 1$ operaciones elementales.

5-92 Comprobando los elementos de la matriz. Si todos son ceros, es el grafo nulo; si todos son 1, excepto la diagonal, entonces el grafo es completo.

5-93 En esta tabla, n es el orden del grafo, m, la medida y g_i indica el grado del vértice i.

Problema	Representación	Operaciones
Comprobar si el vértice i es adyacente al vértice j	Matriz	1
Calcular el grado del vértice i	Lista	$g_i + 1$
Añadir una arista entre el vértice i y el vértice j	Matriz	1
Comprobar si el grafo es nulo	Lista	n
Eliminar la arista entre el vértice i y el vértice j	Matriz	1
Calcular la medida del grafo	Lista	$2m + n$
Comprobar si el grafo es regular	Lista	$2m + n$

Ejercicios de autoevaluación

5-94 El Sr. Castillo y su mujer invitaron a cuatro parejas a una fiesta. Cuando todos ya habían llegado, algunas de las personas de la sala saludaron (dando la mano) a otras personas del grupo. Naturalmente, ninguna persona dio y la mano a su cónyuge ni ninguna persona dio la mano dos veces a otra persona. Pudo haber personas que no saludasen a nadie.

Al final, el Sr. Castillo, se da cuenta de que ninguno de sus invitados (su mujer incluida) han saludado al mismo número de personas.

Utilizar la teoría de grafos e interpretar y responder a cada una de las preguntas siguientes:

1) ¿Es posible que el Sr. Castillo también diera la mano a un número de personas diferente al de las demás?

2) ¿Es posible que el Sr. Castillo diera sólo un número impar de apretones de manos?

3) ¿Hay alguna persona que no dio la mano a nadie?

4) ¿Cuántas veces dio la mano el Sr. Castillo? ¿Y la Sra. Castillo?

5-95 Probar que cualquier grafo $G = (V, A)$ con un mínimo de dos vértices siempre tiene un mínimo de dos vértices del mismo grado. En otras palabras, no hay ningún grafo de orden superior o igual a 2 con todos los grados de los vértices diferentes.

5-96 Dado un grafo $G = (V, A)$, si k_i es el número de vértices de grado i, indicar qué relaciones hay entre: $|A|$, $|V|$, $\sum_{i \geq 0} ik_i$, $\sum_{i \geq 0} k_i$.

5-97 Sea $G = (V, A)$ un grafo de orden $n \geq 10$ tal que todos los vértices son de grado estrictamente mayor que 5. Probar que el número de aristas del grafo es mayor o igual que 30.

5-98 Sea $G = (V, A)$ un grafo de n vértices, t de los cuales son de grado k y el resto, de grado $k + 1$. Probar que $t = (k + 1)n - 2m$, siendo m el número de aristas.

5-99 Si $G = (V, A)$ es un grafo bipartito de orden n, ¿cuál será el número máximo de aristas de este grafo?

5-100 Demostrar que no puede haber ningún grafo con vértices de grados 3, 3 , 3, 1.

5-101 Estudiar si pueden haber grafos con las secuencias de grados siguientes:

1) 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4

2) 6, 3, 3, 2, 2, 2

3) 4, 4, 3, 2, 1

5-102 ¿Para qué valores de d, entero no negativo, la secuencia

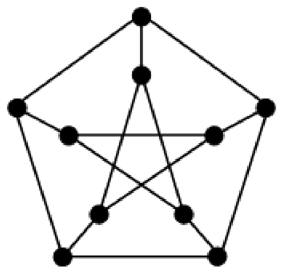
$$d, d + 1, d + 2, \ldots , d + n - 1$$

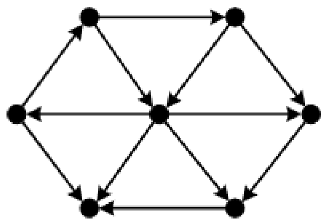
es gráfica?

5-103 Si $G = (V, A)$ es un grafo de orden $n = 6$, demostrar que G o su complementario G^c contiene algún triángulo (3-ciclo).

Este resultado es bastante sorprendente si lo se interpreta en términos de reuniones y relaciones de amistad o conocimiento mutuo entre asistentes a una reunión: en una reunión de seis personas, o bien hay tres que se conocen dos a dos, o bien hay tres que no se conocen dos a dos

5-104 ¿Cuál es la representación en matriz y lista de adyacencias de los dos grafos siguientes?



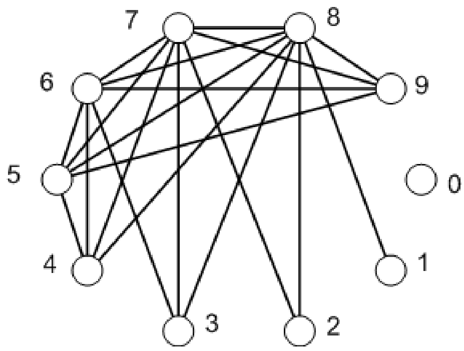


Obtener, también, el espacio ocupado en cada caso.

5-105 Dependiendo de la medida m de un grafo de orden n puede ser más eficiente utilizar la representación en matriz de adyacencias que la representación en lista de adyacencias. Calcular, en función de n y m, cuándo es más eficiente utilizar un tipo de representación u otro.

Soluciones

5-94 A partir de la información del problema se puede construir el grafo siguiente:



La respuesta es consecuencia inmediata de las propiedades del grafo.

5-95 Sea $G = (V, A)$ un grafo de orden n ($n \geq 2$). Ya que para cada vértice $v \in V$ se cumple $0 \leq g(v) \leq n - 1$, sólo pueden existir los grados $0, 1, \ldots, n - 1$. Si todos fueran diferentes, éstos tendrían que ser los grados correspondientes a los vértices del grafo. Pero si un vértice tiene grado $n - 1$ es imposible que otro tenga grado 0.

Una observación interesante es que este resultado se puede interpretar en términos de reuniones y saludos entre asistentes a una reunión de la manera siguiente: en una reunión donde se saluda hay un mínimo de dos personas que han hecho el mismo número de saludos. Esto es fácil de ver con el modelo siguiente de la reunión en términos de teoría de grafos: los vértices representan los asistentes a la reunión y dos vértices son adyacentes si, y sólo si, las personas correspondientes se saludan; el grado de cada vértice es el número de saludos de la persona correspondiente. Sólo hace falta aplicar el resultado que se ha demostrado.

5-96 $|V| = \sum_{i \geq 0} k_i$ y $2|A| = \sum_{i \geq 0} ik_i$

5-97 Por hipótesis se tiene que $g(v) \geq 6, \forall v \in V$; ahora se puede aplicar la fórmula de los grados:

$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) \geq \sum_{v \in V} 6 = 6|V| \geq 6 \times 10 = 60$$

Inmediatamente se deriva el resultado que se debe demostrar.

5-98 se puede escribir $V = V_k \cup V_{k+1}$, V_k es el conjunto de vértices de grado k y V_{k+1} es el conjunto de vértices de grado $k + 1$. Aplicando la fórmula de los grados se obtiene la relación $2m = kt + (k + 1)(n - t)$. De la relación obtenida se deriva inmediatamente la relación buscada.

5-99 Si x es el número de vértices del conjunto V_1, entonces $n - x$ será el número de vértices de V_2. El número total de aristas será $x(n - x)$. Por lo tanto, hace falta maximizar la función $f(x) = x(n - x)$. La solución será $\lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor$.

5-100 Se demostrará por medio de dos métodos diferentes,

Método A. Si existe un grafo G con la secuencia de grados 3, 3, 3, 1; también debería existir el grafo G^c con la secuencia de grados 0, 0, 0, 2, obviamente imposible.

Método B. Aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi:

3, 3, 3, 1
2, 2, 0
1,-1

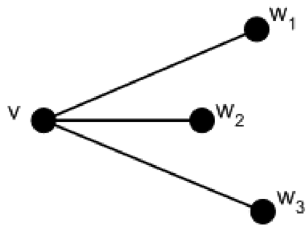
5-101 **1)** No, porque contradice el corolario de la fórmula de los grados.

2) No, porque no cumple la relación $0 \leq g(v) \leq n-1$.

3) No, aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi.

5-102 La única posibilidad es que $d = 0$ y la secuencia quedaría $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Pero, por la definición de grado, no puede haber un vértice de grado 0 y otro de grado $n-1$.

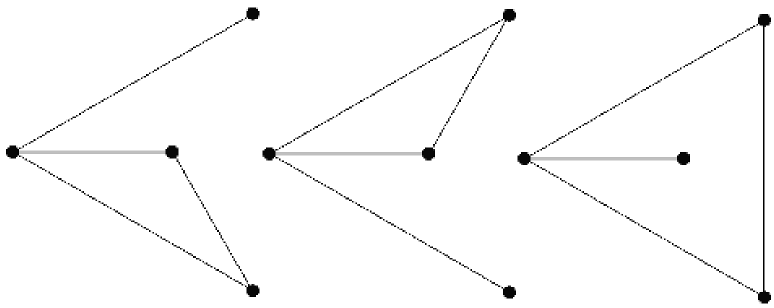
5-103 Sea $v \in V$. Se puede suponer que v es adyacente a tres vértices de G, como mínimo. En efecto, si esto no fuera así, es decir, si no hubiera tres vértices adyacentes a v, habría como máximo dos de adyacentes con v y, por lo tanto, quedaría un mínimo de tres no adyacentes con v en G, los cuales serían adyacentes a v en el grafo complementario G^c. Esto quiere decir que, fijado $v \in G$, hay tres vértices adyacentes con v a G, o bien hay tres vértices adyacentes con v a G^c.



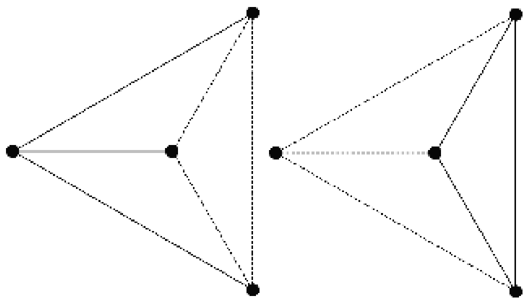
En cualquiera de los casos se seguirían razonamientos similares; por ello, no hay pérdida de generalidad al suponer que v es adyacente con tres vértices a G, como mínimo.

Sean w_1, w_2, w_3 vértices adyacentes con v en el grafo G.

Si alguno de los w_i es adyacente a algún otro de los w_j, entonces ya se tiene el 3-ciclo o triángulo, cuya existencia se había que demostrar, como se puede ver en los esquemas que siguen:



De lo contrario, se resultará la situación del esquema de más abajo (subfigura izquierda), donde las aristas inexistentes se han indicado con trazo discontinuo; entonces, en el grafo complementario G^c, los vértices w_1, w_2, w_3 son adyacentes dos a dos , demostrando así la existencia de un 3-ciclo, como se ve en la subfigura derecha del esquema siguiente, donde se han indicado con línea discontinua las aristas inexistentes.



5-104 El primer grafo es el grafo de Petersen que tiene orden 10 y medida 15. En la representación en matriz de adyacencias ocuparía $10^2 = 100$ unidades de memoria. Como lista de adyacencias ocuparía $10 + 2 \cdot 15 = 40$ unidades de memoria .

El segundo grafo es un grafo dirigido de orden 7 y medida 12. En la representación en matriz de adyacencias ocuparía $7^2 = 49$ unidades de memoria. Como lista de adyacencias ocuparía $7 + 12 = 19$ unidades de memoria .

5-105 La matriz de adyacencias necesita n^2 unidades de memoria. La lista de adyacencias $n + 2m$ (si no si tiene en cuenta el espacio necesario para almacenar los enlaces). Por lo tanto, será mejor hacer servir la lista si $n + 2m < n^2$ o $m < \frac{n^2-n}{2}$.

Se observa que $\frac{n^2-n}{2}$ es el número de aristas del grafo completo de n vértices. Esto demuestra que la lista de adyacencias siempre ocupa menos memoria que la matriz de adyacencias, excepto cuando el grafo es completo, caso en el que tienen la misma ocupación de memoria.

Bibliografía

1. Gimbert, J. ***y otros*** (1998). *Apropament a la teoría de grafs i als seus algorismes.* Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida.

Recorridos y conectividad

Ramon Masià
Jaume Pujol
Josep Rifà
Mercè Villanueva

P06/75006/01399

www.uoc.edu

Índice

Introducción

Si una palabra clave tuviera que describir el módulo, ésta sería la de "recorridos" en un grafo, es decir, maneras de "recorrer" un grafo, visitando vértices a través de aristas. Así pues, se analizan los diferentes tipos de recorridos que puede haber, la accesibilidad entre vértices y las distancias. Además, se presentan las propiedades estructurales que garantizan que ciertos tipos de recorridos siempre se podrán realizar y que la accesibilidad se conservará aunque algunas partes del grafo (vértices o aristas desaparezcan).

La teoría y los resultados que se presentan aquí constituyen el marco teórico de importantes aplicaciones y modelados para redes de comunicaciones y problemas de optimización combinatoria.

1. Recorridos

Después de caracterizar los grafos y presentar algunos de los más importantes, conviene estudiar las diversas maneras de recorrerlos. Para ello, se introduce el concepto de recorrido. En primer lugar, será imprescindible enunciar algunos resultados fundamentales sobre recorridos.

Determinados grafos están formados por “una sola pieza”, es decir, que hay algún recorrido entre cualquier par de vértices del grafo; en cambio, hay otros que están formados por “más de una pieza”. Por sus aplicaciones a varios campos, es importante la noción de distancia entre vértices, que se puede definir mediante la conexión entre los mismos.

1.1. Recorrido

Definición 6.1

Un **recorrido** en un grafo simple $G = (V, A)$ es una secuencia de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ con la propiedad de que dos vértices consecutivos en la secuencia deben ser los extremos de una arista de G, es decir, $\{v_i, v_{i+1}\} \in A$. Este recorrido de extremos v_1, v_k se denomina $v_1 - v_k$ **recorrido** o, también, recorrido entre v_1 y v_k.

Si $G = (V, A)$ es un grafo dirigido, un **recorrido orientado** o **dirigido** es una secuencia de vértices $w_1, w_2, \ldots, w_k$ con la propiedad de que dos vértices consecutivos en la secuencia deben ser los extremos de un arco de G, es decir, $(v_i, v_{i+1}) \in A$.

En la secuencia de vértices no se utiliza la numeración de los vértices, sino la numeración correspondiente a su número de orden en la secuencia.

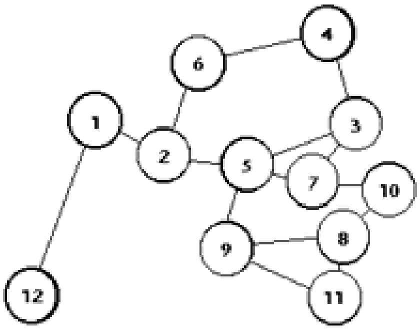
En un pseudografo es posible pasar de un vértice a otro que le sea adyacente por más de una arista; por ello, es necesario indicar un recorrido como una secuencia de aristas, $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$, de manera que dos aristas consecutivas en la secuencia tienen que compartir un extremo.

Definición 6.2

- Un $u - v$ recorrido es **cerrado** si los extremos coinciden, es decir, si $u = v$; en caso contrario se dice que es **abierto**.
- La **longitud de un recorrido** R, $\ell(R)$, es el número de aristas que lo componen. Se cuentan también las que pueda tener repetidas.
- Un **recorrido trivial** o de longitud 0 es el formado por un único vértice.

Ejemplo 6-1

Se considera el grafo representado en la figura.



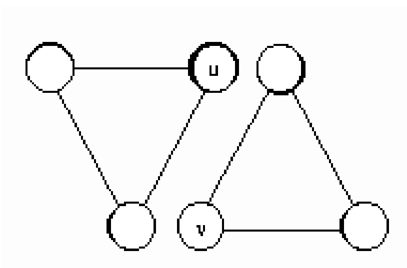
Un recorrido posible sobre este grafo sería el correspondiente a la secuencia de vértices: 12,1,2,6,4,3,7,10,8,11; éste sería un 12-11 recorrido de longitud 9.

Un recorrido cerrado sería: 6,4,3,5,2,6, de longitud 5. Observad que puede haber (dependiendo del grafo) más de un recorrido entre dos vértices: por ejemplo, dos 12-11 recorridos podrían ser: 12,1,2,5,7,10,8,9,11 y también 12,1,2,5,9,11.

Aunque dos recorridos tengan globalmente las mismas aristas, pueden ser diferentes si las aristas se utilizan en órdenes diferentes; por ejemplo, son recorridos diferentes los siguientes: 9,5,3,7,5,2 y 9,5,7,3,5,2.

Ejemplo 6-2

En el grafo representado en la figura



no existe ningún recorrido posible entre dos vértices, en este caso u y v; los vértices en cuestión no son mutuamente accesibles en el grafo $G = C_3 \cup C_3$.

Definición 6.3

Un recorrido es un **itinerario** si todas las aristas son diferentes. Se pueden destacar estos tipos de itinerario:

- Un **camino**, si no se repiten vértices.
- Un **circuito**, si es cerrado.
- Un **ciclo** es un circuito (cerrado) que, eliminando el primer vértice, también es un camino (no repite vértices). Los grafos que no contienen ciclos se denominan **acíclicos**.

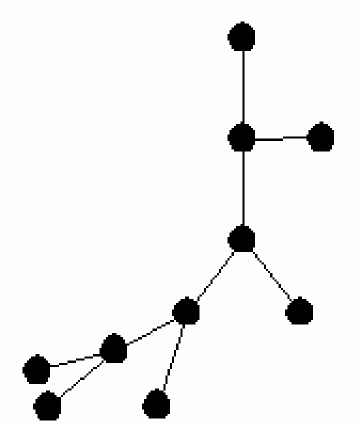
Ejemplo 6-3

En el grafo del ejemplo 6-1 (página 8) se tiene:

Ciclo: 9,8,11,9
Ciclo: 3,5,9,11,8,10,7,3
Circuito: 5,2,6,4,3,5,9,8,10,7,5
No itinerario: 12,1,2,5,3,7,5,2,1,12
No camino: 1,2,5,7,3,5,9,8,11

Ejemplo 6-4

A continuación podéis ver un ejemplo de grafo acíclico:



Ejemplo 6-5

Un árbol, T, es un grafo que cumple que entre dos vértices cualesquiera del grafo, hay un único camino que los conecta. Por ejemplo, el grafo del ejemplo 6-4 es un árbol. Es evidente que un árbol no puede contener ciclos. Los árboles son grafos muy importantes y, por ello, se dedicará un capítulo a estudiarlos

Ejemplo

El árbol genealógico de una familia es un ejemplo de árbol, siempre y cuando dos descendientes del antepasado común no tengan nunca descendencia común.

1.1.1. Ejercicios

6-6 ¿Cuál es la longitud mínima de un ciclo?

6-7 Un ciclo de longitud n de un grafo de orden n, ¿es un subgrafo de este grafo?

6-8 Indicar varios ciclos en el grafo completo K_6.

6-9 ¿Cuál es la longitud del grafo ciclo C_n?

6-10 Indicar si son acíclicos los grafos T_n, C_n, K_n, $K_{n,m}$, R_n, E_n.

6-11 La propiedad de aciclicidad se hereda por parte de los subgrafos de un grafo. ¿Cierto o falso?

6-12 ¿La eliminación de aristas o de vértices de un grafo acíclico produce un nuevo grafo acíclico?

6-13 Si en un recorrido no hay repetición de aristas, ¿puede haber repetición de vértices?

1.1.2. Soluciones

6-6 3.

6-7 Cierto.

6-8 Tiene muchos ciclos: sólo hace falta tomar tres vértices cualesquiera y unirlos dos a dos con aristas diferentes.

6-9 $\ell(C_n) = n$.

6-10 Los acíclicos son T_n, E_n, K_n ($n \leq 2$) y $K_{n,m}$ ($n = 1$ o $m = 1$).

6-11 Cierto.

6-12 Sí.

6-13 Sí.

1.2. Resultados fundamentales

Proposición 6.4

Dados dos vértices diferentes u, v de un grafo $G = (V, A)$, entonces todo $u - v$ recorrido contiene un $u - v$ camino, es decir, un recorrido entre los vértices sin repetición de vértices.

Demostración: Sea R un $u - v$ recorrido del grafo G. Ya que u y v son diferentes se puede suponer que R es abierto, y sea por ejemplo $R: \ u = w_0 w_1, \ldots, w_k = v$, pudiendo contener vértices repetidos. Si no hay ninguno repetido, se ha llegado al final, puesto que

R cumple la condición requerida; se supone, por lo tanto, que hay algún vértice repetido, y sean $i < j$ tales que $w_i = w_j$; entonces se suprimen los vértices $w_i w_{i+1}, \ldots, w_{j-1}$, y resulta un nuevo $u - v$ recorrido R_1 de longitud estrictamente inferior con una repetición de $w_i = w_j$ eliminada (aun cuando todavía pueden quedar más repeticiones del mismo vértice). Si R_1 es un camino, se ha acabado; de lo contrario, el proceso continúa y necesariamente se llega a la conclusión indicada, puesto que la longitud inicial es finita. ∎

Proposición 6.5

Si en un grafo $G = (V, A)$ hay dos recorridos diferentes que conectan un par de vértices, entonces el grafo contiene algún ciclo.

Demostración: Se consideran dos $u-v$ recorridos diferentes: $R_1 : u = w_1 w_2 \ldots w_p = v$ y $R_2 : u = t_1 t_2 \ldots t_q = v$. Informalmente, los recorridos pueden ir compartiendo vértices hasta llegar al primer vértice a partir del cual se separan, es decir, empiezan a ser diferentes; sea, por lo tanto, i el primer índice para el cual $w_i \neq t_i$. Tarde o temprano los recorridos tienen que confluir, finalmente, en el vértice terminal común, que es v, y esto lo harán en el mismo vértice o antes; pero, en todo caso, a partir de un cierto lugar en lo sucesivo, los dos recorridos vuelven a compartir vértices (y aristas, puesto que el grafo es simple). Ahora bien, en un cierto vértice posterior a la bifurcación anterior tienen que volver a coincidir por primera vez; sean, pues, j, k mínimos tales que $i < j \leq p$, $i < k \leq q$, $w_j = t_k$. Entonces el recorrido $w_{i-1} w_i w_{i+1} \ldots w_j t_{k-1} t_{k-2} \ldots t_i w_{i-1}$ es un ciclo. ∎

Teorema 6.6

Si todos los vértices de un grafo $G = (V, A)$ son de grado superior o igual a 2, entonces el grafo contiene algún ciclo.

Demostración: Sea n el orden del grafo; se considera un vértice cualquiera, que se indica por w_1, de grado como mínimo 2 por hipótesis; hay un vértice w_2 adyacente a w_1. Dado que $g(w_2) \geq 2$, hay un vértice w_3 adyacente a w_2 y diferente de w_1. De este modo se podrá construir una secuencia de vértices encadenados. Sea ahora w_i diferente de todos los anteriores y adyacente a w_{i-1}; si w_i es adyacente a alguno de los anteriores (que no sea w_{i-1}), se tiene un ciclo y se ha acabado el problema; si no es así, dado que es de grado superior o igual a 2 , hay un nuevo vértice w_{i+1} diferente de todos los anteriores y adyacente a w_i; por este proceso, necesariamente finito, o bien se produce en algún momento un ciclo y se ha acabado, o bien se van incorporando todos los vértices en un camino que los contiene todos, $w_1, w_2, \ldots w_n$, y se mantienen las propiedades anteriores. Ahora bien, dado que $g(w_1) \geq 2, \ldots, g(w_n) \geq 2$, tienen que ser necesariamente adyacentes y, por lo tanto, se forma un ciclo. ∎

1.2.1. Ejercicios

6-14 ¿Es cierto que un grafo acíclico sin vértices aislados contiene vértices de grado 1?

6-15 Si un grafo es acíclico, entonces entre cada pareja de vértices diferentes hay como máximo un camino. ¿Cierto o falso?

6-16 Demostrar que todo grafo r-regular ($r \geq 2$) contiene un ciclo.

6-17 Poner un ejemplo de grafo acíclico tal que su complementario también sea acíclico.

6-18 Demostrar que si en un grafo de orden n el grado máximo de los vértices es menor que $n-2$, entonces el grafo complementario contiene un ciclo.

1.2.2. Soluciones

6-14 Cierto. Si no tuviera ningún vértice de grado 1 entonces todos los vértices tendrían grado mayor o igual a 2 y tendría que contener un ciclo.

6-15 Cierto. Si hubiera más de un camino, también habría más de un recorrido y entonces contendría algún ciclo.

6-16 Si el grafo es r-regular ($r \geq 2$), entonces todos los vértices son de grado superior o igual a 2 y el grafo contendrá un ciclo.

6-17 Por ejemplo T_3.

6-18 Si G^c es el grafo complementario, entonces $g_{G^c}(v) = n - 1 - g_G(v) \geq 2$ para todo $v \in V$ y, por lo tanto, contiene un ciclo.

2. Algoritmos de exploración de grafos

Para determinar las propiedades de un grafo, a menudo es necesario explorar cada uno de los vértices y de las aristas del grafo en un orden determinado. Desde un punto de vista algorítmico hay básicamente dos procedimientos para hacerlo: el **algoritmo de búsqueda primeramente en profundidad** (**DFS** o *Depth First Search*) y el **algoritmo de búsqueda primeramente en anchura** (**BFS** o *Breadth First Search*).

El algoritmo de búsqueda primeramente en profundidad se aplica a varios problemas de conectividad (buscar componentes conexas o biconexas) y, también, puede comprobar si un grafo es acíclico. Otros algoritmos como el de Dijkstra y el de Prim utilizan ideas similares al DFS.

El algoritmo de búsqueda primeramente en anchura se aplica a varios problemas de coloración (coloración de grafos bipartitos), a la búsqueda del ciclo más corto de un grafo o al cálculo de distancias.

2.1. Algoritmo DFS

Se inicia la exploración del grafo en un vértice prefijado y a partir de éste se exploran todos a través de las aristas, sin repetición, de una manera determinada. Esencialmente, se trata de avanzar lo más profundamente posible, sin explorar todas las posibilidades que se dan a partir del vértice actual; de este modo, del vértice actual se pasa a un vértice adyacente no visitado, de éste a un tercero aún no visitado, y así sucesivamente. Si se llega a un vértice desde el cual no se puede seguir, es necesario volver atrás (retroceso o *backtracking*), y eliminarlo. Este proceso se repite hasta volver al punto inicial, donde se habrá acabado la exploración.

Para resolver problemas es útil conocer la formulación del algoritmo básico, que explora todos los vértices sin repetición. Claro está que se puede completar con acciones adicionales y formular nuevas variantes.

Formulación del algoritmo DFS

Estructuras necesarias para la formulación del algoritmo:

- Un grafo $G = (V, A)$ representado mediante una lista de adyacencias.

- Un conjunto P de los vértices que se han visitado, en el orden en que se ha hecho, que permita dar marcha atrás. La estructura de datos adecuada es la de una pila con las operaciones habituales: *apilar*(P, v), *desapilar*(P), *cima*(P).
- Una tabla de vértices ($estado$) que registra los vértices que se van visitando.
- Una lista R que contiene los vértices visitados hasta el momento (y que finalmente coincidirá con el conjunto de todos los vértices).

En la estructura de pila...

... los elementos se desapilan en orden inverso al que se apilan, y la cima es el último elemento apilado.

Cuando es posible visitar más de un vértice, se escoge siempre el de índice menor en la ordenación de los vértices disponibles, según la ordenación general de los vértices del grafo (por ejemplo, si los vértices se representan por letras, entonces se hace la elección del primero disponible por orden alfabético).

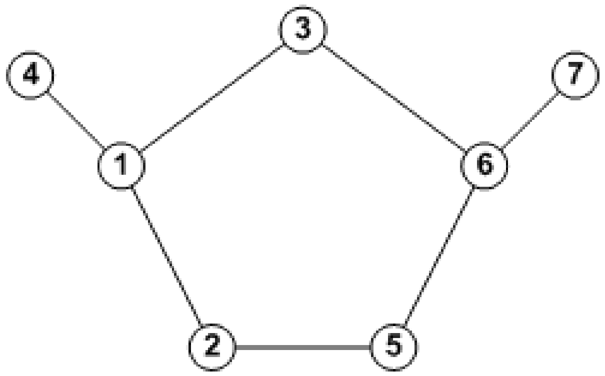
La pila P se inicializa con el vértice de partida y se van apilando los vértices que son visitados; cuando se llega a un vértice desde el que no se puede continuar, se van desapilando vértices hasta encontrar uno a partir del cual se puede volver a avanzar, reiniciando, así, el proceso. Si la pila queda vacía, se para el proceso.

```
Entrada : G(V,A), v ∈ V
Salida : R, vértices visitados
algoritmo DFS(G,v)
  inicio
    P ← ∅
    R ← [v]
    para w ∈ V
          estado[w] ← 0
    finpara
    estado[v] ← 1
    apilar(P,v)
    mientras P ≠ ∅
                w ← cima(P)
                si w es adyacente a u con estado[u] = 0
                   entonces apilar(P,u)
                                 estado[u] ← 1
                                 añadir(R,u)
                         sino desapilar(P)
                finsi
    finmientras
    retorno (R)
  fin
```

Simulación del algoritmo

Ejemplo 6-19

Se considera el grafo representado en la figura.



Esta tabla registra el funcionamiento del algoritmo de exploración en profundidad (DFS) para este grafo, con vértice de inicio $v = 1$.

P	Vértice añadido	Vértice eliminado	R
1	1	-	[1]
12	2	-	[1,2]
125	5	-	[1,2,5]
1256	6	-	[1,2,5,6]
12563	3	-	[1,2,5,6,3]
1256	-	3	[1,2,5,6,3]
12567	7	-	[1,2,5,6,3,7]
1256	-	7	[1,2,5,6,3,7]
125	-	6	[1,2,5,6,3,7]
12	-	5	[1,2,5,6,3,7]
1	-	2	[1,2,5,6,3,7]
14	4	-	[1,2,5,6,3,7,4]
1	-	4	[1,2,5,6,3,7,4]
$\emptyset$	-	1	[1,2,5,6,3,7,4]

Análisis del algoritmo DFS

Si el grafo G tiene orden n y medida m, se puede calcular, de manera aproximada, la complejidad de este algoritmo observando que cada vértice es visitado dos veces (una cuando se añade a la pila y otra cuando se elimina). Además, cuando se accede a un vértice de la pila, se analizan todos sus adyacentes para buscar los vértices aún no visitados. En total, se repetirá tantas veces como aristas haya en la lista de adyacencias del grafo.

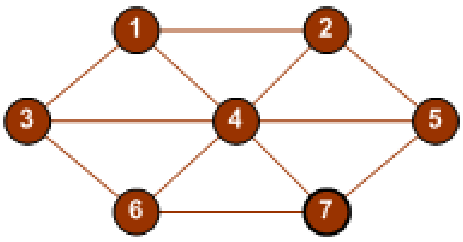
Así el número total de operaciones será proporcional a $2n+2m$ y el algoritmo tendrá una complejidad $O(n+m)$.

2.1.1. Ejercicios

6-20 Al mismo tiempo que el algoritmo DFS visita todos los vértices de un grafo, también visita las aristas incidentes en estos vértices. Modificar el algoritmo para que devuelva la lista de aristas visitadas por el DFS. En lugar de la lista R será una lista S de aristas visitadas.

6-21 Encontrar la lista de los vértices visitados por el algoritmos DFS en el grafo del ejemplo 6-19 (página 15) empezando por el vértice 6. Construir, también, la tabla que registra el funcionamiento del algoritmo.

6-22 Encontrar la lista de los vértices visitados por el algoritmo DFS en el grafo



empezando por el vértice 1. Construir, también, la tabla que registra el funcionamiento del algoritmo.

6-23 Utilizar el algoritmo del ejercicio anterior para obtener las aristas visitadas en el grafo del ejemplo 6-19 (página 15). Construir también la tabla de funcionamiento del algoritmo con el encabezamiento siguiente:

P	Arista añadida	S

2.1.2. Soluciones

6-20 La versión del DFS para las aristas será:

<u>**Entrada**</u> : $G(V, A), v \in V$
<u>**Salida**</u> : S, aristas visitadas
<u>**algoritmo**</u> *DFS*(G, v)
  <u>**inicio**</u>
    $P \leftarrow \emptyset$
    $S \leftarrow \emptyset$
    <u>**para**</u> $w \in V$
        $estado[w] \leftarrow 0$
    <u>**finpara**</u>
    $estado[v] \leftarrow 1$
    apilar(P, v)
    <u>**mientras**</u> $P \neq \emptyset$
        $w \leftarrow$ *cima*(P)
        <u>**si**</u> w es adyacente a u con $estado[u] = 0$
          <u>**entonces**</u> *apilar*(P, u)
                $estado[u] \leftarrow 1$
                añadir$(S, \{w, u\})$
            <u>**sino**</u> *desapilar*(P)
        <u>**finsi**</u>
    <u>**finmientras**</u>
    <u>**retorno**</u> (S)
  <u>**fin**</u>

6-21 La lista de vértices visitados es $R = [6, 3, 1, 2, 5, 4, 7]$.

6-22 La lista de vértices visitados es $R = [1, 2, 4, 3, 6, 7, 5]$.

6-23 La tabla de funcionamiento del algoritmo será:

P	Arista añadida	S
1	-	$\emptyset$
12	$\{1,2\}$	$[\{1,2\}]$
125	$\{2,5\}$	$[\{1,2\},\{2,5\}]$
1256	$\{5,6\}$	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\}]$
12563	$\{6,3\}$	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\},\{6,3\}]$
1256	-	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\},\{6,3\}]$
12567	$\{6,7\}$	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\},\{6,3\},\{6,7\}]$
1256	-	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\},\{6,3\},\{6,7\}]$
125	-	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\},\{6,3\},\{6,7\}]$
12	-	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\},\{6,3\},\{6,7\}]$
1	-	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\},\{6,3\},\{6,7\}]$
14	$\{1,4\}$	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\},\{6,3\},\{6,7\},\{1,4\}]$
1	-	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\},\{6,3\},\{6,7\},\{1,4\}]$
$\emptyset$	-	$[\{1,2\},\{2,5\},\{5,6\},\{6,3\},\{6,7\},\{1,4\}]$

Observación

El grafo (V, S) siempre es un árbol.

2.2. Algoritmo BFS

El algoritmo es similar al DFS, con la diferencia importante de que cuando se llega al vértice actual que se visita, primero se hace una visita sistemática a todos sus vértices adyacentes que todavía no han sido visitados, escogidos por orden según la ordenación que haya.

Es útil conocer la formulación del algoritmo básico, que se puede completar con acciones adicionales para formular nuevas variantes.

Formulación del algoritmo BFS

Estructuras necesarias para la formulación del algoritmo:

- Un grafo $G = (V, A)$ representado mediante una lista de adyacencias.
- Un conjunto Q de los vértices que se han visitado, en el orden en que se ha hecho. La estructura de datos adecuada es la de una cola con las operaciones habituales: *añadir*(Q, v), *eliminar*(Q), *primero*(Q).
- Una tabla de vértices ($estado$) que registra los vértices que se van visitando.
- Una lista R que contiene los vértices visitados hasta el momento (y que finalmente coincidirá con el conjunto de todos los vértices).

En la estructura de cola...

... los elementos se eliminan en el mismo orden en que se añaden.

Cuando es posible visitar más de un vértice, siempre es escoge el de índice mínimo en la ordenación de los vértices disponibles, según la ordenación general de los vértices del grafo (si los vértices se representan por letras, entonces se hace la elección del primero disponible por orden alfabético).

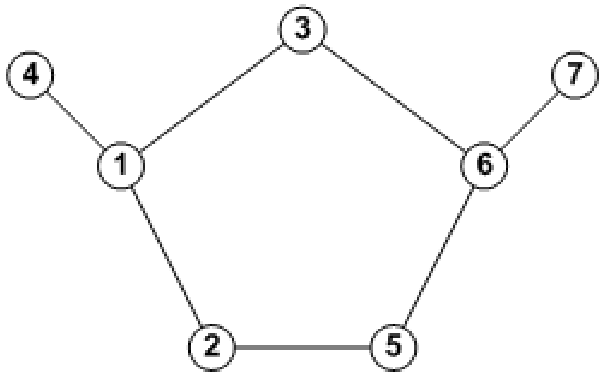
La cola Q se inicia con el vértice de partida y los vértices que son visitados se van añadiendo a la cola. Cuando se han visitado todos los vértices adyacentes al de partida, se elimina de la cola y se continúa con el vértice siguiente de la misma. Cuando ésta queda vacía, se para el proceso.

```
Entrada : G(V,A), v ∈ V
Salida : R, vértices visitados
algoritmo BFS(G,v)
  inicio
    Q ← ∅
    R ← [v]
    para w ∈ V
        estado[w] ← 0
    finpara
    estado[v] ← 1
    añadir(Q,v)
    mientras Q ≠ ∅
            w ← primero(Q)
            para u adyacente a w
                si estado[u] = 0
                  entonces añadir(Q,u)
                           estado[u] ← 1
                           añadir(R,u)
                finsi
            finpara
            eliminar(Q)
    finmientras
    retorno (R)
  fin
```

Simulación del algoritmo

Ejemplo 6-24

Se considera el grafo representado en la figura.



Esta tabla registra el funcionamiento del algoritmo de exploración en anchura (BFS) para este grafo, con vértice de inicio $v = 1$.

Q	Vértice añadido	Vértice eliminado	R
1	1	-	[1]
12	2	-	[1,2]
123	3	-	[1,2,3]
1234	4	-	[1,2,3,4]
234	-	1	[1,2,3,4]
2345	5	-	[1,2,3,4,5]
345	-	2	[1,2,3,4,5]
3456	6	-	[1,2,3,4,5,6]
456	-	3	[1,2,3,4,5,6]
56	-	4	[1,2,3,4,5,6]
6	-	5	[1,2,3,4,5,6]
67	7	-	[1,2,3,4,5,6,7]
7	-	6	[1,2,3,4,5,6,7]
$\emptyset$	-	7	[1,2,3,4,5,6,7]

Análisis del algoritmo BFS

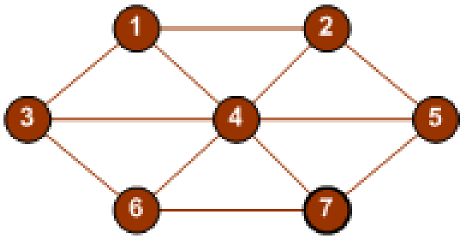
Observar que si el grafo G tiene orden n, entonces cada vértice se añade a la cola una vez. Además, cuando se accede a un vértice de la cola, se analiza su lista de adyacencias para buscar los vértices aún no visitados. En total, se habrán analizado $2m$ aristas, siendo m la medida del grafo.

Así, el número total de operaciones será proporcional a $n + 2m$ y el algoritmo tendrá una complejidad $O(n + m)$.

2.2.1. Ejercicios

6-25 Encontrar la lista de los vértices visitados por el algoritmo BFS en el grafo del ejemplo 6-24 (página 19) empezando por el vértice 6. Construir, también, la tabla que registra el funcionamiento del algoritmo.

6-26 Encontrar la lista de los vértices visitados por el algoritmo BFS en el grafo



empezando por el vértice 1. Construir, también, la tabla que registra el funcionamiento del algoritmo.

6-27 Como en el caso del DFS, al mismo tiempo que el algoritmo BFS visita todos los vértices de un grafo, también visita las aristas incidentes en estos vértices. Modificar el algoritmo para que devuelva la lista de aristas visitadas por el BFS. En lugar de la lista R será una lista S de aristas visitadas.

6-28 Usar el algoritmo del ejercicio anterior para obtener las aristas visitadas en el grafo del ejemplo 6-24 (página 19). Construir también la tabla de funcionamiento del algoritmo con la cabecera siguiente:

Q	Arista añadida	S

2.2.2. Soluciones

6-25 La lista de vértices visitados es $R = [6, 3, 5, 7, 1, 2, 4]$.

6-26 La lista de vértices visitados es $R = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$.

6-27 La versión del BFS para las aristas será:

Entrada : $G(V, A), v \in V$
Salida : S, aristas visitadas
algoritmo $BFS(G, v)$
  inicio
    $Q \leftarrow \emptyset$
    $S \leftarrow \emptyset$
    para $w \in V$
      $estado[w] \leftarrow 0$
    finpara
    $estado[v] \leftarrow 1$
    añadir(Q, v)
    mientras $Q \neq \emptyset$
      $w \leftarrow$ *primero*(Q)
      para u adyacente a w
        si $estado[u] = 0$
          entonces *añadir*(Q, u)
            $estado[u] \leftarrow 1$
            añadir$(S, \{w, u\})$
        finsi
      finpara
      eliminar(Q)
    finmientras
    retorno (S)
  fin

6-28 La tabla de funcionamiento del algoritmo será:

P	Arista añadida	S
1	-	$\emptyset$
12	$\{1,2\}$	$[\{1,2\}]$
123	$\{1,3\}$	$[\{1,2\},\{1,3\}]$
1234	$\{1,4\}$	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}]$
234	-	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}]$
2345	$\{2,5\}$	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\}]$
345	-	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\}]$
3456	$\{3,6\}$	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}]$
456	-	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}]$
56	-	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}]$
6	-	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}]$
67	$\{6,7\}$	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{6,7\}]$
7	-	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{6,7\}]$
$\emptyset$	-	$[\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{6,7\}]$

Observación

El grafo (V, S) resultante es un árbol.

3. Conectividad

Uno de los conceptos fundamentales de la teoría de grafos es el de conectividad, definido a partir de la posibilidad de establecer un recorrido entre dos vértices cualesquiera de un grafo. El concepto de conectividad es especialmente importante en aquellos problemas donde es necesario medir distancias en una red de distribución o en problemas de vulnerabilidad de una red de interconexión.

En capítulos posteriores también se verá que la conectividad es útil para averiguar si un grafo es hamiltoniano o euleriano, aunque en este último caso es más útil conocer el grado de cada vértice.

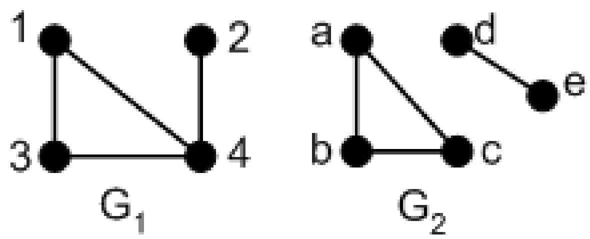
3.1. Conexión entre vértices

Definición 6.7

Un grafo $G = (V, A)$ es **conexo** si para cada par de vértices u y v de G existe un $u - v$ camino.

Ejemplo 6-29

La figura siguiente muestra dos grafos G_1 y G_2. El primero es conexo, puesto que entre cada pareja de vértices hay un camino que los une. El segundo no es conexo, puesto que, por ejemplo, entre los vértices a y e no hay ningún recorrido que los una.



Cuando un grafo G no sea conexo, se deberán determinar aquellos subgrafos de G que son conexos y que son maximales respeto a esta propiedad.

Definición 6.8

En el conjunto de vértices V de un grafo $G = (V, A)$ se define la relación siguiente:

$$\forall\, u, v \in V, \quad u \equiv v \Leftrightarrow \text{existe un } u - v \text{ camino de } G.$$

Proposición 6.9

Esta relación es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices del grafo.

En consecuencia, se establece una partición de $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$: los vértices de una misma clase son mutuamente accesibles por algún camino; vértices de clases diferentes son inaccesibles. Evidentemente, también se puede establecer, de manera parecida, una partición del conjunto de aristas $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$.

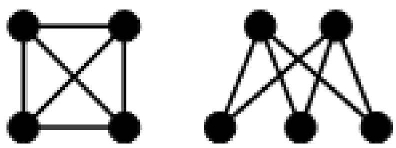
Definición 6.10

Las **componentes conexas** del grafo G son los subgrafos $G_i = \langle V_i \rangle$ generados por cada una de estas clases de equivalencia V_i; así se puede expresar el grafo como unión de componentes conexas:

$$G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$$

Ejemplo 6-30

El grafo G



no es conexo. Tiene dos componentes conexas (el grafo completo de orden 4, y el grafo bipartito completo de orden $3 + 2$). Así, $G = K_4 \cup K_{3,2}$.

Por la propia definición, toda componente conexa de un grafo G es un grafo conexo. Así, un grafo es conexo si, y sólo si, tiene una única componente conexa.

Comparando el orden y la medida de un grafo con los órdenes y las medidas de sus componentes conexas se obtiene la relación siguiente:

Proposición 6.11

Si un grafo es de orden n y medida m, con k componentes conexas, de órdenes y medidas respectivas n_i, m_i $(i = 1, \ldots, k)$, entonces:

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i, \quad m = \sum_{i=1}^{k} m_i \,.$$

El resultado siguiente establece la medida mínima de un grafo conexo.

Proposición 6.12

Si G es un grafo conexo de orden n y medida m, entonces
$m \geq n - 1$.

Demostración: Se demostrará por inducción respecto al orden n del grafo. Si $n = 1$ el resultado es inmediato.

Se supone que la propiedad es cierta para todo grafo conexo de orden $n-1 \geq 1$ y se prueba que también lo es para todo grafo conexo de orden n. Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo de orden n y medida m. Se debe probar que $m \geq n - 1$.

Si todos los vértices de G tienen grado mayor o igual que 2 , entonces se aplica la fórmula de los grados,

$$2m = \sum_{v \in V} g(v) \geq 2n$$

y, por lo tanto, $m \geq n > n - 1$.

En caso de que G tenga un vértice v de grado 1, entonces el grafo $G' = G - v$ es un grafo conexo de orden $n - 1$ y medida $m - 1$. Aplicando la hipótesis de inducción al grafo G' se tiene que $m - 1 \geq n - 2$, de donde resulta que $m \geq n - 1$, como se quería probar. ∎

Como consecuencia directa de este resultado se obtiene el corolario:

Proposición 6.13

Si G es un grafo que tiene orden n, medida m y k componentes conexas, entonces $m \geq n - k$.

Ejemplo 6-31

Todos los grafos con secuencia de grados 4,4,3,3,3,3,3,3 son conexos.

Se supone que exista algún grafo no conexo con esta secuencia de grados y sea $G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$, $k \geq 2$, la descomposición del grafo como reunión de componentes conexas; sea $n = 8$ el orden de G y sea n_i el orden de la componente conexa G_i, considerada como grafo. Obviamente se tiene $n_1 + \ldots + n_k = n = 8$; ahora bien, los vértices son, como mínimo, de grado 3 en cada componente conexa y, en consecuencia, cada componente conexa es como mínimo de orden 4, es decir, $n_1 + \ldots + n_k \geq 4k$; a partir de la igualdad anterior se tiene que $k = 2$, $n_1 = n_2 = 4$. Ahora bien, siendo las componentes conexas de orden 4, ninguna de ellas puede contener vértices de orden 4. Por lo tanto, no existe ningún grafo no conexo de estas características.

Ejemplo 6-32

Cuando se elimina un vértice de un grafo conexo, el número de componentes conexas que se producen no puede superar el grado del vértice eliminado.

La afirmación es muy intuitiva; se debe expresar formalmente y probar. Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo de orden $n \geq 3$ y sea $u \in V$ de grado $g(u)$; entonces el número de componentes conexas de $G - u$ es menor o igual que $g(u)$.

En efecto, sea $G' = G - u = G_1 \cup \ldots \cup G_k$, expresión del grafo como reunión de componentes conexas; se verà que cada G_i contiene como mínimo un vértice u_i adyacente a u en G, cosa que demostraría la afirmación. Si no fuese así para algún G_{i_0}, entonces, por la conexión del grafo G, algún vértice $w \in V(G_{i_0})$ será adyacente (en G) a algún otro vértice $q \in V((G_j), (q \neq u, (j \neq i_0)))$, puesto que de lo contrario G sería no conexo; ahora bien, si fuera así, con la eliminación de u no se crearía la componente conexa G_{i_0}.

3.1.1. Ejercicios

6-33 Demostrar que un grafo con la secuencia de grados 3,1,1,1,1,1 no puede ser conexo.

6-34 Encontrar el número de componentes conexas de un grafo que tiene como lista de adyacencias,

a	:	f, i, j
b	:	c, g
c	:	b, e, g
d	:	h
e	:	c, g, j, f
f	:	a, i, e
g	:	b, c, e
h	:	d
i	:	a, f
j	:	a, e

6-35 Si se elimina una arista de un ciclo de un grafo, ¿se puede incrementar el número de componentes conexas?

6-36 Cuáles de los siguientes grafos son conexos:

$$T_n,\ C_n,\ \ N_n,\ N_n + N_m, T_2 \times C_n$$

En caso de que no sean conexos, indicar cuántas componentes conexas tienen.

3.1.2. Soluciones

6-33 En primer lugar se puede verificar, si se utiliza el algoritmo de Havel-Hakimi, que la secuencia 3,1,1,1,1,1 es gráfica.

Ya que el grafo tiene orden 6, si el grafo fuese conexo su medida tendría que ser mayor o igual a 5. Pero, por la fórmula de los grados, $2m = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$ y $m = 4$.

6-34 Tiene dos componentes conexas.

6-35 No; en particular, en un grafo conexo nunca se produce desconexión con la eliminación de una arista que pertenece a un ciclo (puesto que siempre queda un recorrido alternativo para cada pareja de vértices que se comuniquen por un recorrido que utilice aristas del ciclo).

6-36 Todos son conexos menos N_n ($n > 1$), que contiene n componentes conexas, una para cada vértice.

3.2. Test de conexión

Se puede utilizar el algoritmo DFS introducido en la sección2.1 para comprobar si un grafo $G = (V, A)$ es conexo. Se debe recordar que el algoritmo DFS devuelve la lista R de todos los vértices accesibles a partir de un vértice v fijado. Si la lista contiene todos los vértices del grafo, el grafo será conexo. De lo contrario, será no conexo.

Entrada : $G(V, A), v \in V$
Salida : `CIERTO` si G es conexo. `FALSO` en caso contrario
algoritmo *TestConexión*(G, v)
  inicio
    $conexo \leftarrow$ `CIERTO`
    $R \leftarrow$ ***DFS***(G, v)
    si $|R| \neq |V|$
      entonces $conexo \leftarrow$ `FALSO`
    finsi
    retorno $(conexo)$
  fin

Ya que el DFS tiene una complejidad $O(n+m)$, se puede afirmar lo siguiente: comprobar si un grafo es conexo tiene una complejidad $O(n + m)$.

Ejemplo 6-37

Se puede observar la aplicación del algoritmo sobre el grafo G_2 del ejemplo 6-29 (página 22) empezando por el vértice a:

P	Vértice añadido	Vértice eliminado	R
a	a	-	[a]
ab	b	-	[a,b]
abc	c	-	[a,b,c]
ab	-	c	[a,b,c]
a	-	b	[a,b,c]
$\emptyset$	-	a	[a,b,c]

Como el grafo G_2 tiene orden 5 y R sólo contiene 3 vértices, se puede concluir que G_2 no es conexo.

Este ejemplo pone en evidencia el resultado siguiente:

Proposición 6.14

Sea $G = (V, A)$ un grafo y v un vértice de G. El subgrafo inducido por los vértices visitados de G empleando el algoritmo DFS es la componente conexa que contiene v.

3.2.1. Ejercicios

6-38 ¿Se podría utilizar el BFS en lugar del DFS en el test de conexión?

6-39 Utilizar el test de conexión y comprobar si el grafo G definido por la matriz de adyacencias

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es conexo.

6-40 Modificar el test de conexión para que devuelva el número de componentes conexas de un grafo G.

3.2.2. Soluciones

6-38 Sí.

6-39 Suponiendo que los vértices del grafo forman el conjunto $V = \{a, b, c, d, e\}$, se aplica el test de conexión:

P	Vértice añadido	Vértice eliminado	R
a	a	-	[a]
ab	b	-	[a,b]
abc	c	-	[a,b,c]
abcd	d	-	[a,b,c,d]
abc	-	d	[a,b,c,d]
abce	e	-	[a,b,c,d,e]
abc	-	e	[a,b,c,d,e]
ab	-	c	[a,b,c,d,e]
a	-	b	[a,b,c,d,e]
$\emptyset$	-	a	[a,b,c,d,e]

Del test se deduce que el grafo es conexo.

6-40 En este caso se debe repetir el test de conexión para cada componente conexa del grafo:

Entrada : $G(V, A)$
Salida : número de componentes conexas del grafo G.
algoritmo *ComponentesConexas*(G)
  inicio
    $ncomponentes \leftarrow 0$
    $U \leftarrow V$
    mientras $U \neq \emptyset$
      $v \leftarrow$ primer vértice de U
      $R \leftarrow$ *DFS*(G, v)
      $ncomponentes \leftarrow ncomponentes + 1$
      $U \leftarrow U - R$
    finmientras
    retorno $(ncomponentes)$
  fin

Observar que la complejidad continúa siendo $O(n + m)$, puesto que se explora todos los vértices y las aristas de G.

4. Distancias en un grafo

En una red de carreteras en la cual hay varios itinerarios para unir dos ciudades es natural preguntarse qué itinerario es el más corto, o cuál es el que logra la mínima distancia entre las dos ciudades.

En esta sección se definirá el concepto de distancia entre dos vértices de un grafo conexo. Se procederá a calcular esta distancia y también se resolverá el problema de la distancia y el camino mínimo en un grafo ponderado (grafo con un peso asociado a cada arista). Finalmente, se resolverá el problema más general de encontrar la distancia entre un vértice y el resto de los vértices del grafo, y un camino que logre esta distancia, mediante los algoritmos de Dijkstra y Floyd.

4.1. Distancia entre vértices

Definición 6.15

Dado un grafo conexo $G = (V, A)$, la **distancia** entre dos de sus vértices es la mínima de las longitudes de los caminos que conecten estos vértices:

$$d_G(u, v) = \min\{\ell(C) \mid C \text{ es un } u - v \text{ camino}\}$$

En el caso no conexo, la distancia entre dos vértices de una misma componente conexa se define como en el caso anterior. En el caso de vértices mutuamente inaccesibles, se asigna el valor convencional ∞.

Cuando quede claro en que grafo se calcula la distancia entre dos vértices u y v se pondrá, simplemente, $d(u, v)$.

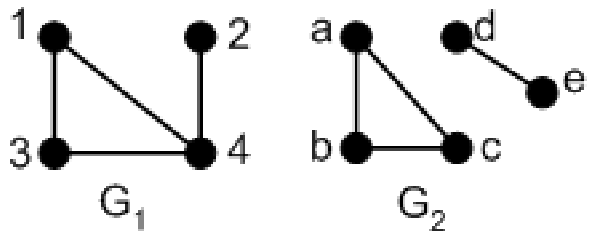
Definición 6.16

Dado un grafo conexo $G = (V, A)$, el **diámetro** $D(G)$ es

$$D(G) = \max\{d_G(u, v) | u, v \in V\}$$

Ejemplo 6-41

Se consideran los grafos G_1 y G_2 del ejemplo 6-29 (página 22)



A G_1, la $d(1,2) = 2$, $d(1,3) = 1$, $d(1,4) = 1$. El $D(G_1) = 2$.

A G_2, la $d(a,c) = d(a,b) = d(b,c) = 1$, $d(a,d) = \infty$, por lo tanto, $D(G_2) = \infty$.

Ejemplo 6-42

Se puede observar que, dado un grafo cualquiera no conexo G, el grafo complementario G^c es conexo y de diámetro ≤ 2.

Sean x, y dos vértices de componentes conexas diferentes de G que, por lo tanto, no son adyacentes en G; en consecuencia lo son en el complementario G^c y $d_{G^c}(x, y) = 1$.

Sean ahora x, y de la misma componente conexa G_i de G; dado que el grafo no es conexo por hipótesis, existe otra componente conexa diferente G_j que contiene un vértice $z \in V(G_j)$; entonces x, y no son adyacentes a z en el grafo G y, en consecuencia, lo son en el complementario; por lo tanto, en el complementario los vértices x, y están conectados por un camino a través de z, concretamente el camino x, z, y, y resulta, pues, que $d_{G^c}(x, y) \leq 2$ (observar que no se puede afirmar que la distancia sea 2, puesto que podría pasar que x, y fueran no adyacentes en G, caso en el cual serían adyacentes en el complementario).

A partir de la distancia entre vértices es posible una caracterización de los grafos bipartitos.

Teorema 6.17

Un grafo es bipartito si, y sólo si, todos los ciclos son de longitud par.

Demostración: Se deben que probar dos implicaciones:

1) Si el grafo es bipartito, entonces todos los ciclos son de longitud par.

2) Si todos los ciclos de un grafo son de longitud par, entonces el grafo es bipartito.

Se supone que el grafo es $G = (V, A)$.

1) Se supone que el grafo es (V_1, V_2)-bipartito; la conclusión se deriva fácilmente del hecho de que todo camino ha de utilizar alternativamente vértices de V_1 y de V_2.

2) Se debe que definir adecuadamente una bipartición (V_1, V_2) del conjunto de vértices de manera que el grafo resulte ser (V_1, V_2)-bipartito.

Sea $u_0 \in V$; se definen los conjuntos

$$V_1 = \{v \in V \mid d(u_0, v) \text{ es par}\} \quad V_2 = \{v \in V \mid d(u_0, v) \text{ es impar}\}$$

Estos conjuntos determinan una partición del conjunto de vértices del grafo y ahora se trata de ver que el grafo es (V_1, V_2)-bipartito.

Para comprobarlo, se debe concluir que no hay aristas que conecten vértices de un mismo conjunto de la partición; se probará para parejas de vértices de V_1 y análogamente se procedería para V_2. Sean, pues, $u, v \in V_1$ y se supone que existe la arista $a = \{u, v\} \in A$; se verá que se llega a alguna contradicción, a partir del hecho de que todos los ciclos son de longitud par. Sean R_1 un $u_0 - u$ camino de longitud mínima y R_2 un $u_0 - v$ camino de longitud mínima, los dos de longitudes pares, por definición de V_1. Recorriendo los caminos anteriores desde el inicio u_0, se logrará un vértice w_0 que es el último que comparten los caminos R_1, R_2; por ser mínimo, los subcaminos $u_0 - w_0$ sobre R_1, R_2 tienen que ser de la misma longitud k; se consideran ahora los subcaminos $S_1 : w_0 - u$ sobre R_1 y $S_2 : w_0 - u$ sobre R_2; entonces resulta que $\ell(R_1) = k + \ell(S_1)$ y $\ell(R_2) = k + \ell(S_2)$, de donde la diferencia $\ell(R_2) - \ell(R_1)$ es par y, en consecuencia, $\ell(R_1), \ell(R_2)$ tienen que ser de la misma paridad; considerando el camino formado por estas secciones (pasando por w_0), resulta un $u - v$ camino de longitud par; conjuntamente con la arista $a = \{u, v\}$ se crearía un ciclo de longitud impar, que contradiría la hipótesis.

▮

4.1.1. Ejercicios

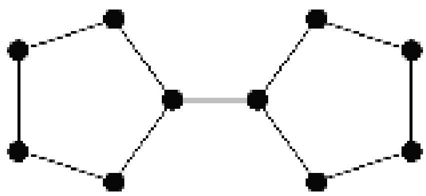
6-43 Comprobar que la distancia dada entre vértices de un grafo conexo satisface las propiedades generales de una métrica:

1) $d(u, v) \geq 0$ y $d(u, v) = 0$ si, y sólo si, $u = v$;

2) $d(u, v) = d(v, u)$;

3) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (desigualdad triangular).

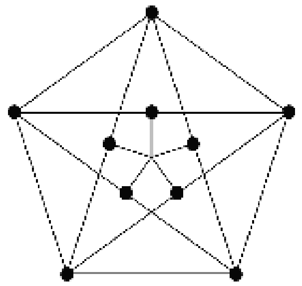
6-44 Indicar cuál es el diámetro del grafo siguiente.



6-45 ¿Es cierta la propiedad: $u \approx v \Leftrightarrow d(u, v) = 1$?

6-46 Calcular el diámetro de los grafos K_n, $K_{n,m}$, C_n, T_n.

6-47 Utilizar la caracterización de los grafos bipartitos para decidir si el grafo siguiente es bipartito.



6-48 Los grafos acíclicos son bipartitos. ¿Cierto o falso?

4.1.2. Soluciones

6-43 Las propiedades 1 y 2 son obvias. Para demostrar la propiedad 3, sea C el camino que logra la $d(u, v)$. Sea C_1 el camino que logra la $d(u, w)$ y C_2 el camino que logra la $d(w, v)$. Entonces, si se une C_1 y C_2 se tiene un camino que une u y v. Por la definición de distancia, la longitud de este camino tiene que ser mayor o igual que la $d(u, v)$.

6-44 El diámetro es 5.

6-45 Sí.

6-46 $D(K_n) = 1$, porque la distancia de un vértice a cualquier otro siempre es 1.

$D(K_{n,m}) = 2$, porque se puede ir de un vértice a cualquier otro recorriendo dos aristas.

$D(C_n) = \frac{n}{2}$ si n es par. $D(C_n) = \frac{n-1}{2}$ si n es impar.

$D(T_n) = n - 1$, que es la distancia entre los dos extremos.

6-47 No es bipartito, puesto que hay ciclos de longitud 5.

6-48 Cierto, en aplicación de la caracterización de grafos bipartitos en términos de los ciclos, puesto que todos los ciclos son de longitud cero.

4.2. El problema del camino mínimo en un grafo

Un ejemplo típico de un grafo es una red de carreteras que conectan un conjunto de ciudades. El problema algorítmico más natural en este grafo es encontrar el camino más corto (**distancia**) entre un par de ciudades (**vértices**).

La distancia entre dos vértices en un grafo no ponderado se puede encontrar, de manera eficiente, si se aplica el algoritmo de búsqueda primeramente en anchura (**BFS** o *Breadth First Search*). Si el grafo es ponderado, entonces la distancia entre dos vértices no se puede calcular directamente y hay que aplicar algoritmos específicos.

El **algoritmo de Dijkstra** encuentra la distancia entre dos vértices construyendo un árbol desde el vértice inicial u_0 a cada uno de los otros vértices del grafo.

El **algoritmo de Floyd** encuentra la distancia entre todos los pares de vértices de un grafo.

Observación

Un grafo simple se puede interpretar como un grafo ponderado si se asocia a cada arista un peso 1.

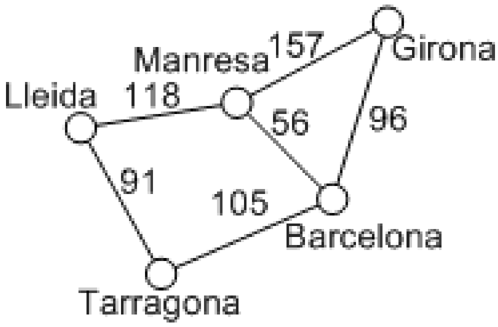
Definición 6.18

Un **grafo ponderado** es un par (G, w) donde $G = (V, A)$ es un grafo y w es una función $w : A \to \mathbb{R}$ que asigna pesos a las aristas del grafo.

Ejemplo 6-49

En una red de comunicaciones puede ser interesante la asignación a cada arista de un peso indicativo del tiempo que cuesta recorrer la arista en cuestión, o los kilómetros, o el coste económico correspondiente en otros aspectos que dependerán del problema y del modelo que se haya construido.

El grafo siguiente es un grafo ponderado. El peso de cada arista es la distancia kilométrica entre dos ciudades.



Normalmente los pesos son positivos o nulos, pero también se pueden considerar situaciones en que sean negativos.

Definición 6.19

Dado un grafo ponderado (G, w) y un camino $C : v_0, v_1, \ldots, v_k$ se definen el **peso del camino** C como $w(C) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$, y la **distancia** entre dos vértices $u, v \in G$ como

$$d_G(u, v) = \min\{w(C) \mid C \text{ es un } u - v \text{ camino }\}$$

Si el grafo G no es ponderado (o todos los pesos son iguales a 1), entonces esta definición coincide con la que se ha dado anteriormente (definición 6.15 página 29).

Como antes, en el caso de vértices mutuamente inaccesibles se asigna el valor convencional ∞ a su distancia.

Ejemplo 6-50

En el grafo ponderado del ejemplo 6-49 (página 33), el camino C_1 : Barcelona, Manresa, Lleida tiene un peso 174. En cambio, el camino C_2 : Barcelona, Tarragona, Lleida tiene un peso 196. La distancia entre Barcelona y Lleida es 174 pasando por Manresa.

Variantes del problema del camino mínimo

El problema del camino mínimo admite diversas variantes que se pueden resolver utilizando adaptaciones de los mismos algoritmos:

1) Camino mínimo desde un vértice inicial (*Single Source Shortest Path*): dado (G, w) y $s \in V$, buscar la $d(s, v)$ para todo $v \in V$.

2) Camino mínimo hasta un vértice destino (*Single Destination Shortest Path*): dado (G, w) y $t \in V$, buscar la $d(v, t)$ para todo $v \in V$.

3) Camino mínimo entre una par de vértices (*Single Pair Shortest Path*): dado (G, w) y $s, t \in V$, buscar la $d(s, t)$.

4) Camino mínimo entre todos los pares de vértices (*All Pairs Shortest Path*): dado (G, w), buscar la $d(u, v)$ para todo $u, v \in V$.

Ejemplo 6-51

De nuevo, se utiliza en este ejemplo el grafo ponderado del ejemplo 6-49 (página 33).

Si se ordenan las ciudades alfabéticamente, entonces la solución a las cuatro variantes del problema del camino mínimo en este grafo será:

1) Camino mínimo desde Barcelona:

(0,Barcelona), (96,Girona), (174,Lleida), (56,Manresa), (105,Tarragona).

2) Camino mínimo hasta Tarragona:

(105,Barcelona), (201,Girona), (91,Lleida), (161,Manresa), (0,Tarragona).

3) Camino mínimo entre Girona y Lleida: 270 pasando por Manresa.

4) Camino mínimo entre todos los pares de ciudades:

	Barcelona	Girona	Lleida	Manresa	Tarragona
Barcelona	0	96	174	56	105
Girona	96	0	270	152	201
Lleida	174	270	0	118	91
Manresa	56	152	118	0	161
Tarragona	105	201	91	161	0

A continuación, se estudiarán los algoritmos específicos para resolver las variantes 1 y 4. Se pospondrá para los ejercicios la resolución de las variantes 2 y 3.

4.2.1. Algoritmo de Dijkstra

El algoritmo de Dijkstra se aplica sobre un grafo (o digrafo) ponderado y calcula la distancia desde un vértice inicial s al resto de vértices del grafo. A cada paso, se etiquetarán los vértices con $(dist(u), v)$ donde $dist(u)$ es la distancia mínima actual del vértices s al vértices u, y v es el predecesor de u en el camino mínimo que une s y u.

El algoritmo de Dijkstra...

...se aplica sobre un grafo (o digrafo) ponderado y calcula la distancia desde un vértice inicial al resto de vértices del grafo.

Estructuras necesarias para la formulación del algoritmo:

- Un grafo ponderado (G, w) representado mediante una lista de adyacencias.
- Un conjunto U de los vértices que se han visitado, en el orden en que se ha hecho.
- Una tabla de distancias, $dist(\cdot)$, indexada por los vértices de G, que registra la distancia del vértice inicial a los vértices que se van visitando.
- Al final, la tabla $dist(\cdot)$ registra la distancia desde el vértice inicial al resto de vértices.

Entrada : (G, w) de orden n y un vértice inicial s.
Salida : La distancia, $dist(\cdot)$, de s al resto de vértices.
algoritmo *Dijkstra*(G, s)
  inicio
    $U \leftarrow \emptyset$
    para $v \in V \backslash \{s\}$
        $dist(v) \leftarrow \infty$
        Se etiqueta v con $(dist(v), s)$
    finpara
    $dist(s) \leftarrow 0$
    Se etiqueta s con $(dist(s), s)$
    para $i \leftarrow 0$ **hasta** $n - 1$
        u_i vértice que logra lo $\min\{dist(v) \mid v \in V - U\}$
        $U \leftarrow U \cup \{u_i\}$
        para $v \in V - U$ adyacente a u_i **si** $dist(u_i) + w(u_i, v) < dist(v)$
            entonces $dist(v) \leftarrow dist(u_i) + w(u_i, v)$
            Se etiqueta v con $(dist(v), u_i)$
            finsi
        finpara
    finpara
    retorno $(dist)$
  fin

Cuando es posible visitar más de un vértice, siempre se elige el de índice mínimo en la ordenación de los vértices disponibles.

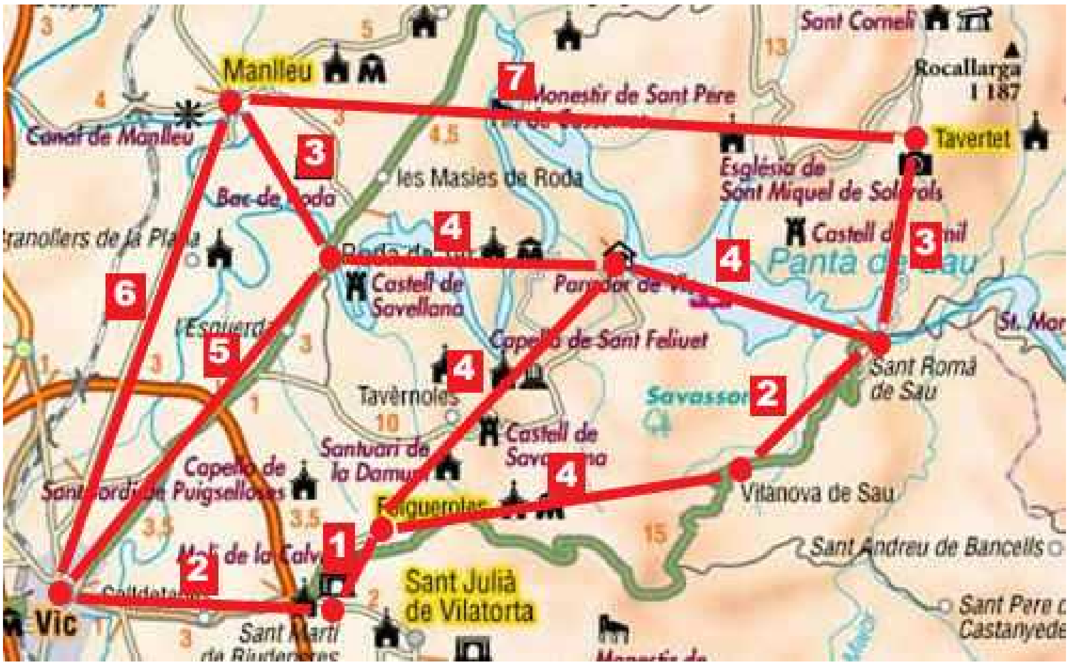
A cada paso se fija la distancia de uno de los vértices del grafo. Así, tras n pasos se habrá calculado la distancia a todos los vértices del grafo.

El algoritmo se puede utilizar para obtener un camino de longitud mínima entre el vértice inicial y cualquier otro vértice, puesto que después de aplicar el algoritmo, todo vértice v tiene asociada una etiqueta $(dist(v), u_i)$ indicativa de la distancia del vértice v al vértice de partida, $dist(v) = d(s, v)$, y del camino seguido para calcular la distancia. Si $v \neq s$ se obtiene un $s - v$ camino de longitud mínima con $s = q_0, q_1, \ldots, q_k = v$, donde los q_i están etiquetados con $(dist(q_i), q_{i-1})$ para $i = 1, \ldots, k$.

Simulación del algoritmo de Dijkstra

Ejemplo 6-52

Considerar el grafo definido sobre el mapa siguiente, que representa las distancias aproximadas entre varias localizaciones de la comarca de Osona:



Se puede utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar la distancia mínima entre Vic y el resto de localidades. Se utiliza una tabla como la siguiente para representar los diferentes pasos del algoritmo de Dijkstra:

Vértices	V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$(dist(\cdot), \cdot)$	$(0, V)$	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)

Esta tabla representa el estado inicial del algoritmo de Dijkstra. Los vértices son: **V**ic, **M**anlleu, **C**astell de **S**avellana, **S**ant **M**artí de Riudeperes, `F`olgueroles, **V**ilanova de **S**au, **S**ant **R**omà de Sau , **P**arador de **V**ic, **T**avertet. El conjunto U está representado por un **mapa de bits**, es decir , contiene un **1** si el vértice correspondiente pertenece a U o **0** en caso contrario.

$i = 0$. El vértice de peso mínimo es el vértice V. Se pueden etiquetar los vértices M, CS, SM.

Vértices	V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
U	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
$(dist(\cdot), \cdot)$	$(0, V)$	$(\mathbf{6}, \mathbf{V})$	$(\mathbf{5}, \mathbf{V})$	$(\mathbf{2}, \mathbf{V})$	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)

$i = 1$. El vértice de peso mínimo es el vértice SM. Se puede etiquetar el vértice F.

Vértices	V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
U	1	0	0	**1**	0	0	0	0	0
$(dist(\cdot), \cdot)$	$(0, V)$	$(6, V)$	$(5, V)$	$(2, V)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{SM})$	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)	(∞, V)

$i = 2$. El vértice de peso mínimo es el vértice F. Se pueden etiquetar los vértices VS y PV.

Vértices	V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
U	1	0	0	1	**1**	0	0	0	0
$(dist(\cdot), \cdot)$	$(0, V)$	$(6, V)$	$(5, V)$	$(2, V)$	$(3, SM)$	$(\mathbf{7}, \mathbf{F})$	(∞, V)	$(\mathbf{7}, \mathbf{F})$	(∞, V)

$i = 3$. El vértice de peso mínimo es el vértice CS, pero no se etiqueta ningún nuevo vértice.

Vértices	V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
U	1	0	**1**	1	1	0	0	0	0
$(dist(\cdot), \cdot)$	$(0, V)$	$(6, V)$	$(5, V)$	$(2, V)$	$(3, SM)$	$(7, F)$	(∞, V)	$(7, F)$	(∞, V)

$i = 4$. El vértice de peso mínimo es el vértice M. Se puede etiquetar el vértice T.

Vértices	V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
U	1	**1**	1	1	1	0	0	0	0
$(dist(\cdot), \cdot)$	$(0, V)$	$(6, V)$	$(5, V)$	$(2, V)$	$(3, SM)$	$(7, F)$	(∞, V)	$(7, F)$	$(\mathbf{13}, \mathbf{M})$

$i = 5$. El vértice de peso mínimo es el vértice VS. Se puede etiquetar el vértice SR.

Vértices	V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
U	1	1	1	1	1	**1**	0	0	0
$(dist(\cdot), \cdot)$	$(0, V)$	$(6, V)$	$(5, V)$	$(2, V)$	$(3, SM)$	$(7, F)$	$(\mathbf{9}, \mathbf{VS})$	$(7, F)$	$(13, M)$

$i = 6$. El vértice de peso mínimo es el vértice PV, pero no se etiqueta ningún nuevo vértice.

Vértices	V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
U	1	1	1	1	1	1	0	**1**	0
$(dist(\cdot), \cdot)$	$(0, V)$	$(6, V)$	$(5, V)$	$(2, V)$	$(3, SM)$	$(7, F)$	$(9, VS)$	$(7, F)$	$(13, M)$

$i = 7$. El vértice de peso mínimo es el vértice SR. se puede etiquetar el vértice T.

Vértices	V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
U	1	1	1	1	1	1	**1**	1	0
$(dist(\cdot), \cdot)$	$(0, V)$	$(6, V)$	$(5, V)$	$(2, V)$	$(3, SM)$	$(7, F)$	$(9, VS)$	$(7, F)$	$(\mathbf{12}, \mathbf{SR})$

$i = 8$. Finalmente, el vértice de peso mínimo es el vértice T, pero no se etiqueta ningún nuevo vértice.

Vértices	V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
U	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
$(dist(\cdot), \cdot)$	$(0, V)$	$(6, V)$	$(5, V)$	$(2, V)$	$(3, SM)$	$(7, F)$	$(9, VS)$	$(7, F)$	$(12, SR)$

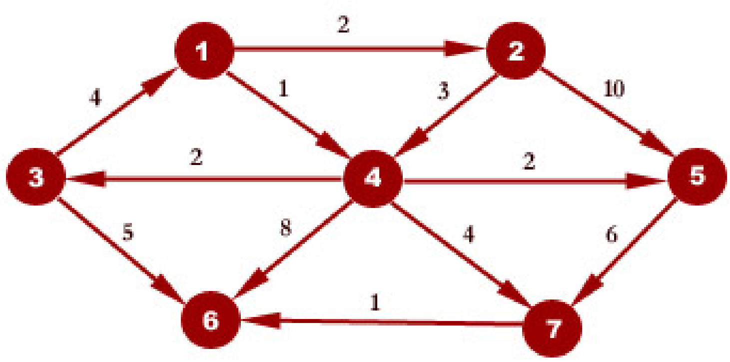
La última tabla muestra la distancia mínima entre Vic y el resto de ciudades. Observar que también es posible reconstruir el itinerario que habría que seguir para desplazarse de Vic a cualquiera de las ciudades. Por ejemplo, la distancia de Vic a Tavertet es 12 y el itinerario se reconstruye a partir del etiquetado de la última tabla: T(12,SR), SR(9,VS), VS(7,F), F(3,SM), SM(2,V). el itinerario será, Vic, Sant Martí de Riudeperes, Folgueroles, Vilanova de Sau, Sant Romà de Sau, Tavertet.

A partir de estas tablas que presentan cada uno de los pasos, se puede construir la **tabla del algoritmo de Dijkstra**, que incluye cada una de las filas $(dist(\cdot), \cdot)$ (se marca con un asterisco el vértice que se visita):

V	M	CS	SM	F	VS	SR	PV	T
(0,V)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)
(0,V)*	(6,V)	(5,V)	(2,V)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)
(0,V)	(6,V)	(5,V)	(2,V)*	(3,SM)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)	(∞,V)
(0,V)	(6,V)	(5,V)	(2,V)	(3,SM)*	(7,F)	(∞,V)	(7,F)	(∞,V)
(0,V)	(6,V)	(5,V)*	(2,V)	(3,SM)	(7,F)	(∞,V)	(7,F)	(∞,V)
(0,V)	(6,V)*	(5,V)	(2,V)	(3,SM)	(7,F)	(∞,V)	(7,F)	(13,M)
(0,V)	(6,V)	(5,V)	(2,V)	(3,SM)	(7,F)*	(9,VS)	(7,F)	(13,M)
(0,V)	(6,V)	(5,V)	(2,V)	(3,SM)	(7,F)	(9,VS)	(7,F)*	(13,M)
(0,V)	(6,V)	(5,V)	(2,V)	(3,SM)	(7,F)	(9,VS)*	(7,F)	(12,SR)
(0,V)	(6,V)	(5,V)	(2,V)	(3,SM)	(7,F)	(9,VS)	(7,F)	(12,SR)*

Ejemplo 6-53

Considerar el digrafo definido por el gráfico siguiente:



En este caso, la tabla del algoritmo de Dijkstra del digrafo es ésta (se señala con un asterisco el vértice que se visita):

1	2	3	4	5	6	7
(0,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)
(0,1)*	(2,1)	(∞,1)	(1,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)
(0,1)	(2,1)	(3,4)	(1,1)*	(3,4)	(9,4)	(5,4)
(0,1)	(2,1)*	(3,4)	(1,1)	(3,4)	(9,4)	(5,4)
(0,1)	(2,1)	(3,4)*	(1,1)	(3,4)	(8,3)	(5,4)
(0,1)	(2,1)	(3,4)	(1,1)	(3,4)*	(8,3)	(5,4)
(0,1)	(2,1)	(3,4)	(1,1)	(3,4)	(6,7)	(5,4)*
(0,1)	(2,1)	(3,4)	(1,1)	(3,4)	(6,7)*	(5,4)

De la última fila de la tabla se deduce que la distancia del vértice 1 al resto de vértices vale $d(1,1) = 0, d(1,2) = 2, d(1,3) = 3, d(1,4) = 1, d(1,5) = 3, d(1,6) = 6,$ $d(1,7) = 5$.

Análisis del algoritmo de Dijkstra

Para analizar este algoritmo se dividirá en dos partes:

1) Se inicia una tabla de medida n con una complejidad $O(n)$.

2) El bucle principal se ejecuta n veces. En el paso i-ésimo se calcula el mínimo de una lista que contiene $n-i$ elementos. Esto se puede hacer con $n-i$ comparaciones.

En el bucle más interno se actualizan las etiquetas de los vértices adyacentes al vértice analizado. El número máximo de vértices adyacentes que se acualizan en el paso i-ésimo es $n-i-1$.

Resumiendo, en el bucle principal se hacen

$$\sum_{i=0}^{n-1} n-i + \sum_{i=0}^{n-1} n-i-1 = n^2$$

operaciones elementales.

Esto da una complejidad $O(n^2)$.

Todo el algoritmo, pues, tendrá una complejidad $\max\{O(n), O(n^2)\} = O(n^2)$, independientemente del número de aristas del grafo.

4.2.2. Camino mínimo en un grafo no ponderado

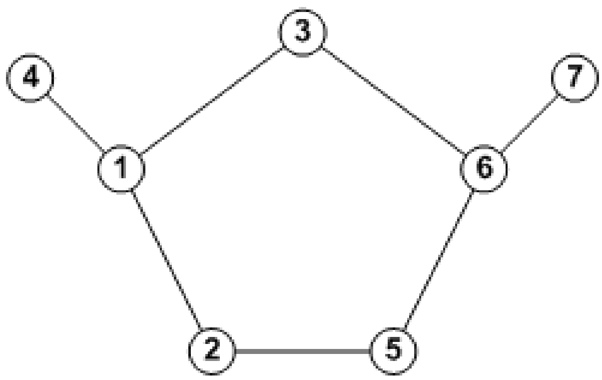
Si el grafo es no ponderado (o todas las aristas tienen peso 1) entonces se puede utilizar el algoritmo de exploración en anchura (BFS) para calcular la distancia entre un vértice inicial y el resto de vértices del grafo.

Las estructuras de datos necesarios para formular el algoritmo son las mismas que en el BFS si se añade una tabla $dist(\cdot)$ que almacena las distancias del vértice inicial al resto de vértices.

Entrada : $G(V, A)$ no ponderado, $s \in V$
Salida : La distancia, $dist(\cdot)$, de s al resto de vértices.
algoritmo *Distancias_no_ponderado*(G, s)
inicio
$Q \leftarrow \emptyset$
para $w \in V$
$estado[w] \leftarrow 0$
$dist[w] \leftarrow \infty$
finpara
$estado[s] \leftarrow 1$
$dist[s] \leftarrow 0$
añadir(Q, s)
mientras $Q \neq \emptyset$
$w \leftarrow$ *primero*(Q)
para u adyacente a w
si $estado[u] = 0$
entonces *añadir*(Q, u)
$estado[u] \leftarrow 1$
$dist[u] \leftarrow dist[w] + 1$
finsi
finpara
eliminar(Q)
finmientras
retorno $(dist)$
fin

Ejemplo 6-54

Se considera el grafo no ponderado representado en la figura.



La tabla registra el funcionamiento del algoritmo para este grafo, con vértice de inicio $s = 1$.

Q	Vértice añadido	Vértice eliminado	$dist$
1	1	-	[0,∞,∞,∞,∞,∞,∞]
12	2	-	[0,1,∞,∞,∞,∞,∞]
123	3	-	[0,1,1,∞,∞,∞,∞]
1234	4	-	[0,1,1,1,∞,∞,∞]
234	-	1	[0,1,1,1,∞,∞,∞]
2345	5	-	[0,1,1,1,2,∞,∞]
345	-	2	[0,1,1,1,2,∞,∞]
3456	6	-	[0,1,1,1,2,2,∞]
456	-	3	[0,1,1,1,2,2,∞]
56	-	4	[0,1,1,1,2,2,∞]
6	-	5	[0,1,1,1,2,2,∞]
67	7	-	[0,1,1,1,2,2,3]
7	-	6	[0,1,1,1,2,2,3]
∅	-	7	[0,1,1,1,2,2,3]

Si se compara este algoritmo con el algoritmo de Dijkstra aplicado a un grafo no ponderado, se puede observar que mientras Dijkstra tiene una complejidad $O(n^2)$, el BFS tiene una complejidad $O(n+m)$. Para grafos poco densos (pocas aristas), el algoritmo BFS tiene un comportamiento más eficiente que el algoritmo de Dijkstra.

4.2.3. Algoritmo de Floyd

El problema de buscar los caminos mínimos entre todos los pares de vértices de un grafo se puede resolver si se aplica n veces el algoritmo de Dijkstra:

Entrada : (G, w) de orden n
Salida : La distancia, $d(\cdot,\cdot)$, entre todos los pares de vértices.
algoritmo *todos_los_pares*(G)
  inicio
    para $s \in V$
      $d(s,\cdot) \leftarrow$ *Dijkstra*(G, s)
    finpara
    retorno (d)
  fin

que tendría una complejidad $O(n^3)$.

Otra alternativa es utilizar un algoritmo específico, de comparable eficiencia al algoritmo de Dijkstra, pero con un comportamiento mejor para grafos densos. Es el **algoritmo de Floyd**.

El algoritmo de Floyd...

...busca los caminos mínimos entre todos los pares de vértices de un grafo.

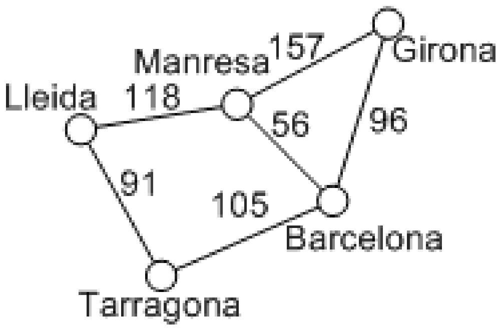
El algoritmo de Floyd considera los vértices ordenados y, en el paso k-ésimo, compara el peso del camino obtenido hasta el momento utilizando los $k-1$ vértices anteriores, con el camino obtenido añadiendo el vértice k-ésimo.

Se etiquetaran los vértices $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ y se utilizará una matriz bidimensional d_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) para almacenar las distancias.

Entrada : (G, w) de orden n
Salida : La distancia, $d(\cdot, \cdot)$, entre todos los pares de vértices.
algoritmo *Floyd*(G)
  inicio
    para $i \leftarrow 1$ **hasta** n
      para $j \leftarrow 1$ **hasta** n
        si $i = j$ **entonces** $d^0_{ij} \leftarrow 0$ **finsi**
        si $(i, j) \in A$ **entonces** $d^0_{ij} \leftarrow w(i, j)$ **finsi**
        si $(i, j) \notin A$ **entonces** $d^0_{ij} \leftarrow \infty$ **finsi**
      finpara
    finpara
    para $k \leftarrow 1$ **hasta** n
      para $i \leftarrow 1$ **hasta** n
        para $j \leftarrow 1$ **hasta** n
          $d^k_{ij} \leftarrow \min(d^{k-1}_{ij}, d^{k-1}_{ik} + d^{k-1}_{kj})$
        finpara
      finpara
    finpara
    retorno (d^n_{ij})
  fin

Ejemplo 6-55

Si se aplica el algoritmo de Floyd al grafo del ejemplo 6-49 (página 33)



se obtiene la serie de matrices bidimensionales (se supone que las ciudades están ordenadas alfabéticamente):

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 96 & \infty & 56 & 105 \\ 96 & 0 & \infty & 157 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 118 & 91 \\ 56 & 157 & 118 & 0 & \infty \\ 105 & \infty & 91 & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad d^1 = \begin{pmatrix} 0 & 96 & \infty & 56 & 105 \\ 96 & 0 & \infty & 152 & 201 \\ \infty & \infty & 0 & 118 & 91 \\ 56 & 152 & 118 & 0 & 161 \\ 105 & 201 & 91 & 161 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 96 & \infty & 56 & 105 \\ 96 & 0 & \infty & 152 & 201 \\ \infty & \infty & 0 & 118 & 91 \\ 56 & 152 & 118 & 0 & 161 \\ 105 & 201 & 91 & 161 & 0 \end{pmatrix} \quad d^3 = \begin{pmatrix} 0 & 96 & \infty & 56 & 105 \\ 96 & 0 & \infty & 152 & 201 \\ \infty & \infty & 0 & 118 & 91 \\ 56 & 152 & 118 & 0 & 161 \\ 105 & 201 & 91 & 161 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^4 = \begin{pmatrix} 0 & 96 & 174 & 56 & 105 \\ 96 & 0 & 270 & 152 & 201 \\ 174 & 270 & 0 & 118 & 91 \\ 56 & 152 & 118 & 0 & 161 \\ 105 & 201 & 91 & 161 & 0 \end{pmatrix} \quad d^5 = \begin{pmatrix} 0 & 96 & 174 & 56 & 105 \\ 96 & 0 & 270 & 152 & 201 \\ 174 & 270 & 0 & 118 & 91 \\ 56 & 152 & 118 & 0 & 161 \\ 105 & 201 & 91 & 161 & 0 \end{pmatrix}$$

Observar que d^5 coincide con la tabla obtenida en el ejemplo 6-51 (página 34).

Análisis del algoritmo de Floyd

El algoritmo de Floyd es muy fácil de analizar. Básicamente tiene dos partes. La iniciación de la matriz de distancias y el cálculo de las distancias.

La iniciación tiene una complejidad $O(n^2)$. El cálculo de las distancias tiene una complejidad $O(n^3)$. Así, todo el algoritmo tendrá una complejidad $O(n^3)$, independientemente del número de aristas y comparable a la eficiencia del algoritmo de Dijkstra aplicado n veces.

4.2.4. Ejercicios

6-56 La tabla siguiente representa la distancia entre varios aeropuertos unidos por una línea aérea.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	5	3	2	-	-	-
B	5	0	2	-	3	-	1
C	3	2	0	7	7	-	-
D	2	-	7	0	2	6	-
E	-	3	7	2	0	1	1
F	-	-	-	6	1	0	-
G	-	1	-	-	1	-	0

1) ¿Cuál es la distancia mínima entre el aeropuerto A y el resto de aeropuertos?

2) ¿Cuál es el número mínimo de transbordos de avión que habrá que hacer para ir del aeropuerto A al resto de aeropuertos?

6-57 Si en el algoritmo de Dijkstra se modifica la condición:

$$dist(u_i) + w(u_i, v) \leq dist(v)$$

¿como repercutirá en el funcionamiento del algoritmo? ¿Se obtendrá la misma distancia entre dos vértices? ¿Se obtendrá el mismo camino?

6-58 Suponer que se numeran los vértices del grafo K_n, $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, y a cada arista se le asigna un peso, $w(i, j) = |j - i|$. ¿Cuál será la distancia entre dos vértices cualesquiera?

6-59 Modificar el algoritmo de Dijkstra para obtener la solución a la variante del problema del camino mínimo (*single pair shortest path*), es decir, dados (G, w) y dos vértices $s, t \in V$, encontrar la distancia mínima de s a t.

6-60 A partir del algoritmo de Dijkstra proponer una solución a la variante del problema del camino mínimo (*single destination shortest path*), es decir, dados (G, w) y un vértice $t \in V$, encontrar la distancia mínima de todos los vértices de G a t.

6-61 La tabla siguiente representa el tiempo necesario para conectar directamente varios nodos de una red. El símbolo "-" significa que los dos nodos no son accesibles directamente. Utilizando el algoritmo de Floyd, encontrar el tiempo mínimo necesario para conectar dos a dos todos los pares de nodos de la red

	1	2	3	4	5
1	0	3	8	-	4
2	-	0	-	1	7
3	-	4	0	-	-
4	2	-	5	0	-
5	-	-	-	6	0

4.2.5. Soluciones

6-56 En el primer caso se debe aplicar el algoritmo de Dijkstra sobre el grafo que se obtiene a partir de la tabla de distancias:

A	B	C	D	E	F	G
(0,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)*	(5,A)	(3,A)	(2,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)	(5,A)	(3,A)	(2,A)*	(4,D)	(8,D)	(∞,A)
(0,A)	(5,A)	(3,A)*	(2,A)	(4,D)	(8,D)	(∞,A)
(0,A)	(5,A)	(3,A)	(2,A)	(4,D)*	(5,E)	(5,E)
(0,A)	(5,A)*	(3,A)	(2,A)	(4,D)	(5,E)	(5,E)
(0,A)	(5,A)	(3,A)	(2,A)	(4,D)	(5,E)*	(5,E)
(0,A)	(5,A)	(3,A)	(2,A)	(4,D)	(5,E)	(5,E)*

La última fila de la tabla da las distancias mínimas entre el aeropuerto A y el resto de aeropuertos.

En el segundo caso, se puede considerar el mismo grafo pero ahora sin pesos, es decir, sólo interesa saber el número de aristas que unen el aeropuerto A con el resto de aeropuertos. En este caso, se puede aplicar el algoritmo para calcular distancias en el caso no ponderado:

Q	Vértice añadido	Vértice eliminado	$dist$
A	A	-	[0,∞,∞,∞,∞,∞,∞]
AB	B	-	[0,1,∞,∞,∞,∞,∞]
ABC	C	-	[0,1,1,∞,∞,∞,∞]
ABCD	D	-	[0,1,1,1,∞,∞,∞]
BCD	-	A	[0,1,1,1,∞,∞,∞]
BCDE	E	-	[0,1,1,1,2,∞,∞]
BCDEG	G	-	[0,1,1,1,2,2,∞]
CDEG	-	B	[0,1,1,1,2,2,∞]
DEG	-	C	[0,1,1,1,2,2,∞]
DEGF	F	-	[0,1,1,1,2,2,2]
EFG	-	D	[0,1,1,1,2,2,2]
FG	-	E	[0,1,1,1,2,2,2]
G	-	F	[0,1,1,1,2,2,2]
$\emptyset$	-	-	[0,1,1,1,2,2,2]

La lista [0,1,1,1,2,2,2] da el número de transbordos que habrá que hacer para conectar el aeropuerto A con el resto de aeropuertos.

6-57 El algoritmo continúa funcionando correctamente y, por lo tanto, se obtiene la misma distancia mínima pero el camino puede ser diferente.

6-58 Se observa que si se aplica el algoritmo de Dijkstra sobre un grafo ponderado, a cada paso se fija la distancia a un vértice, que ya es definitiva. Si se parte del vértice i, en el primer paso se fijará la distancia del vértice $i-1$ o $i+1$ que son los que están a distancia 1 de i. En el paso siguiente, tanto si se elige $i-1$ como $i+1$, se fijará la distancia del vértice $i+2$, y así sucesivamente. Por lo tanto, la distancia entre i y j será el peso de la arista que une i y j: $d(i,j) = |j-i|$.

6-59 Puesto que a cada paso el algoritmo de Dijkstra fija la distancia a un vértice, que ya no se modificará, será suficiente con modificar el bucle del algoritmo para que se pare cuando se fije la distancia al vértice t:

Entrada : (G,w) de orden n y dos vértices s,t.
Salida : La distancia, $dist$, de s a t.
algoritmo *SinglePairShortestPath*(G,s,t)
  inicio
    $U \leftarrow \emptyset$
    para $v \in V$
        $dist(v) \leftarrow \infty$
    finpara
    $dist(s) \leftarrow 0$
    $i \leftarrow 0$
    mientras $(i < n) \wedge (t \notin U)$
        u_i vértice que logra lo $\min\{dist(v) \mid v \in V-U\}$
        $U \leftarrow U \cup \{u_i\}$
        para $v \in V-U$ adyacente a u_i **si** $dist(u_i)+w(u_i,v) < dist(v)$
                entonces $dist(v) \leftarrow dist(u_i)+w(u_i,v)$
                    Se etiqueta v con $(dist(v),u_i)$
            finsi
        finpara
        $i \leftarrow i+1$
    finmientras
    retorno $(dist(t))$
  fin

Este algoritmo es equivalente (tiene la misma complejidad) que el algoritmo de Dijkstra, pero si sólo se necesita buscar la distancia entre dos vértices concretos, tiene un comportamiento mejor que la versión general.

6-60 En el supuesto de que G sea un grafo simple (no dirigido) entonces se puede utilizar directamente el algoritmo de Dijkstra para resolver esta variante:

<u>**Entrada**</u> : (G, w) no dirigido, de orden n y un vértice t.
<u>**Salida**</u> : La distancia, $d(\cdot)$, de todos los vértices a t.
<u>**algoritmo**</u> *SingleDestinationShortestPath*(G, t)
  <u>**inicio**</u>
    <u>**retorno**</u> (*Dijkstra(G,t)*)
  <u>**fin**</u>

Si G es un digrafo (grafo dirigido), sólo hace falta crear un nuevo grafo G' con los mismos vértices que G y de manera que sus arcos sean los arcos de G con las orientaciones cambiadas. Acto seguido, sólo hace falta aplicar el algoritmo de Dijkstra a este nuevo grafo con origen en el vértice t:

<u>**Entrada**</u> : (G, w) dígrafo, de orden n y un vértice t.
<u>**Salida**</u> : La distancia, $d(\cdot)$, de todos los vértices a t.
<u>**algoritmo**</u> *SingleDestinationShortestPath*(G, t)
  <u>**inicio**</u>
    Generar $G'(V, A')$ a partir de G
    <u>**retorno**</u> (*Dijkstra(G',t)*)
  <u>**fin**</u>

6-61 La tabla inicial para aplicar el algoritmo de Floyd es:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Después de aplicar el algoritmo se obtiene la tabla

$$d^5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 7 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 11 & 11 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

donde el valor de la posición (i, j) representa el tiempo mínimo para conectar el nodo i con el j.

Ejercicios de autoevaluación

6-62 ¿Cuántos caminos de longitud $k = 2, 3, 4$ y 5 entre dos vértices diferentes tiene el grafo K_4? Encontrar una fórmula para calcular el número de caminos de longitud k entre dos vértices diferentes de K_n.

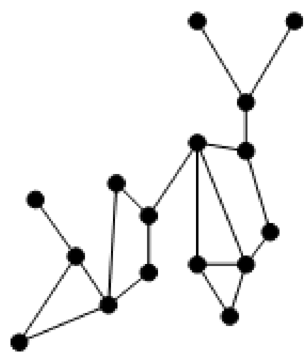
6-63 El algoritmo DFS utiliza una pila para recordar el orden en qué se han visitado los vértices y poder recuperarlos. La pila se puede sustituir por un llamamiento recursivo. Construir la versión recursiva del algoritmo DFS y comprobar su funcionamiento con el grafo del ejemplo 6-19 (página 15).

6-64 Sea $G = (V, A)$ un grafo de diecisiete vértices con cuatro componentes conexas. Probar que por lo menos una de las componentes tiene un mínimo de cinco vértices.

6-65 Demostrar que un grafo con secuencia de grados 2, 2, 2, 2, 2 tiene que ser necesariamente conexo.

6-66 Sea $G = (V, A)$ un grafo de orden $|V| = n \geq 2$ de manera que el grado de cada vértice $v \in V$ satisface $g(v) \geq \frac{1}{2}(n-1)$. Demostrar que G es un grafo conexo. Estudiad si puede afirmarse que son conexos los grafos con las secuencias de grados 2,2,2,2; 2,2,2,2,2; 3,3,3,3,3,3.

6-67 Una arista a de un grafo conexo $G = (V, A)$ se dice que es una **arista-puente** si el grafo $G - a = (V, A - \{a\})$ es no conexo. Considerar el grafo de la figura siguiente e indicad cuáles son las aristas puente.



6-68 Sea G un grafo conexo conteniendo sólo vértices de grado par. Demostrar que G no puede contener ninguna arista-puente.

6-69 Un proceso de manufactura empieza con un trozo de madera en bruto. La madera tiene que ser cortada, pulida, agujereada y pintada. Cortar se tiene que hacer antes de agujerear y, pulir, antes de pintar. Considerar que los requerimientos de tiempo para cada operación son los siguientes: cortar pide una unidad; pulir, también una; pintar, cuatro, si la madera no está cortada y, dos, si ya lo está; agujerear pide tres unidades, si la madera no está pulida, cinco, si es pulida pero no pintada, y siete, si ya está pintada.

1) ¿Qué orden de realización de procesos hace falta seguir para minimizar el tiempo total? ¿Es único?

2) ¿Qué coste tendría que tener agujerear si lo se quiere realizar tras pulir pero antes de pintar, para que el coste continúe siendo mínimo?

6-70 Una labradora tiene una garrafa de ocho litros llena de vino, y dispone sólo de dos garrafas vacías de cinco y tres litros, respectivamente. ¿Cuál es el número mínimo de pasos que tiene que hacer para repartir el vino en dos partes iguales?

6-71 Proponer un algoritmo eficiente para calcular el diámetro de un grafo.

Se define el **centro** de un grafo G como el vértice tal que la suma de distancias al resto de vértices sea mínima. Proponer un algoritmo eficiente para calcular el centro de un grafo G.

Soluciones

6-62 Para $k = 2$ hay dos caminos. Si $k = 3$, también hay 2. Para $k = 4$ y $k = 5$ no hay ninguno.

Hay $\binom{n-2}{k-1} \cdot (k-1)!$ caminos de longitud k, si $k \leq n-1$.

6-63 Versión recursiva del algoritmo DFS:

```
Entrada : G(V,A), v ∈ V
Salida : R, vértices visitados
algoritmo DFS(G,v)
  inicio
    R ← ∅
    para w ∈ V
          estado[w] ← 0
    finpara
    dfsrec(G,v,R,estado)
    retorno (R)
  fin

función dfsrec(G,v,R,estado)
  inicio
    estado[v] ← 1
    añadir(R,v)
    para w adyacente a v
          si estado[w] = 0
             entonces dfsrec(G,w,R,estado)
          finsi
    finpara
  fin
```

6-64 Sea V el conjunto de vértices y sea $|V| = 17$. Si G_1, G_2, G_3, G_4 son las componentes conexas de G y V_1, V_2, V_3, V_4 los conjuntos de vértices respectivos, entonces se tiene que $\sum_{i=1}^{4} |V_i| = |V| = 17$. Si no se cumpliera la afirmación que hay que demostrar, sería $|V_1| \leq 4$, $|V_2| \leq 4$, $|V_3| \leq 4$, $|V_4| \leq 4$, puesto que el orden de un grafo siempre es un entero. De aquí resulta una contradicción: $17 = |V_1|+|V_2|+|V_3|+|V_4| \leq 4+4+4+4 = 16$.

6-65 Sea $G = (V, A)$ un grafo de orden $n = 5$ con la secuencia de grados anterior. Si fuese no conexo tendría un mínimo de dos componentes conexas, que se puede suponer que son G_1 y G_2 (y podrían ser más); se supone que como grafos que son sus órdenes son respectivamente n_1 y n_2; se cumple obviamente $n_1 + n_2 \leq n = 5$. Ahora bien, estas componentes conexas son grafos 2-regulares y, por lo tanto, los órdenes respectivos tienen que ser como mínimo 3; en consecuencia $6 = 3 + 3 \leq n_1 + n_2 \leq n = 5$, cosa que es absurda. Esto prueba que el grafo es conexo.

6-66 Se supone que G es no conexo y sean, por lo tanto, $C_1, \ldots, C_k$, $k \geq 2$, las componentes conexas de G, con conjuntos de vértices respectivos $V_1, \ldots, V_k$, y sea $q_i = |V_i|$, para $i = 1, \ldots, k$. Evidentemente es $q_i + \ldots + q_k = n$.

Se consideran dos vértices u, w que pertenezcan a dos componentes conexas diferentes; se supone, por ejemplo, que $u \in C_i$, $w \in C_j$, $i \neq j$. Entonces u puede ser adyacente como mucho a los $q_i - 1$ vértices restantes a la componente conexa a la cual pertenece, es decir que $g(u) \leq q_i - 1$, y análogamente para w. Teniendo en cuenta esto y aplicando la hipótesis, se puede afirmar:

$$\frac{n-1}{2} \leq g(u) \leq q_i - 1, \quad \frac{n-1}{2} \leq g(w) \leq q_j - 1$$

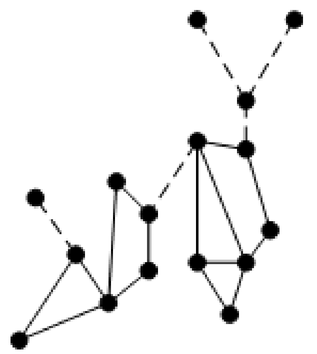
de aquí se puede obtener obtener inmediatamente

$$n-1=\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}\leq g(u)+g(w)\leq q_i+q_j-2\leq n-2$$

que es una conclusión absurda; por lo tanto, el grafo tiene que ser conexo.

Con respecto a los grafos con las secuencias indicadas, tienen que ser conexos en aplicación del resultado. Buscar ejemplos de grafos con estas secuencias de grados.

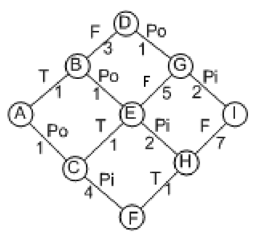
6-67 En la siguiente figura se indican las aristas-puente con línea discontinua.



6-68 Se supone que $G=(V,A)$ es conexo y sea $a=\{v,w\}$ una arista-puente. Se considera el grafo auxiliar que resulta de la eliminación de la arista anterior, es decir, $G'=G-a$.

Si en el grafo G se cumplía $g_G(v)=2k\geq 2$ y $g_G(w)=2k'\geq 2$, en el nuevo grafo G' se cumplirá $g_{G'}(v)=2k-1$ y $g_{G'}(w)=2k'-1$, grados impares, y sin que el resto de grados varíe. Siendo a arista-puente y G grafo conexo, el grafo $G'=G_1\cup G_2$ es reunión de dos componentes conexas y los vértices extremos de la arista a se han distribuido, uno en cada uno de estas componentes conexas; esto conduce a una contradicción. En efecto, si por ejemplo $v\in V(G_1)$, entonces, considerado como grafo, sería un grafo con un vértice de grado impar y el resto de grado par, con lo cual habría un número impar de vértices de grado impar, cosa que es imposible, como consecuencia de la fórmula de los grados.

6-69 El grafo siguiente muestra las diferentes situaciones que se dan en el problema:

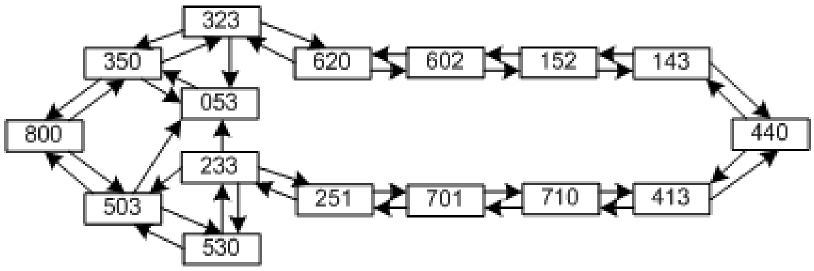


Las aristas representan cada uno de los procesos que se tienen que hacer y su coste; los vértices son los estados finales de estos procesos.

1) Siguiendo el algoritmo de Dijkstra, podéis comprobar de manera sencilla que el recorrido más barato desde A hasta I es ABDGI. El coste será de 7.

2) El coste actual de agujerear tras pulir, antes de pintar, es 5. El coste total de hacer todo el proceso de este modo es 9. Puesto que el coste mínimo es 7, se tendría que reducir en 2 unidades el coste de agujerear tras pulir, antes de pintar, para igualar el recorrido mínimo. Por lo tanto, el coste tiene que ser 3.

6-70 El digrafo siguiente representa las diferentes transiciones entre las garrafas. La etiqueta de cada vértice representa el contenido de cada una de la tres garrafas:



Se debe notar que no se han representado todos los estados. Sólo aquellos más relevantes.

Dado que sólo se quiere conocer el número mínimo de transiciones necesarias para repartir el vino, se trata de en un problema de búsqueda del camino mínimo en un grafo no ponderado. Aplicando el algoritmo, se obtiene que el número mínimo de pasos es 7 y la secuencia de transiciones es: $800 \rightarrow 350 \rightarrow 323 \rightarrow 620 \rightarrow 602 \rightarrow 152 \rightarrow 143 \rightarrow 440$.

6-71 Tanto para calcular el diámetro como el centro de un grafo G se necesita disponer de las distancias entre todos los pares de vértices del grafo. Por lo tanto, se utilizará el algoritmo de Floyd para calcularlas.

Entrada : (G, w) grafo ponderado de orden n.
Salida : El diámetro, D, del grafo.
algoritmo *Diámetro*(G)
inicio
$d \leftarrow Floyd(G)$;
$D \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **hasta** n
para $j \leftarrow 1$ **hasta** n
si $d(i,j) > D$
entonces $D \leftarrow d(i,j)$
finsi
finpara
finpara
retorno (D)
fin

Para estudiar la eficiencia de este algoritmo, se debe observar que básicamente se aplica el algoritmo de Floyd (que ya se sabe que tiene una complejidad $O(n^3)$) y se busca el valor máximo de una tabla de de n^2 valores, que tiene una complejidad $O(n^2)$. En total tendrá una complejidad $O(n^3)$ comparable con la del algoritmo de Floyd.

Para calcular el centro del grafo se necesita, además de las distancias entre todos los pares de vértices, la suma de distancias de cada vértice al resto:

Entrada : (G, w) grafo ponderado de orden n.
Salida : El centro, C, del grafo.
algoritmo *Centro*(G)
inicio
$d \leftarrow Floyd(G)$;
$C \leftarrow 1$
$Dmin \leftarrow \sum_{j=1}^{n} d(1,j)$
para $i \leftarrow 2$ **hasta** n
$D \leftarrow \sum_{j=1}^{n} d(i,j)$
si $D < Dmin$
entonces $Dmin \leftarrow D$
$C \leftarrow i$
finsi
finpara
finpara
retorno (C)
fin

Para calcular la eficiencia se debe recordar que se calculan las distancias entre todos los pares de vértices utilizando el algoritmo de Floyd (con una complejidad $O(n^3)$) y se debe calcular la suma de todas las filas de la matriz d. Esto se hace con una complejidad $O(n^2)$. En total tendrá una complejidad $O(n^3)$ comparable con el algoritmo de Floyd.

Árboles

Ramon Masià
Jaume Pujol
Josep Rifà
Mercè Villanueva

P06/75006/01400

www.uoc.edu

Índice

Introducción

Los árboles ocupan un lugar de primer orden en algorítmica y estructuras de datos; su presencia es ubicua en informática. En este módulo se presenta una introducción a los aspectos más básicos de la teoría.

En primer lugar, se caracterizan los árboles de varias formas, se presentan las propiedades más básicas, se demuestra que todo árbol con un mínimo de dos vértices tiene un mínimo de dos hojas y se caracterizan los grafos conexos como los que admiten árboles generadores.

Seguidamente, se estudia el problema de la obtención del árbol generador de un grafo conexo. En el contexto de los grafos ponderados se presentan dos algoritmos clásicos para obtener árboles generadores minimales, el de Kruskal y el de Prim.

Finalmente, se estudian los árboles con raíz y se obtienen relaciones importantes entre la altura o profundidad de un árbol con raíz y el número de hojas, relaciones que son útiles para obtener evaluaciones de la complejidad de determinados algoritmos, en particular de ordenación.

1. Conceptos básicos

Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos. Los grafos acíclicos también se denominan *bosques* y la razón es que un grafo acíclico es la reunión de sus componentes conexas, que seguirán siendo acíclicas y, en consecuencia, serán árboles; así, los grafos acíclicos son unión de árboles, es decir, son "bosques". Existen numerosos resultados de caracterización y propiedades de los árboles.

En particular, existe un resultado fundamental que caracteriza los grafos conexos como los grafos que admiten árboles generadores. Uno de los problemas importantes, especialmente en economía, es el de obtener un árbol generador minimal de un grafo ponderado.

Se puede considerar el concepto de recorrido y de camino orientados o dirigidos; las definiciones serían similares al caso no orientado, pero con arcos que se concatenan y con orientaciones concordantes. Se pueden considerar generalizaciones con multiarcos y lazos dirigidos. El orden es el número de vértices y la medida el número de arcos. En particular es conveniente introducir los árboles con raíz.

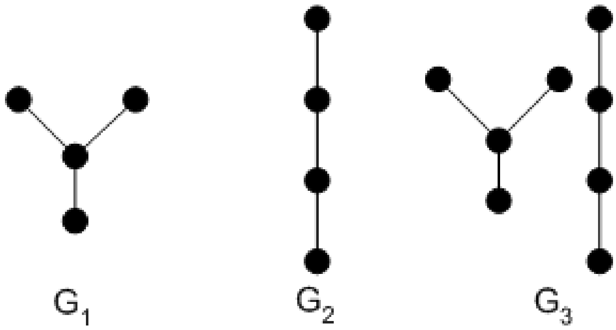
1.1. Caracterización de los árboles

Definición 7.1

Un **árbol** es un grafo conexo sin ciclos. Si eliminamos la condición de conectividad, obtenemos un **bosque**, es decir, un bosque es un grafo acíclico.

Ejemplo 7-1

En la figura siguiente podemos ver ejemplos de dos árboles y un bosque. G_1 es un árbol de orden 4 (isomorfo al grafo E_4), G_2 es otro árbol de orden 4 (isomorfo al grafo trayecto T_4). Finalmente, G_3 es un bosque (isomorfo a $E_4 \cup T_4$):



Obsérvese que cada componente conexa de un bosque es un árbol. Por lo tanto, podríamos decir que un bosque es la unión de una colección de árboles.

Teorema 7.2

Si $T = (V, A)$ es un grafo de orden n y medida m, entonces las propiedades siguientes son equivalentes:

1) T es un árbol.

2) Entre cada pareja de vértices de T existe un único camino.

3) T es conexo y $m = n - 1$.

4) T es acíclico y $m = n - 1$.

Demostración: **1)** $\Leftrightarrow$ **2)** Si T es un árbol, entonces entre cada pareja de vértices hay un camino. Puesto que T no contiene ningún ciclo, este camino tiene que ser único, ya que si hubiera dos caminos diferentes C_1 y C_2 entre u y v entonces el recorrido $C_1 \cup C_2$ sería cerrado y, por lo tanto, contendría un ciclo. Recíprocamente, si entre cada pareja de vértices de T existe un único camino, T es conexo y no contiene ciclos.

1) $\Leftrightarrow$ **3)** T es conexo por la propia definición de árbol. Demostraremos por inducción que $m = n - 1$. Para $n = 1$ el resultado es trivialmente cierto. Supongamos el resultado cierto para todo árbol de orden $k < n$ y vamos a demostrarlo para n. Sea T un árbol de orden n y sea $e = \{u, v\}$ una arista de T. Puesto que ya hemos probado que **1)** $\Leftrightarrow$ **2)** podemos afirmar que esta arista es el único camino que une los vértices u y v; y, por lo tanto, el grafo $T - e$ está formado exactamente por dos componentes conexas T_u, que contiene u, y T_v, que contiene v. Cada una de estas componentes conexas es un árbol, ya que es un subgrafo de T. Puesto que su orden es menor o igual que n, podemos aplicar la hipótesis de inducción a T_u y a T_v: $m_{T_u} = n_{T_u} - 1$ y $m_{T_v} = n_{T_v} - 1$. Por lo tanto,

$$m = m_{T_u} + m_{T_v} + 1 = n_{T_u} - 1 + n_{T_v} - 1 + 1 = n - 1$$

Recíprocamente, es necesario demostrar que si T es un grafo conexo de orden n y medida $n - 1$ entonces T es acíclico. Ya sabemos que un grafo conexo de orden n debe tener un mínimo de $n-1$ aristas. Si contuviera un ciclo, eliminando una arista del ciclo, continuaría siendo conexo pero tendría medida $n - 2$, que no es posible.

1) $\Leftrightarrow$ **4)** La implicación **1)** $\Rightarrow$ **4)** se deduce directamente de la definición de árbol y de la equivalencia anterior. Recíprocamente, debemos demostrar que si T es un grafo acíclico de orden n y medida $n-1$ entonces T es conexo. Sean $T_1, \ldots, T_k$ ($k \geq 1$) las componentes conexas de T. Puesto que cada T_i no contiene ciclos y es conexo, será un árbol y $n_{T_i} = m_{T_i} - 1$. Por lo tanto,

$$n - 1 = m = \sum_{i=1}^{k} m_{T_i} = \sum_{i=1}^{k} (n_{T_i} - 1) = n - k$$

de esta última igualdad se deduce que $k = 1$ y, por lo tanto, T es conexo. ∎

Definición 7.3

Una **hoja** de un árbol es un vértice de grado 1.

Proposición 7.4

Todo árbol con un mínimo de dos vértices tiene un mínimo de dos hojas.

Demostración: Sea $T = (V, A)$ un árbol de orden n, y sea F el conjunto de las hojas; puesto que $|A| = n - 1$, por la fórmula de los grados podemos escribir:

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= 2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in F} g(v) + \sum_{v \notin F} g(v) = \\ &= \sum_{v \in F} 1 + \sum_{v \notin F} g(v) \geq |F| + \sum_{v \notin F} 2 = |F| + 2(n - |F|) \end{aligned}$$

Así, de la desigualdad anterior se deriva $|F| \geq 2$. ∎

Ejemplo 7-2

Demostraremos que un bosque de orden n formado por k árboles tiene medida $n - k$.

En efecto, el bosque $G = (V, A)$ será reunión de las componentes conexas $T_1, \ldots, T_k$ ($k \geq 1$), que también son árboles. A cada una de ellas se les puede aplicar el resultado $m_{T_i} = n_{T_i} - 1$ y, por lo tanto, podemos escribir

$$|A| = \sum_{i=1}^{k} m_{T_i} = \sum_{i=1}^{k} (n_{T_i} - 1) = (\sum_{i=1}^{k} n_{T_i}) - k = n - k.$$

Ejemplo 7-3

Calculemos el número de hojas de un árbol que tiene un vértice de grado 3, tres vértices de grado 2 y el resto vértices de grado 1.

Recordemos que si $T = (V, A)$ es un árbol, entonces $m = n - 1$, siendo n el orden y m la medida de T.

Si x es el número de hojas, se cumple $n = x + 3 + 1$, y si se aplica la fórmula de los grados se tiene:

$$x + 3 \cdot 2 + 3 = \sum_{v \in V} g(v) = 2(n-1) = 2(x + 3 + 1 - 1) = 2x + 6,$$

así, $x = 3$. La secuencia de grados es, pues, $3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$.

Ejemplo 7-4

Sea $T = (V, A)$ un árbol de orden $n = 9$, que tiene tres vértices de grado 3, veamos cuál es la secuencia completa de grados.

Supongamos que $V = \{v_1, \ldots, v_9\}$ y que $x_i = g(v_i)$, $i = 1, \ldots, 9$ son los grados de los vértices del árbol. Puesto que $n \geq 2$, por la proposición 7.4, existe un mínimo de dos hojas, es decir, un mínimo de dos vértices de grado 1, de manera que la secuencia de grados es $3, 3, 3, 1, 1, x_6, x_7, x_8, x_9$ con x_6, x_7, x_8, x_9 a determinar.

Por un lado, por la fórmula de los grados podemos escribir:

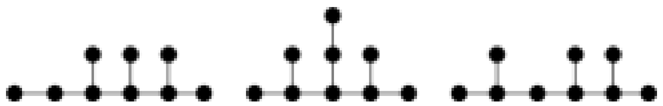
$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$$

Y, por otro lado, en todo árbol de orden n se cumple $|A| = n - 1 = 9 - 1 = 8$. Si sustituimos en la igualdad anterior, resultará: $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 5$.

Puesto que un árbol es conexo, no puede haber vértices de grado 0, de donde resulta que $x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 1$ y, en consecuencia, el valor de estas incógnitas tiene que ser 1, excepto una que tiene que ser 2.

Por lo tanto, la secuencia completa es 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1.

En el gráfico siguiente podemos ver tres ejemplos de árboles no isomorfos con esta secuencia de grados, lo cual demuestra, en particular, que existen.



1.1.1. Ejercicios

7-5 Dados nueve puntos en el plano, se trata de unir algunas parejas de manera que el gráfico resulte un árbol. ¿Cuál es el número de trazos que se tendrán que añadir al dibujo?

7-6 Consideremos un grafo conexo $G = (V, A)$ de orden $|V| = n$. Si $|A| \geq n$, ¿podemos afirmar que el grafo tiene algún ciclo?

7-7 ¿Cuál es el valor de la suma de los grados de los vértices de un árbol de orden n?

7-8 ¿Qué árboles son grafos regulares?

7-9 ¿Puede ser árbol un grafo 3-regular?

7-10 ¿Existen árboles de orden n, para todo n?

7-11 Un grafo 3-regular conexo contiene necesariamente algún ciclo. ¿Cierto o falso?

7-12 Un bosque contiene treinta vértices y veinticinco aristas. ¿Cuántas componentes conexas tiene?

1.1.2. Soluciones

7-5 8, puesto que en un árbol el número de aristas es el número de vértices menos uno.

7-6 En el caso conexo sí que se puede afirmar; puesto que si fuera acíclico, sería árbol y, en consecuencia sería $|A| = n - 1$.

7-7 Por la fórmula de los grados, esta suma es $2|A| = 2(n - 1) = 2n - 2$.

7-8 Sólo el grafo trivial y K_2, porque el resto de árboles tienen vértices de grado 1 (las hojas) y vértices de grado superior.

7-9 No, puesto que tendría que ser $|A| = |V| - 1$.

7-10 Sí, por ejemplo los grafos trayecto.

7-11 Cierto, puesto que de lo contrario sería acíclico y, por lo tanto, árbol; en consecuencia habría vértices de grado 1, contradicción.

7-12 Recordemos que un bosque es un grafo unión de árboles. Sea, pues, $G = T_1 \cup \ldots \cup T_k$ la descomposición de G en reunión de k componentes conexas, que son árboles. Sean n y m el orden y la medida de G; y n_i y m_i el orden y la medida de T_i. De las relaciones $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ y $m_i = n_i - 1$ se deduce

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} 1 = n - k$$

Por lo tanto, $k = n - m = 30 - 25 = 5$ componentes conexas.

2. Árboles generadores

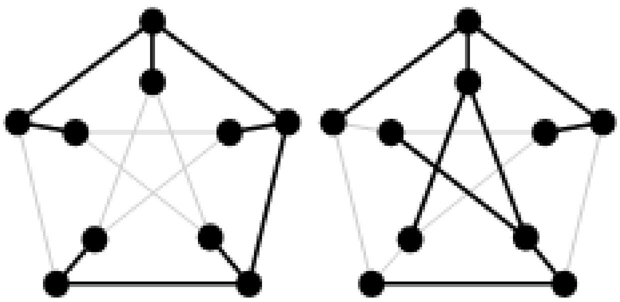
2.1. Propiedades básicas de los árboles generadores

Definición 7.5

Un **árbol generador** de un grafo es un subgrafo generador que tiene estructura de árbol; en consecuencia, un árbol generador contiene todos los vértices del grafo. También se denominan **árboles de expansión** (*spanning tree*, en inglés).

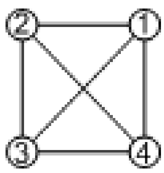
Ejemplo 7-13

Veamos que un grafo puede contener varios árboles generadores, indicados con un trazo grueso:

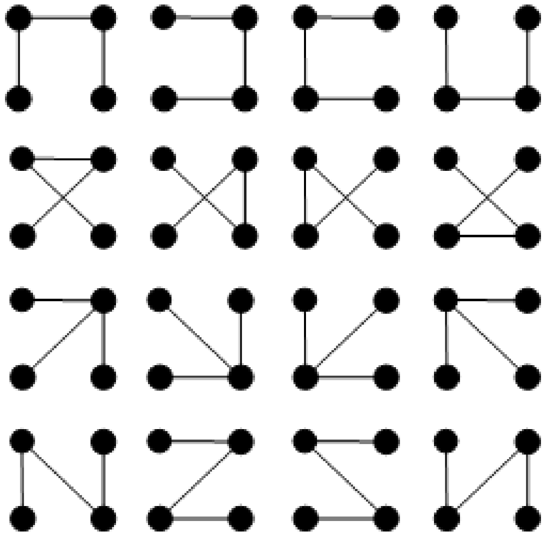


Ejemplo 7-14

Determinemos todos los árboles generadores, con independencia de isomorfismo, del grafo $G = (V, A)$:



Un árbol generador $T = (V, A')$ es un subgrafo generador de G, es decir, con el mismo conjunto de vértices, que como grafo es un árbol. En particular, por ser árbol, es $|A'| = |V| - 1 = 3$. Así, los árboles generadores son los siguientes:



El resultado siguiente garantiza la existencia de árboles generadores en un grafo conexo:

Proposición 7.6

Para un grafo $G = (V, A)$ las propiedades siguientes son equivalentes:

1) G es conexo.

2) G contiene un árbol generador.

Demostración: **2)** $\Rightarrow$ **1)**: Sea $T = (V, A)$ un árbol generador de G, y sean u, v vértices de G, que también lo son de T; siendo T conexo, hay un camino que conecta los vértices anteriores en T, pero las aristas correspondientes son de G y, por lo tanto, es un camino de G; en consecuencia, G es conexo.

1) $\Rightarrow$ **2)**: Si G es un árbol ya hemos acabado: el árbol generador es el propio grafo. De lo contrario, siendo conexo, tiene que contener algún ciclo C; eliminamos una arista de este ciclo, creando un nuevo grafo G_1, que seguirá siendo conexo (puesto que la eliminación de una arista de un ciclo no produce desconexión), sigue teniendo los mismos vértices que G (puesto que no hemos eliminado ninguno) y la medida ha disminuido en una unidad. Si G_1 es árbol, será un árbol generador y hemos acabado la demostración. De lo contrario, contiene algún ciclo, y la demostración sigue del mismo modo que antes, eliminando una arista del ciclo. Este proceso es finito, dado que el número de aristas es finito y, por lo tanto, se tiene que llegar a un subgrafo conexo acíclico con todos los vértices del grafo G, es decir, a un árbol generador. ∎

De la definición de árbol generador y del resultado anterior podemos deducir las propiedades siguientes:

Proposición 7.7

- Si $G = (V, A)$ es conexo de orden n entonces contiene un árbol generador de orden n y medida $n - 1$.
- Si $G = (V, A)$ no es conexo entonces cada componente conexa contiene un árbol generador, cuya reunión es un bosque, el **bosque generador** de G.
- Si T es un árbol generador del grafo G entonces, eliminando una arista de T, el árbol deja de ser conexo; si, además, $T \neq G$, añadiendo una arista a T (de las aristas de G que no están en T) entonces T deja de ser acíclico.

2.1.1. Determinación de un árbol generador

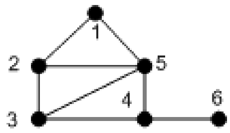
La demostración de la proposición 7.6 da un método para construir árboles generadores: ir eliminando aristas de los ciclos del grafo. Sin embargo, es más eficiente utilizar los algoritmos de exploración de grafos. Así, el algoritmo siguiente utiliza el *BFS* para obtener un árbol generador del grafo conexo $G = (V, A)$, partiendo del vértice $v \in V$.

```
Entrada : G(V,A), v ∈ V
Salida : T, árbol generador de G
algoritmo BFS-ArbolGenerador(G, v)
  inicio
    Q ← ∅
    V(T) ← V(G)
    A(T) ← ∅
    para w ∈ V(G)
        estado[w] ← 0
    finpara
    estado[v] ← 1
    añadir(Q, v)
    mientras Q ≠ ∅
            w ← primero(Q)
            para u adyacente a w
                si estado[u] = 0
                  entonces añadir(Q, u)
                           estado[u] ← 1
                           añadir(A(T), {w, u})
                finsi
            finpara
            eliminar(Q)
    finmientras
    retorno (T)
  fin
```

Simulación del algoritmo

Ejemplo 7-15

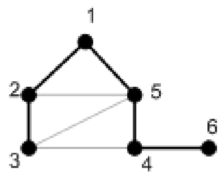
Consideremos el grafo representado en la figura



La tabla siguiente registra el funcionamiento del algoritmo para este grafo, con vértice de inicio $v = 1$.

Q	Aristas añadidas	$A(T)$
1	-	$\emptyset$
12	$\{1,2\}$	$\{\{1,2\}\}$
125	$\{1,5\}$	$\{\{1,2\},\{1,5\}\}$
25	-	$\{\{1,2\},\{1,5\}\}$
253	$\{2,3\}$	$\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\}\}$
53	-	$\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\}\}$
534	$\{5,4\}$	$\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{5,4\}\}$
34	-	$\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{5,4\}\}$
4	-	$\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{5,4\}\}$
46	$\{4,6\}$	$\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{5,4\},\{4,6\}\}$
6	-	$\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{5,4\},\{4,6\}\}$
$\emptyset$	-	$\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{5,4\},\{4,6\}\}$

El árbol generador obtenido se puede ver en el gráfico siguiente con las aristas indicadas con un trazo grueso:



Variando el vértice inicial y el orden de elección de las aristas podemos obtener diferentes árboles generadores.

2.1.2. Ejercicios

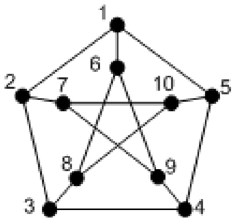
7-16 ¿Cuántos árboles generadores tiene un árbol?

7-17 En un árbol generador de un grafo de orden n, ¿cuántas aristas hay?

7-18 Sea G un grafo conexo y T un árbol generador de G. ¿Cuál es el subgrafo inducido por el conjunto de vértices $V(T)$?

7-19 Diseñar el algoritmo *DSF-ArbolGenerador*(G, v) que permita obtener un árbol generador de un grafo conexo $G = (V, A)$ a partir del algoritmo *DFS*. Estudiar la complejidad.

7-20 Utilizando los algoritmos *BFS-ArbolGenerador* y *DFS-ArbolGenerador* encontrar, empezando por el vértice 1, árboles generadores del grafo de Petersen:



2.1.3. Soluciones

7-16 Sólo uno, él mismo.

7-17 $n-1$.

7-18 Todo el grafo G.

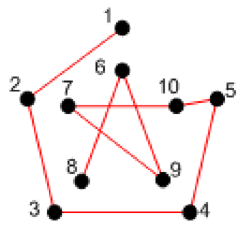
7-19 Utilizando la versión recursiva del algoritmo *DFS*:

<u>**Entrada**</u> : $G(V,A), v \in V$
<u>**Salida**</u> : T, árbol generador de G
<u>**algoritmo**</u> *DFS-ArbolGenerador*(G,v)
  <u>**inicio**</u>
    $V(T) \leftarrow V(G)$
    $A(T) \leftarrow \emptyset$
    <u>**para**</u> $w \in V$
        $estado[w] \leftarrow 0$
    <u>**finpara**</u>
    dfsrec$(G,v,T,estado)$
    <u>**retorno**</u> (T)
  <u>**fin**</u>

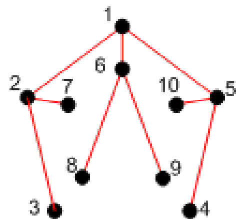
<u>**función**</u> *dfsrec*$(G,v,T,estado)$
  <u>**inicio**</u>
    $estado[v] \leftarrow 1$
    <u>**para**</u> w adyacente a v
        <u>**si**</u> $estado[w] = 0$
          <u>**entonces**</u>
              añadir$(A(T),\{v,w\})$
              dfsrec$(G,w,T,estado)$
        <u>**finsi**</u>
    <u>**finpara**</u>
  <u>**fin**</u>

Tanto el *DFS-ArbolGenerador* como el *BFS-ArbolGenerador* utilizan los mismos recursos que el *DFS* y *BFS*, respectivamente. Por lo tanto, su complejidad será $O(n+m)$.

7-20 Utilizando el algoritmo *DFS-ArbolGenerador* obtendríamos el árbol generador:



Con el algoritmo *BFS-ArbolGenerador* obtendríamos,



2.2. Árboles generadores minimales

Dado un grafo de interconexión entre nodos (ciudades, por ejemplo), cuyas aristas tienen asignadas un peso, que puede corresponder a una cierta medida del coste de la comunicación entre los dos nodos, podría ser necesario establecer un árbol generador minimal, es decir, establecer un subsistema de comunicaciones de tal modo que ningún nodo quede excluido y que globalmente represente un coste mínimo. Este tipo de problemas se pueden resolver con la ayuda de los árboles generadores minimales.

Definición 7.8

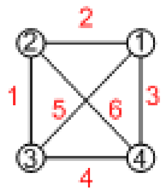
Dado un grafo ponderado (G, w) y un árbol generador T de G definimos el **peso del árbol** T como $w(T) = \sum_{e \in A(T)} w(e)$.

Un **árbol generador minimal** de G es un árbol generador T de G de peso $w(T)$ mínimo.

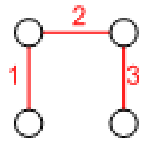
Si G no es conexo, entonces podemos hablar del **bosque generador minimal** de G como aquel que tiene peso mínimo entre todos los bosques generadores de G.

Ejemplo 7-21

El grafo ponderado



contiene dieciséis árboles generadores diferentes (véase el ejemplo 7-14, página 12). De todos éstos el árbol generador minimal es el árbol,



con un peso $w(T) = 6$.

Los algoritmos de Kruskal y de Prim son dos algoritmos clásicos de obtención de árboles generadores minimales que corresponden a una tipología bien conocida, la de los algoritmos "*greedy*" o "voraces". Estos algoritmos suelen tomar decisiones que en cada momento son localmente las mejores posibles; esto no significa, en general, que la solución obtenida sea globalmente la mejor. Curiosamente, esto es así en el caso de los algoritmos mencionados.

2.2.1. Algoritmo de Kruskal

Para construir el árbol generador minimal se empieza con un "árbol vacío"; durante todo el proceso un subgrafo se incrementa con nuevas aristas de la manera siguiente: en cada etapa del proceso se añade una arista que no forme ciclo con las escogidas previamente. Para garantizar la minimalidad, se elige, de entre las posibles, la arista de peso mínimo (no necesariamente adyacente a alguna arista previamente incorporada). El proceso acaba cuando se han incorporado $n - 1$ aristas.

El algoritmo de Kruskal...

...busca un árbol generador minimal y elige, en cada paso, la arista de menor peso que no forme ciclo con las ya escogidas.

Formulación del algoritmo de Kruskal

Entrada: un grafo ponderado conexo (G, w) de orden n.
Salida: un árbol generador minimal T de G.
Algoritmo:

inicio
  $k \leftarrow 1, T = (V, A'), A' = \emptyset$
  mientras $k \leq n - 1$
    Elegir la arista $a \in A$ de peso mínimo, no escogida anteriormente y de manera que el subgrafo $T = (V, A' \cup a)$ sea acíclico.

Añadir a a A'.
$k \leftarrow k + 1$
finmientras
retorno(T)
fin.

Implementación del algoritmo de Kruskal

Para implementar el algoritmo de Kruskal se necesita mantener una lista ordenada por el peso de las aristas del grafo y una estructura que permita comprobar, de manera eficiente, que no se forman ciclos.

Intuitivamente, el algoritmo mantiene un bosque. En un principio, existen $|V|$ árboles de un solo vértice. Cuando añadimos una arista se combinan dos árboles en uno. Cuando acaba el algoritmo sólo existe un árbol, el árbol generador minimal.

Estructuras necesarias para la implementación del algoritmo:

- Un grafo ponderado y conexo (G, w) representado mediante una lista de adyacencias.
- Una lista de aristas, E, ordenada según su peso.
- Una estructura denominada **unión-búsqueda** de conjuntos. En principio, cada vértice forma un conjunto (que sólo contiene este vértice). Cuando se analiza una arista $\{u, v\}$, se efectúa una **búsqueda** para localizar el conjunto de u y el de v. Si u y v están en el mismo conjunto, la arista no es aceptada porque u y v ya están conectados y, añadiendo la arista $\{u, v\}$, formaría un ciclo. De lo contrario, la arista es aceptada y se ejecuta la **unión** de los dos conjuntos que contienen u y v para formar un nuevo árbol.

  Así las dos operaciones que se deben realizar son:

– *búsqueda*(U, u), devuelve el representante del árbol que contiene u.
– *unión*(U, x, y), unión de los árboles que tienen como representantes x, y para formar un nuevo árbol.

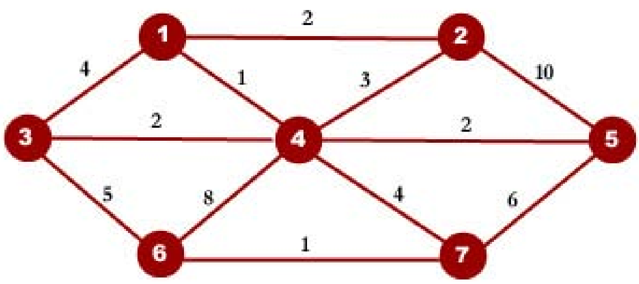
- Un árbol T que contendrá el árbol generador minimal.

Entrada : (G, w) conexo y ponderado de orden n
Salida : T el árbol generador minimal de G
algoritmo *Kruskal*(G)
  inicio
    $U =$ estructura unión-búsqueda
    $E =$ lista de aristas ordenadas por peso en orden ascendente
    $T \leftarrow (V, A'),\ A' \leftarrow \emptyset$
    $k \leftarrow 1$
    $i \leftarrow 1$
    mientras $(k < n)$
        Sea $\{u, v\}$ la arista $E[i]$
        $x \leftarrow$ *búsqueda*(U, u)
        $y \leftarrow$ *búsqueda*(U, v)
        si $(x \neq y)$
          entonces $A' \leftarrow A' \cup \{u, v\}$
            $k \leftarrow k + 1$
            unión(U, x, y)
        finsi
        $i \leftarrow i + 1$
    finmientras
    retorno (T)
  fin

Simulación del algoritmo de Kruskal

Ejemplo 7-22

Considerar el grafo definido por el gráfico siguiente:



Podemos utilizar el algoritmo de Kruskal para encontrar el árbol generador minimal. En este caso sólo hace falta hacer una lista de las aristas de menos peso a más peso (en caso de igualdad, se escriben primero las que están formadas por vértices de número menor).

Aristas	Pesos
$\{1,4\}$	1
$\{6,7\}$	1
$\{1,2\}$	2
$\{3,4\}$	2
$\{4,5\}$	2
$\{2,4\}$	3
$\{1,3\}$	4
$\{4,7\}$	4
$\{3,6\}$	5
$\{5,7\}$	6
$\{4,6\}$	8
$\{2,5\}$	10

Tenemos que elegir las 6 primeras aristas (porque hay 7 vértices) que no formen ningún ciclo. Las marcaremos con un asterisco; las aristas descartadas porque forman ciclo las marcaremos en negrilla.

Aristas	Pesos
$\{1,4\}*$	1
$\{6,7\}*$	1
$\{1,2\}*$	2
$\{3,4\}*$	2
$\{4,5\}*$	2
$\{\mathbf{2},\mathbf{4}\}$	
$\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}$	
$\{4,7\}*$	4
$\{3,6\}$	
$\{5,7\}$	
$\{4,6\}$	
$\{2,5\}$	

Por lo tanto, el árbol generador minimal estará formado por las aristas: $\{1,4\}$, $\{6,7\}$, $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{4,5\}$, $\{4,7\}$ con un peso total 12 .

Análisis del algoritmo de Kruskal

En el algoritmo de Kruskal podemos distinguir dos operaciones fundamentales:

1) Ordenación de la lista de aristas según su peso. Si denotamos por m la medida del grafo, entonces podemos ordenar una lista de m aristas con una complejidad $O(m \log m)$, utilizando algoritmos de clasificación como son el *quicksort* o el *heapsort*.

2) El bucle principal del algoritmo se ejecuta $n-1$ veces y, en cada iteración, hacemos dos operaciones de búsqueda y una de unión en la estructura unión-búsqueda. Estas dos operaciones (véanse los ejercicios de autoevaluación de este módulo) se pueden hacer utilizando un máximo de $\log m$ pasos. Puesto que se ejecuta $n-1$ veces, obtendremos una complejidad $O(n \log m)$.

Todo el algoritmo tendrá una complejidad $\max\{O(m \log m), O(n \log m)\}$. Puesto que, para un grafo conexo, $m \geq n-1$ podemos concluir que el algoritmo de Kruskal tiene una complejidad $O(m \log m)$.

2.2.2. Algoritmo de Prim

El algoritmo de Prim es similar al algoritmo de Kruskal, con la diferencia que en cada paso se elige una arista no incorporada previamente, y que sea adyacente a alguna de las ya incorporadas; además, no forme ciclo con las anteriores y, de entre las aristas disponibles que satisfacen estas condiciones, la que tiene peso mínimo; si hay más de una, se escoge la primera en la ordenación de aristas. De este modo, en todo momento se mantiene un subgrafo conexo y acíclico; el proceso se termina cuando se han incorporado $n-1$ aristas.

El algoritmo de Prim...

...busca un árbol generador minimal y elige, en cada paso, la arista de menor peso de las adyacentes a los vértices ya escogidos. De este modo el grafo construido siempre es conexo.

Formulación del algoritmo de Prim

Entrada: un grafo ponderado conexo (G, w) de orden n.
Salida: un árbol generador minimal T de G.
Algoritmo:

inicio
  $k \leftarrow 1$, $T = (V, A')$, $A' = \emptyset$
  mientras $k \leq n-1$
    Elegir la arista $a \in A$ de peso mínimo, no escogida anteriormente,
    adyacente a alguna arista de A' y
    tal que el subgrafo $T = (V, A' \cup a)$ sea acíclico.
    Añadir a a A'.
    $k \leftarrow k+1$
  finmientras
  retorno(T)
fi.

Implementación del algoritmo de Prim

El algoritmo de Prim construye el árbol generador haciendo crecer un solo árbol en pasos sucesivos. Empieza escogiendo cualquier vértice como vértice inicial. En cada paso añadimos la arista de peso mínimo que conecta un vértice del árbol con uno de fuera.

La implementación del algoritmo de Prim es esencialmente idéntica a la del algoritmo de Dijkstra para encontrar la distancia entre dos vértices. Sólo se debe modificar la regla de actualización.

Estructuras necesarias para la implementación del algoritmo:

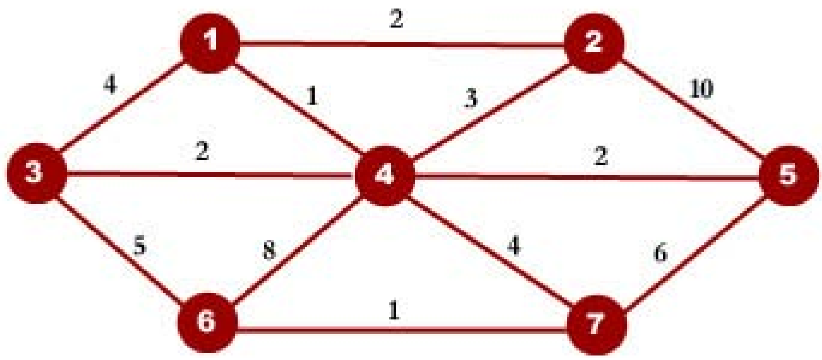
- Un grafo ponderado (G, w) representado mediante una lista de adyacencias.
- Un conjunto U de los vértices que se han visitado, en el orden en que se ha hecho.
- Una tabla de pesos, $E(\cdot)$, indexada por los vértices de G, que registra el peso de la arista de peso mínimo que conecta un vértice v con un vértice ya visitado.
- Al final, la tabla $E(\cdot)$ registra los pesos de las aristas que forman parte del árbol generador minimal.

En cada paso se fija la etiqueta de uno de los vértices del grafo. Así, tras n pasos habremos calculado el árbol generador minimal.

```
Entrada : (G, w) de orden n
Salida : T, el árbol generador minimal de G
algoritmo Prim(G)
  inicio
    Seleccionamos un vértice inicial u0 ∈ V
    U ← ∅
    para v ∈ V\{u0}
        E(v) ← ∞
        Etiquetamos v con (E(v), u0)
    finpara
    E(u0) ← 0
     Etiquetamos u0 con (0, u0)
    T ← (V, A'), A' ← ∅
    para i ← 1 hasta n
        ui vértice que alcanza el min{E(v) | v ∈ V − U}
        U ← U ∪ {ui}
        A' ← A' ∪ {x, ui} /*donde (E(ui), x) es la etiqueta de ui*/
        para v ∈ V − U adyacente a ui
            si w(ui, v) < E(v)
              entonces E(v) ← w(ui, v)
                       Etiquetamos v con (E(v), ui)
            finsi
        finpara
    finpara
    retorno (T)
  fin
```

Simulación del algoritmo de Prim

Consideremos el grafo definido por el gráfico siguiente:



Si se elige como vértice inicial el vértice 1, la tabla siguiente representa el estado inicial del algoritmo:

Vértices	1	2	3	4	5	6	7
U	0	0	0	0	0	0	0
$(E(\cdot),\cdot)$	$(0,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$

En esta tabla, se ha representado el conjunto U y las etiquetas de los vértices. Todos los vértices, excepto el vértice 1, están etiquetados como $(\infty, 1)$ que indican que el peso mínimo inicial es ∞ (significa que, en el estado inicial, el vértice no se alcanza).

Los diferentes pasos del algoritmo serán:

$i = 1$

Vértices	1	2	3	4	5	6	7
U	**1**	0	0	0	0	0	0
$(E(\cdot),\cdot)$	$(0,1)$	$(\mathbf{2},\mathbf{1})$	$(\mathbf{4},\mathbf{1})$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$

$i = 2$

Vértices	1	2	3	4	5	6	7
U	1	0	0	**1**	0	0	0
$(E(\cdot),\cdot)$	$(0,1)$	$(2,1)$	$(\mathbf{2},\mathbf{4})$	$(1,1)$	$(\mathbf{2},\mathbf{4})$	$(\mathbf{8},\mathbf{4})$	$(\mathbf{4},\mathbf{4})$

$i = 3$

Vértices	1	2	3	4	5	6	7
U	1	**1**	0	1	0	0	0
$(E(\cdot), \cdot)$	$(0, 1)$	$(2, 1)$	$(2, 4)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(8, 4)$	$(4, 4)$

$i = 4$

Vértices	1	2	3	4	5	6	7
U	1	1	**1**	1	0	0	0
$(E(\cdot), \cdot)$	$(0, 1)$	$(2, 1)$	$(2, 4)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(\mathbf{5}, \mathbf{3})$	$(4, 4)$

$i = 5$

Vértices	1	2	3	4	5	6	7
U	1	1	1	1	**1**	0	0
$(E(\cdot), \cdot)$	$(0, 1)$	$(2, 1)$	$(2, 4)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(5, 3)$	$(4, 4)$

$i = 6$

Vértices	1	2	3	4	5	6	7
U	1	1	1	1	1	0	**1**
$(E(\cdot), \cdot)$	$(0, 1)$	$(2, 1)$	$(2, 4)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{7})$	$(4, 4)$

$i = 7$

Vértices	1	2	3	4	5	6	7
U	1	1	1	1	1	**1**	1
$(E(\cdot), \cdot)$	$(0, 1)$	$(2, 1)$	$(2, 4)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(1, 7)$	$(4, 4)$

De esta última tabla se deduce que el árbol generador minimal estará formado por las aristas $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{6, 7\}$ y $\{4, 7\}$ con un peso mínimo total 12.

Se puede construir la **tabla del algoritmo de Prim** a partir de las filas $(E(\cdot), \circ)$ de cada uno de los pasos (se indica con un asterisco el vértice que se visita):

1	2	3	4	5	6	7
(0,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)
(0,1)*	(2,1)	(4,1)	(1,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)
(0,1)	(2,1)	(2,4)	(1,1)*	(2,4)	(8,4)	(4,4)
(0,1)	(2,1)*	(2,4)	(1,1)	(2,4)	(8,4)	(4,4)
(0,1)	(2,1)	(2,4)*	(1,1)	(2,4)	(5,3)	(4,4)
(0,1)	(2,1)	(2,4)	(1,1)	(2,4)*	(5,3)	(4,4)
(0,1)	(2,1)	(2,4)	(1,1)	(2,4)	(1,7)	(4,4)*
(0,1)	(2,1)	(2,4)	(1,1)	(2,4)	(1,7)*	(4,4)

Análisis del algoritmo de Prim

El algoritmo de Prim tiene la misma estructura que el algoritmo de Dijkstra y, por lo tanto, tendrá la misma complejidad: $O(n^2)$, independientemente del número de aristas del grafo.

2.2.3. Ejercicios

7-23 Si G es un grafo conexo no ponderado de orden n, ¿cuál es el peso del árbol generador minimal de G?

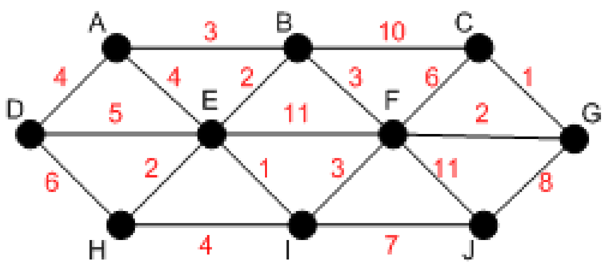
7-24 Si G es un grafo no ponderado de orden n, ¿cuál es el peso del bosque generador minimal de G?

7-25 ¿Pueden utilizarse el algoritmo de Kruskal o el de Prim en un grafo conexo no necesariamente ponderado para obtener un árbol generador?

7-26 Los grafos intermedios que se construyen en el algoritmo de Kruskal, ¿son árboles?

7-27 Considerar la afirmación: "el algoritmo de Kruskal permite obtener el árbol generador minimal de un grafo conexo ponderado". ¿Es exacta?

7-28 Encontrar el árbol generador minimal del grafo:



utilizando el algoritmo de Kruskal y el algoritmo de Prim. ¿Cuál es el peso mínimo del árbol? ¿Es único el árbol generador minimal? Justificar la respuesta.

7-29 Si en en el algoritmo de Prim modificamos la condición:

$$w(u_i, v) \leq E(v)$$

¿Como repercutirá en el funcionamiento del algoritmo? ¿Se obtendrá el mismo árbol generador minimal?

2.2.4. Soluciones

7-23 $n-1$

7-24 Si G contiene k ($k \geq 1$) componentes conexas entonces el bosque generador minimal tendrá peso $n-k$.

7-25 Sí, asignando pesos unidad a todas las aristas.

7-26 No necesariamente.

7-27 No, puede haber más de uno.

7-28 En el algoritmo de Kruskal ordenamos todas las aristas según su peso (en caso de igualdad, consideraremos el orden de la lista de adyacencias):

Aristas	{C,G}	{E,Y}	{B,E}	{E,H}	{F,G}	{A,B}	{B,F}	{F,Y}	{A,D}
Peso	1	1	2	2	2	3	3	3	4

Aristas	{A,E}	{H,I}	{D,E}	{C,F}	{D,H}	{I,J}	{G,J}	{B,C}	{E,F}	{F,J}
Peso	4	4	5	6	6	7	8	10	11	11

Ahora elegimos las $10 - 1 = 9$ aristas de peso mínimo que no forman ciclo. Se indica con un asterisco las aristas elegidas y en negrilla las rechazadas.

Aristas	{C,G}*	{E,Y}*	{B,E}*	{E,H}*	{F,G}*	{A,B}*	{B,F}*	{**F,Y**}	{A,D}*
Peso	1	1	2	2	2	3	3	3	4

Aristas	{**A,E**}	{**H,Y**}	{**D,E**}	{**C,F**}	{**D,H**}	{I,J}*	{G,J}	{B,C}	{E,F}	{F,J}
Peso	4	4	5	6	6	7	8	10	11	11

El árbol generador minimal obtenido tiene un peso total 25.

Ahora repetiremos el problema utilizando el algoritmo de Prim. La tabla siguiente resume la construcción del árbol empezando por el vértice A:

A	B	C	D	E	F	G	H	Y	J
(0,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)*	(3,A)	(∞,A)	(4,A)	(4,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)	(3,A)*	(10,B)	(4,A)	(2,B)	(3,B)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)	(3,A)	(10,B)	(4,A)	(2,B)*	(3,B)	(∞,A)	(2,E)	(1,E)	(∞,A)
(0,A)	(3,A)	(10,B)	(4,A)	(2,B)	(3,B)	(∞,A)	(2,E)	(1,E)*	(7,I)
(0,A)	(3,A)	(10,B)	(4,A)	(2,B)	(3,B)	(∞,A)	(2,E)*	(1,E)	(7,I)
(0,A)	(3,A)	(6,F)	(4,A)	(2,B)	(3,B)*	(2,F)	(2,E)	(1,E)	(7,I)
(0,A)	(3,A)	(1,G)	(4,A)	(2,B)	(3,B)	(2,F)*	(2,E)	(1,E)	(7,I)
(0,A)	(3,A)	(1,G)*	(4,A)	(2,B)	(3,B)	(2,F)	(2,E)	(1,E)	(7,I)
(0,A)	(3,A)	(1,G)	(4,A)*	(2,B)	(3,B)	(2,F)	(2,E)	(1,E)	(7,I)
(0,A)	(3,A)	(1,G)	(4,A)	(2,B)	(3,B)	(2,F)	(2,E)	(1,E)	(7,I)*

Obsérvese que el árbol coincide con el que se ha obtenido con el algoritmo de Kruskal.

Aunque en el algoritmo de Prim siempre hemos elegido la única opción posible, el árbol generador minimal no es único. De hecho, podríamos sustituir la arista {B,F} con peso 3 por la arista {F,I}, con el mismo peso, y obtendríamos un árbol generador minimal diferente. Obsérvese que en el algoritmo de Kruskal sí que hubiéramos podido elegir la arista {F,I} antes que la {B,F} si hubiéramos escogido otro criterio de ordenación de las aristas con el mismo peso.

7-29 El algoritmo continúa funcionando correctamente y obtenemos un árbol generador minimal aunque puede ser diferente del que se había obtenido en la versión original. De hecho, de entre las aristas del mismo peso, se escogerá la que se examina más tarde.

3. Árboles con raíz

Los grafos dirigidos asimétricos permiten caracterizar los árboles con raíz. Algunos aspectos de estos árboles son muy interesantes para evaluar la complejidad de ciertos algoritmos, especialmente los de ordenación.

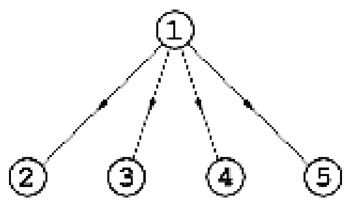
3.1. Caracterización de los árboles con raíz

Definición 7.9

Dado un arco (u, v) de un digrafo $G = (V, A)$ se dice que u es **padre** del vértice v. Éste es **hijo** del vértice u.

Ejemplo 7-30

En el digrafo adjunto, el vértice 1 es padre de los vértices 2, 3, 4 y 5; y éstos son hijos del vértice 1.



Definición 7.10

Un digrafo $G = (V, A)$ es **asimétrico** si no tiene ciclos de longitud 2. Es decir, si $(u, v) \in A$ entonces $(v, u) \notin A$.

Un vértice r de un digrafo $G = (V, A)$ es una **raíz** si existe un $r - v$ camino (dirigido) para todo vértice v del digrafo.

Definición 7.11

Un digrafo $T = (V, A)$ es un **árbol con raíz** r si:

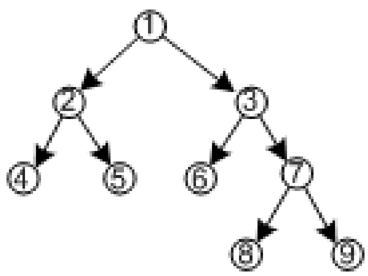
1) T es un digrafo asimétrico.

2) El grafo subyacente es un árbol.

3) Para todo vértice $v \in V$ existe un $r - v$ camino.

Ejemplo 7-31

El grafo siguiente es un árbol con raíz:

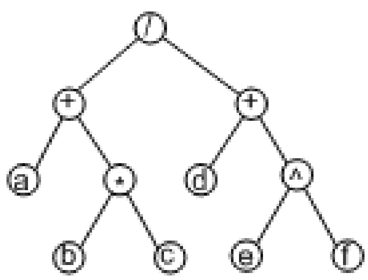


La raíz es el vértice etiquetado 1. Los arcos son $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(3, 7)$, $(7, 8)$ y $(7, 9)$.

Los árboles con raíz siempre se representan en forma "jerárquica" colocando la raíz en lo alto. Esto supone que a menudo sea innecesario indicar la orientación de los arcos que se sobrentiende en "sentido descendente".

Ejemplo 7-32

Una aplicación importante de los árboles con raíz es la representación de expresiones aritméticas como por ejemplo $(a + b * c)/(d + e\hat{}f)$. Si una expresión simple como $\alpha \circ \beta$ se guarda como un árbol con raíz $\circ$ y hijos α y β, entonces la expresión anterior, de acuerdo con la precedencia de los operadores $+, *, /, \hat{}$ se representará como:



Esta representación es especialmente útil en el proceso de compilación de programas, puesto que permite evaluar eficientemente cualquier expresión aritmética.

Teorema 7.12

Sea $T = (V, A)$ un digrafo asimétrico. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1) T es un árbol con raíz.

2) T tiene una raíz r con $g^-(r) = 0$ y $g^-(v) = 1$ para todo vértice v diferente de la raíz.

3) El grafo subyacente $\overline{T}$ es conexo y existe un vértice r tal que $g^-(r) = 0$ y $g^-(v) = 1$ para todo vértice v diferente de r.

Demostración: **1)** $\Rightarrow$ **2)**: Si $g^-(r) \neq 0$ entonces habría un vértice $v \neq r$ y un arco (v, r). Puesto que también existe un $r - v$ camino entonces tendríamos un ciclo dirigido en T contra la hipótesis de que T es asimétrico y el grafo subyacente es un árbol. De manera parecida se prueba que $g^-(v) = 1$.

2) $\Rightarrow$ **3)**: Sólo se necesita comprobar que el grafo subyacente es conexo. Si T tiene una raíz r entonces existe un $r - v$ camino dirigido para todo vértice v de T. Por lo tanto, el grafo subyacente será conexo.

3) $\Rightarrow$ **1)**: Claro está que T tiene que ser asimétrico. Puesto que $\overline{T}$ es conexo existe un camino (en $\overline{T}$) entre r y v. Si este camino no fuera un $r - v$ camino dirigido entonces habría un vértice del camino con $g^-(v) > 1$. ∎

3.1.1. Ejercicios

7-33 ¿Un árbol con raíz puede tener más de una raíz?

7-34 En un árbol con raíz, ¿el camino que une la raíz con cada vértice es único?

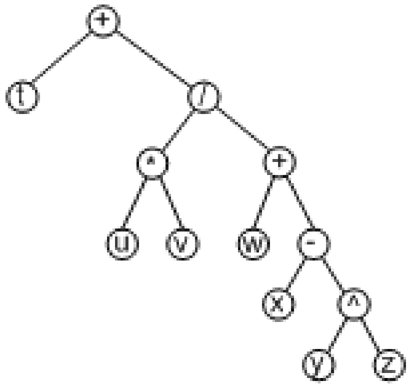
7-35 Dibujar el árbol con raíz de la expresión aritmética: $t + u * v/(w + x - y\hat{}z)$.

3.1.2. Soluciones

7-33 No; si hubiera dos raíces r, r', entonces habría un camino orientado $r - r'$ y sería $g^-(r') = 1$, que es absurdo.

7-34 Sí. Si hubiera más de uno, entonces el grafo subyacente contendría un ciclo.

7-35 En este caso y de acuerdo con la precedencia de los operadores la raíz es el signo $+$. El árbol resultante será:



3.2. Árboles m-arios

En esta sección se supone que $T = (V, A)$ es un árbol con raíz r. Demos primero algunas definiciones terminológicas.

Definición 7.13

Una **hoja** es un vértice que no tiene hijos, es decir, con grado de salida 0; también se denomina **vértice terminal**. Los otros vértices se denominan **internos** (o **no terminales**).

Definición 7.14

El **nivel** de un vértice v de T es la longitud del único $r - v$ camino.

Definición 7.15

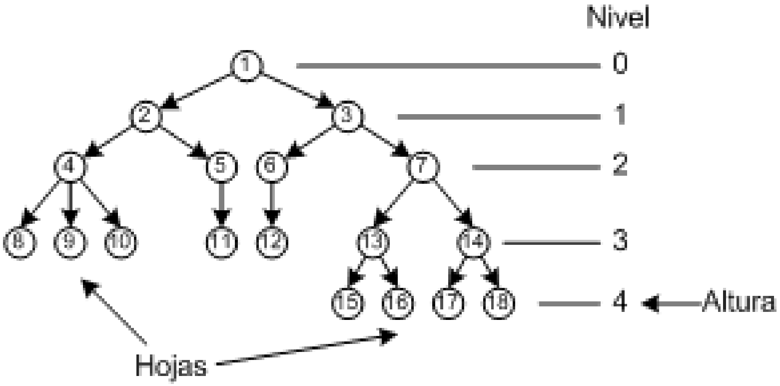
La **altura** (o **profundidad**) del árbol T es el máximo de los niveles:

$$h(T) = \max\{\text{nivel}(v) \mid v \in V\}$$

Si el nivel de cada hoja de T es igual a $h(T)$ o a $h(T) - 1$ diremos que T es un **árbol equilibrado**.

Ejemplo 7-36

En el árbol



los vértices 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18 son hojas. El resto son nodos internos.

Cada vértice está en un nivel.

Vértices de nivel 0: 1
Vértices de nivel 1: $2, 3$
Vértices de nivel 2: $4, 5, 6, 7$
Vértices de nivel 3: $8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$
Vértices de nivel 4: $15, 16, 17, 18$.

Por lo tanto, la altura del árbol (el máximo de los niveles) es 4. Además, es un árbol equilibrado porque todas las hojas están en los dos últimos niveles.

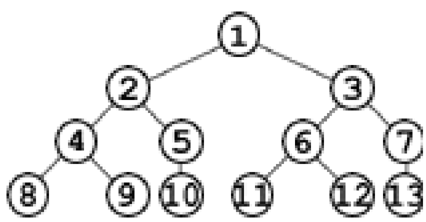
Definición 7.16

Un árbol con raíz $T = (V, A)$ es m-**ario** ($m \geq 2$) si $0 \leq g^{+}(v) \leq m$, $\forall\, v \in V$. En particular, si $m = 2$ diremos que tenemos un **árbol binario**.

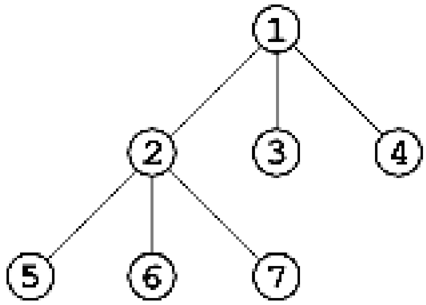
Un árbol m-ario $T = (V, A)$ es **completo** si $\forall\, v \in V$, $g^{+}(v) = m$ o $g^{+}(v) = 0$. Es decir, los vértices internos tienen grado de salida m y las hojas tienen grado de salida 0.

Ejemplo 7-37

Este árbol con raíz es un árbol binario (cada vértice tiene dos hijos como máximo) no completo (por ejemplo, el vértice etiquetado con un 5 es un vértice interno que no tiene dos hijos):



En cambio, el árbol de la figura siguiente es un árbol 3-ario o ternario y completo:



Obsérvese que los árboles con raíz de una expresión aritmética (véase el ejemplo 7-32, página 30) con operadores binarios son siempre árboles binarios completos.

Existen relaciones importantes que se utilizan en varias situaciones en el análisis de algoritmos.

Proposición 7.17

Sea $T = (V, A)$ un árbol m-ario,

1) Si T es completo, contiene t hojas e i vértices internos, entonces $t = (m-1)i + 1$.

2) Si T tiene altura h y contiene t hojas entonces $t \leq m^h$. Es decir, hay un máximo de m^h hojas en un árbol m-ario de altura h.

3) Si $m \geq 2$, de altura h y con t hojas, entonces $h \geq \lceil \log_m t \rceil$ (donde $\lceil x \rceil$ es la parte entera de x más 1). Suponiendo que T sea completo y equilibrado entonces $h = \lceil \log_m t \rceil$.

Demostración: Si denotamos por n el orden de T entonces el primer resultado es consecuencia de la igualdad $t + i = n = mi + 1$.

El segundo resultado es consecuencia del hecho de que el número de vértices de nivel k ($0 \leq k \leq h$) es menor o igual que m^k.

Finalmente, si T es completo y equilibrado entonces el nivel $h-1$ tiene m^{h-1} vértices, de los cuales no todos son hojas. Por lo tanto, $m^{h-1} < t$. Por otro lado, ya sabemos que $t \leq m^h$. De las dos desigualdades obtenemos

$$m^{h-1} < t \leq m^h$$

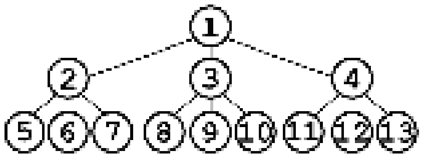
que es equivalente a

$$h - 1 < \log_m t \leq h$$

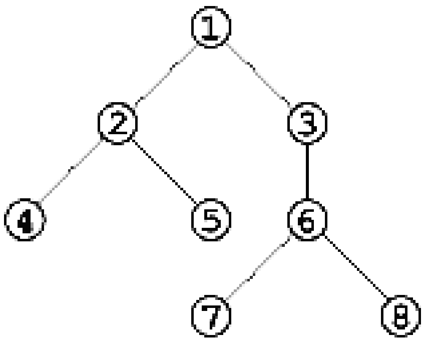
Por la definición de la función $\lceil x \rceil$ obtenemos la igualdad $h = \lceil \log_m t \rceil$. Si no fuera completo, o bien, no fuera equilibrado, es evidente que $h \geq \lceil \log_m t \rceil$. ∎

3.2.1. Ejercicios

7-38 Considerar el siguiente árbol con raíz; indicar cuál es su altura y si es o no equilibrado.



7-39 Considerar el siguiente árbol con raíz. Indicar cuáles son las hojas, los niveles de los vértices y la altura del árbol:



7-40 ¿Cuál es la altura mínima de un árbol 4-ario con 127 hojas?

7-41 En un campeonato de tenis individual participan veintisiete jugadores que compiten en la modalidad de eliminatorias. ¿Cuál es el número de partidos que se deben jugar para determinar el campeón?

3.2.2. Soluciones

7-38 Es un árbol ternario de altura 2 y equilibrado.

7-39 Hojas: 4, 5, 7, 8.

Niveles de los vértices:

Vértices de nivel 0: 1
Vértices de nivel 1: 2, 3
Vértices de nivel 2: 4, 5, 6
Vértices de nivel 3: 7, 8

Por lo tanto, la altura será 3.

7-40 El número de hojas t de un árbol m-ario, de altura h cumple la condición $t \leq m^h$. Si sustituimos, $127 \leq 4^h$, de donde $h \geq \lceil \log_4 127 \rceil = 4$.

7-41 Los veintisiete jugadores se pueden representar como las hojas de un árbol binario. La raíz del árbol será la final. El número de vértices internos es el número de partidos que deben jugarse. Así, se necesitará organizar un total de $i = (t-1)/(m-1) = 26/1 = 26$ partidos.

3.3. Exploración de los árboles con raíz

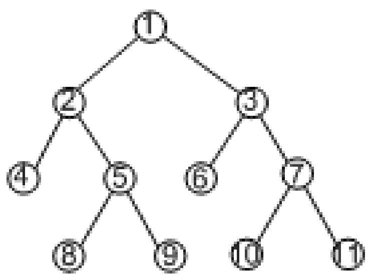
Si consideramos una relación de orden entre los hijos de cada vértice interno de un árbol con raíz, entonces nos podemos plantear el problema de explorar de manera exhaustiva todos sus vértices.

En el caso concreto de los árboles binarios, hay tres formas básicas de explorar todos sus vértices: los denominados recorrido en *preorden*, recorrido en *inorden* y recorrido en *postorden*. Los tres recorridos se distinguen básicamente en la forma como se exploran los dos hijos de cada vértice. Antes de estudiarlos se tiene que introducir la notación siguiente: T es el árbol binario de raíz r, T_1 y T_2 son los subárboles de raíces v_1 y v_2 inducidos por los hijos de la raíz r.

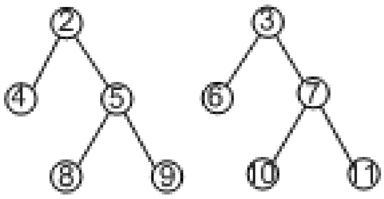
- Recorrido en preorden de T:
  1) Explorar la raíz r.
  2) Explorar el subárbol T_1 en preorden.
  3) Explorar el subárbol T_2 en preorden.
- Recorrido en inorden de T:
  1) Explorar el subárbol T_1 en inorden.
  2) Explorar la raíz r.
  3) Explorar el subárbol T_2 en inorden.
- Recorrido en postorden de T:
  1) Explorar el subárbol T_1 en postorden.
  2) Explorar el subárbol T_2 en postorden.
  3) Explorar la raíz r.

Ejemplo 7-42

El árbol de la figura:



es un árbol binario. La raíz es el vértice etiquetado con un 1. La raíz tiene dos hijos, etiquetados 2 y 3, que son raíces de dos subárboles:



De manera recursiva también podríamos considerar los subárboles de raíz 4, 5, 6,...

Los diferentes recorridos de este árbol son:

Preorden: $1, 2, 4, 5, 8, 9, 3, 6, 7, 10, 11$;

Inorden: $4, 2, 8, 5, 9, 1, 6, 3, 10, 7, 11$;

Postorden: $4, 8, 9, 5, 2, 6, 10, 11, 7, 3, 1$.

3.3.1. Ejercicios

7-43 La lista siguiente es la lista de adyacencias de un árbol binario. El símbolo "–" representa la ausencia de hijo. Encontrar los recorridos en preorden, inorden y postorden del árbol:

A	:	B, F
B	:	–, C
C	:	D, G
D	:	–, E
E	:	–, –
F	:	–, –
G	:	–, –

La primera posición de la lista representa el hijo situado a la izquierda de la raíz, y la segunda posición el hijo situado a la derecha.

7-44 Encontrar los recorridos en preorden, inorden y postorden del árbol de la expresión aritmética $(a + b * c)/(d + e\hat{}f)$.

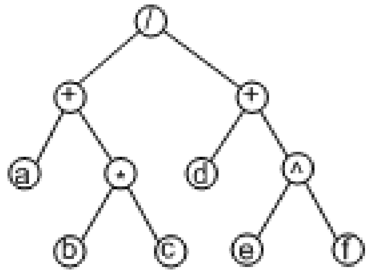
7-45 Construir un árbol binario T cuyo recorrido en preorden es $a, b, d, e, c, f, h, y, g, j, k$ y el recorrido en postorden es $d, e, b, h, y, f, j, k, g, c, a$,

3.3.2. Soluciones

7-43 Los tres recorridos son:

Preorden: A, B, C, D, E, G, F
Inorden: B, D, E, C, G, A, F
Postorden: E, D, G, C, B, F, A

7-44 El árbol de la expresión es



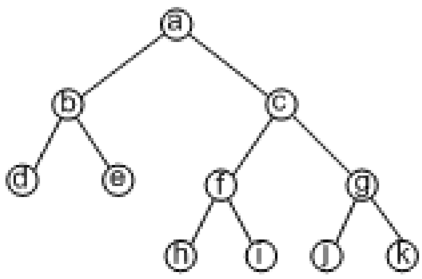
y los tres recorridos son:

Preorden: $/ \; + \; a \; * \; b \, c \; + \; d \, \hat{} \, e \, f$
Inorden: $a \; + \; b \; * \; c \, / \, d \; + \; e \, \hat{} \, f$
Postorden: $a \, b \, c \; * \; + d \, e \, f \, \hat{} \; + \; /$

Para las expresiones aritméticas el recorrido en preorden da lugar a un tipo de representación de la expresión denominado *notación prefija* (o *notación polaca*, introducida por el lógico Jan Lukasiewicz). El recorrido en inorden da lugar a la *notación infija* (que coincide con la convencional sin paréntesis). Finalmente, el recorrido en postorden da lugar a la *notación postfija* (o también *polaca inversa*).

Las notaciones prefija y postfija son especialmente adecuadas para evaluar expresiones aritméticas. Los compiladores son los encargados de transformar las expresiones convencionales a la notación prefija o postfija, según los casos. También se encargan de evaluar de manera eficiente las expresiones a partir de estas representaciones con la ayuda de una pila.

7-45 El árbol que se pide es el siguiente:



Ejercicios de autoevaluación

7-46 Sea $T = (V, A)$ un árbol de orden n con sólo vértices de grado 1 y de grado 3. Expresar, en función del orden n del árbol, el número de hojas y de vértices de grado 3.

7-47 Probar que un grafo acíclico $G = (V, A)$ con el grado de todos los vértices par es el grafo nulo.

7-48 ¿Cuántos árboles generadores, con independencia de isomorfismos, tienen los grafos K_2, K_3 y K_4? Intentar encontrar una fórmula que permita calcular el número de árboles generadores del grafo completo de orden n, K_n.

7-49 Indicar cómo se puede buscar un bosque generador de un grafo no conexo a partir de los algoritmos *BFS* y *DFS*.

7-50 El nuevo gobierno del archipiélago de Sealand ha decidido unir sus seis islas mediante puentes que permitan conectarlas directamente. El coste de construcción de un puente depende de la distancia entre las islas. Esta tabla recoge las distancias entre islas:

	A	B	C	D	E	F
A	–	5	6	4	3	7
B	–	–	2	4	8	5
C	–	–	–	4	8	8
D	–	–	–	–	2	5
E	–	–	–	–	–	4
F	–	–	–	–	–	–

El gobierno quiere construir un sistema de puentes de manera que el coste total de la obra sea mínimo.

1) Utilizando la teoría de grafos, encontrar los puentes que se deben construir de manera que el coste total de la obra sea mínimo.

2) Supongamos que la capital está en la isla B y que sólo se puede construir un puente entre dos islas si previamente alguna de éstas ya se comunica con la capital (la maquinaria se tiene que transportar a través de los puentes). ¿En qué orden se deberían construir los puentes?

3) Justificar por qué no es aconsejable utilizar el algoritmo de Kruskal para resolver este segundo problema.

7-51 Para implementar el algoritmo de Kruskal se debe comprobar que, cuando se añade una arista, no forma ciclo. Una manera eficiente de comprobar que no forman ciclo es mediante una estructura denominada *conjuntos disjuntos*. Esta estructura se puede representar mediante una tabla U indexada por los vértices del grafo e iniciada a -1. Inicialmente todos los vértices son conjuntos disjuntos. Sobre esta tabla se hacen dos operaciones:

- *Unión*: se combinan dos conjuntos (dos árboles) si tienen una arista en común.
- *Búsqueda*: devuelve un representante (la raíz del árbol) del conjunto que contiene un vértice del grafo.

Estas dos operaciones se pueden implementar de la siguiente manera:

función *unión*(U, v_1, v_2)
inicio
si $(U[v_1] < U[v_2])$
entonces $U[v_2] \leftarrow v_1$
sino
si $(U[v_1] = U[v_2])$
entonces $U[v_1] \leftarrow U[v_2] - 1$
finsi
$U[v_2] \leftarrow v_1$
finsi
fin

función *búsqueda*(U, v)
inicio
si $(U[v] < 0)$
entonces **retorno** (v)
sino
$U[v] \leftarrow$ *búsqueda*$(U, U[v])$
retorno $(U[v])$
finsi
fin

Utilizando el grafo del ejemplo 7-22, página 20, mostrar el contenido de la tabla *U* durante la aplicación del algoritmo de Kruskal a este grafo. Notemos que la tabla inicial será:

1	2	3	4	5	6	7
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

7-52 Sea (G, w) un grafo ponderado, describir un algoritmo para encontrar un árbol generador maximal. Es decir, un árbol generador T de G tal que su peso $w(T)$ sea máximo. Estudiar la eficiencia del algoritmo propuesto.

7-53 Los algoritmos de Kruskal y de Prim permiten obtener el árbol generador minimal de un grafo conexo y ponderado. Comparar, según la eficiencia de cada algoritmo, cuál de los dos es más adecuado para encontrar el árbol generador minimal de un grafo.

7-54 ¿Cuántos vértices tiene un árbol 5-ario completo con doscientos vértices internos?

7-55 Sea $T = (V, A)$ un árbol binario completo de orden $n = |V| \geq 3$. Probar que el árbol subyacente tiene $\frac{n+1}{2}$ hojas (vértices de grado 1).

7-56 Tómense 8 monedas idénticas de las cuales se sabe que una es falsa (pesa más que las otras). Si sólo se dispone de una balanza, ¿cuál es el número mínimo de pesadas que se deben hacer para poder asegurar que se descubre la moneda falsa?

7-57 La secuencia $* \ a \ + \ b \ * \ c \ + \ d \ e$ es un recorrido del árbol de una expresión aritmética. Encontrar la expresión original.

Soluciones

7-46 Denotemos por x_1 el número de hojas y por x_3 el número de vértices de grado 3. Por un lado, tenemos que $n = x_1 + x_3$; por otro lado, en todo árbol $|A| = n - 1$ y, aplicando la fórmula de los grados, podemos escribir:

$$x_1 + 3x_3 = 2|A| = 2(n-1) = 2(x_1 + x_3 - 1)$$

y obtener así la relación $x_3 = x_1 - 2$, a partir de la cual resulta:

$$n = x_1 + x_3 = x_1 + (x_1 - 2) = 2x_1 - 2,$$

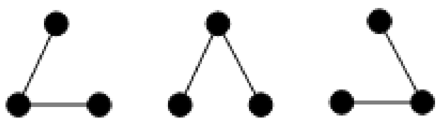
de donde $x_1 = \frac{n+2}{2}$ y finalmente $x_3 = \frac{n-2}{2}$.

7-47 Sea n el orden del grafo G.

Si el grafo es conexo, entonces, por la aciclicidad, es un árbol y es bien conocido que todo árbol con un mínimo de dos vértices tiene un mínimo de dos hojas o vértices de grado 1, lo cual, en este caso, es imposible por la hipótesis; por lo tanto, $n < 2$ y, en consecuencia, es $G = N_1$.

Si el grafo no es conexo, entonces el grafo es unión de componentes conexas $G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$, y cada una de estas componentes conexas es un grafo conexo acíclico con todos los grados de orden par; podemos aplicar a cada componente el resultado anterior y de este modo cada componente es isomorfa al grafo nulo N_1. Finalmente, $G = N_1 \cup \ldots \cup N_1 = N_k$.

7-48 K_2 es el grafo trayecto T_2 y, por lo tanto, tiene un solo árbol generador. K_3 tiene tres árboles generadores tal y como muestra el siguiente gráfico:



K_4 tiene dieciséis árboles generadores tal y como se puede ver en el ejemplo 7-14, página 12.

En general, para el grafo K_n existen n^{n-2} árboles generadores diferentes.

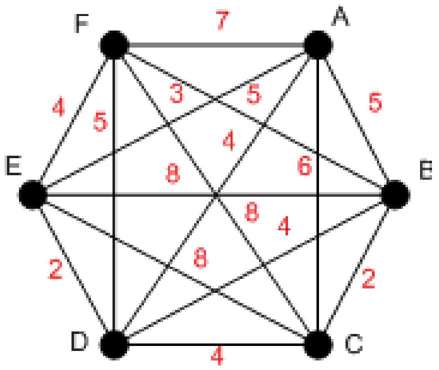
7-49 Si G no es conexo, entonces es unión de componentes conexas $G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$. Para construir un bosque generador será suficiente buscar un árbol generador T_i para cada componente conexa G_i y considerar el bosque $T_1 \cup \ldots \cup T_k$.

El algoritmo siguiente utiliza el algoritmo *BFS-ArbolGenerador* aunque también se podría utilizar el algoritmo *DFS-ArbolGenerador*.

Entrada : $G = (V, A)$ de orden n
Salida : T bosque generador de G
algoritmo *BFS-BosqueGenerador*(G)
  inicio
    $T \leftarrow \emptyset$
    $U \leftarrow V$
    mientras $U \neq \emptyset$
        $v \leftarrow$ cualquier vértice de U
        $R \leftarrow$ *BFS-ArbolGenerador*(G, v)
        $T \leftarrow T \cup R$
        $U \leftarrow U - V(R)$
    finmientras
    retorno (T)
  fin

Obsérvese que la complejidad es la del *BFS*, $O(n + m)$, puesto que exploramos todos los vértices y las aristas de G.

7-50 El gráfico siguiente muestra la forma del grafo:



1) El problema nos pide buscar el árbol generador minimal de este grafo. Podemos utilizar indistintamente el algoritmo de Kruskal o el de Prim.

Sí utilizamos el algoritmo de Kruskal, se necesitará ordenar todas las aristas según su coste:

Aristas	{B,C}	{D,E}	{A,E}	{A,D}	{B,D}	{C,D}	{E,F}	{A,B}	{B,F}
Coste	2	2	3	4	4	4	4	5	5

Aristas	{D,F}	{A,C}	{A,F}	{B,E}	{C,E}	{C,F}
Coste	5	6	7	8	8	8

Acto seguido, se tiene que elegir cinco aristas de coste mínimo y que no formen ciclo. Estas son: {B,C}, {D,E}, {A,E}, {B,D}, {E,F} con un coste mínimo total 15.

Utilizando el algoritmo de Prim con vértice inicial B:

A	B	C	D	E	F
(∞,B)	(0,B)*	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)
(5,B)	(0,B)	(2,B)*	(4,B)	(8,B)	(5,B)
(5,B)	(0,B)	(2,B)	(4,B)*	(8,B)	(5,B)
(4,D)	(0,B)	(2,B)	(4,B)	(2,D)*	(5,B)
(3,E)*	(0,B)	(2,B)	(4,B)	(2,D)	(4,E)
(3,E)	(0,B)	(2,B)	(4,B)	(2,D)	(4,E)*

De la tabla se deduce que deben construirse los puentes: {A,E}, {B,C}, {B,D}, {D,E}, {F,E} con un coste total 15.

2) En este caso, la solución válida se obtiene con el algoritmo de Prim, puesto que en cada paso fija un vértice y una arista. Los asteriscos indican los vértices fijados. La solución sería: {B,C}, {B,D}, {D,E}, {A,E}, {F,E}.

3) De acuerdo con el enunciado tenemos que construir el árbol generador minimal de manera que siempre sea conexo. El algoritmo de Kruskal, a diferencia del de Prim, no garantiza que el grafo que se va generando sea conexo.

7-51 En el ejemplo 7-22, página 20, hemos elegido las aristas marcadas con un asterisco y rechazado las marcadas en negrilla:

Aristas	Pesos
$\{1,4\}*$	1
$\{6,7\}*$	1
$\{1,2\}*$	2
$\{3,4\}*$	2
$\{4,5\}*$	2
$\{\mathbf{2},\mathbf{4}\}$	
$\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}$	
$\{4,7\}*$	4
$\{3,6\}$	
$\{5,7\}$	
$\{4,6\}$	
$\{2,5\}$	

La tabla siguiente muestra las llamadas sucesivas a las funciones *unión* y *búsqueda* y el contenido de la tabla U:

Inicialmente

1	2	3	4	5	6	7
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

búsqueda$(U,1) \to 1$; *búsqueda*$(U,4) \to 4$;

unión$(U,1,4)$

1	2	3	4	5	6	7
-2	-1	-1	1	-1	-1	-1

búsqueda$(U,6) \to 6$; *búsqueda*$(U,7) \to 7$;

unión$(U,6,7)$

1	2	3	4	5	6	7
-2	-1	-1	1	-1	-2	6

búsqueda$(U,1) \to 1$; *búsqueda*$(U,2) \to 2$;

unión$(U,1,2)$

1	2	3	4	5	6	7
-2	1	-1	1	-1	-2	6

búsqueda$(U,3) \to 3$; *búsqueda*$(U,4) \to 1$;

unión$(U,3,1)$

1	2	3	4	5	6	7
-2	1	1	1	-1	-2	6

búsqueda$(U,4) \to 1$; *búsqueda*$(U,5) \to 5$;

unión$(U,1,5)$

1	2	3	4	5	6	7
-2	1	1	1	1	-2	6

búsqueda$(U,2) \to 1$; *búsqueda*$(U,4) \to 1$;
búsqueda$(U,1) \to 1$; *búsqueda*$(U,3) \to 1$;
búsqueda$(U,4) \to 1$; *búsqueda*$(U,7) \to 6$;

unión$(U,1,6)$

1	2	3	4	5	6	7
-3	1	1	1	1	1	6

Esta última tabla describe un árbol con raíz 1 y altura 2. Cualquier nueva aplicación de la función *unión* ya daría un ciclo.

7-52 Los algoritmos de Kruskal y Prim se pueden utilizar para buscar un árbol generador maximal.

En el algoritmo de Kruskal sólo se debe modificar la ordenación de las aristas:

$E =$ lista de aristas ordenadas por peso en orden descendente

En el algoritmo de Prim sólo se tiene que modificar la comparación entre los pesos:

si $w(u_i, v) > E(v)$ **entonces**

De estas modificaciones se desprende que los algoritmos para buscar un árbol generador maximal tienen la misma eficiencia que para buscar un árbol generador minimal.

7-53 Sea (G, w) un grafo ponderado conexo de orden n y medida m, el algoritmo de Kruskal determina un árbol generador minimal con una complejidad $O(m \log m)$ y el algoritmo de Prim con una complejidad $O(n^2)$.

Observemos que la eficiencia del algoritmo de Kruskal depende de la medida del grafo, mientras que el algoritmo de Prim tiene una eficiencia que sólo depende del orden del grafo. Para poder comparar los dos algoritmos habrá que estudiar la relación que hay entre estas dos cantidades, entre $m \log m$ y n^2.

Para un grafo conexo la medida está acotada por

$$n - 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Cuando la medida está próxima a $\frac{n(n-1)}{2}$ (al grafo completo K_n) se dice que el grafo es *denso* (en inglés, *dense graph*). En caso contrario diremos que el grafo es *poco denso* (*sparse graph*, en inglés).

Por lo tanto, si el grafo es poco denso entonces $m \approx n - 1$ y podemos sustituir

$$O(m \log m) = O((n-1)\log(n-1)) = O(n \log n) < O(n^2)$$

En cambio, si el grafo es denso $m \approx \frac{n(n-1)}{2}$ y sustituyendo

$$O(m \log m) = O(\frac{n(n-1)}{2} \log \frac{n(n-1)}{2}) = O(n^2 \log n) > O(n^2)$$

Se puede concluir que para grafos poco densos es más eficiente el algoritmo de Kruskal que el de Prim. En cambio, para grafos densos es mejor el algoritmo de Prim.

La principal ventaja del algoritmo de Prim es que su eficiencia es independiente de la medida del grafo. Como consecuencia, en muchas aplicaciones es preferido al de Kruskal.

7-54 Sí aplicamos el apartado 1 de la proposición 7.17, página 34, podemos calcular el número de hojas, $t = (m-1)i + 1 = (5-1)200 + 1 = 801$. El número total de vértices es $n = t + i = 801 + 200 = 1001$.

7-55 Siendo $n = |V|$ el orden del árbol, el número de aristas es $|A| = n - 1$. En un árbol como el indicado se consideran los siguiente conjuntos disjuntos de vértices:

- la raíz, que es el único vértice de grado 2,
- las hojas o vértices de grado 1; se indicará por F el conjunto de las hojas, de cardinal $k = |F|$,
- el resto de vértices, vértices internos, de grado 3, de los cuales hay m; se indicará por I el conjunto de vértices internos.

De acuerdo con la distribución anterior se puede escribir

$$n = m + k + 1.$$

Usando la fórmula de los grados:

$$2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in Y} g(v) + \sum_{v \in F} g(v) + 2.$$

Ahora, aplicando la condición $|A| = n - 1$ y teniendo en cuenta los grados de los vértices, se puede escribir:

$$2(n-1) = 3m + k + 2.$$

Sustituyendo en la última igualdad el valor de $m = n - k - 1$, obtenido en la primera relación, obtenemos finalmente $k = \frac{n+1}{2}$.

7-56 Si se distribuyen las monedas (todas o parte de ellas) entre los platos de la balanza se pueden considerar tres posibles resultados:

Caso 1: los platos están equilibrados. Significa que las monedas de los dos platos no son falsas.

Caso 2: el plato de la izquierda de la balanza pesa más. Significa que la moneda falsa está a la izquierda.

Caso 3: el plato de la derecha pesa más. Significa que la moneda falsa está a la derecha.

Se puede representar esta situación mediante un árbol ternario que tendrá un mínimo de ocho hojas. Una para cada una de las monedas. La altura del árbol representará el número de pesadas necesarias para descubrir la moneda falsa. Si aplicamos las propiedades de los árboles m-arios, $m = 3$

$$h \geq \lceil \log_3 t \rceil \geq \lceil \log_3 8 \rceil = 2$$

Se necesitarán, pues, un mínimo de dos pesadas para descubrir la moneda falsa. ¿Existe alguna estrategia que permita alcanzar este mínimo?

7-57 En el árbol binario T de una expresión aritmética, los operandos son siempre las hojas y los operadores los vértices internos. Además, el recorrido en preorden siempre empieza en la raíz del árbol (y de cada subárbol). Por lo tanto, por la forma de la expresión deducimos que se trata del recorrido en preorden del árbol binario de una expresión aritmética con la raíz $*$.

Así, la expresión tendrá la forma $\alpha * \beta$ donde α y β son, respectivamente, los dos subárboles de T. El subárbol α también se tiene que recorrer en preorden y, por lo tanto, tendría que empezar por un operador. Ahora bien, puesto que el símbolo que sigue a $*$ en el recorrido de T es una a, podemos concluir que se trata de una hoja y que $\alpha = a$. Así, tendremos $a * \beta$ con $\beta = +\, b\ *\ c\ +\ d\, e$.

Siguiendo un razonamiento parecido para el subárbol β, podemos deducir que el signo $+$ es la raíz, b es el primer subárbol de β y $*\ c\ +\ d\ e$ el segundo. Siguiendo este mismo razonamiento de manera recursiva, se llega al resultado $\beta = b + c * (d + e)$.

Finalmente, sustituyendo α y β en la expresión inicial se obtiene la expresión $a * (b + c * (d + e))$.

Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos

Ramon Masià
Jaume Pujol
Josep Rifà
Mercè Villanueva

P06/75006/01401

www.uoc.edu

Índice

Introducción

Muchos problemas de planificación y organización (servicio de recogida de basura, servicio de inspección de instalaciones de gas, servicio de reparto de cartas, servicios de mensajería) se pueden tratar como problemas de optimización de recorridos.

En este módulo se estudian dos problemas clásicos de optimización de recorridos: los recorridos que pasan por todas las aristas del grafo una sola vez (*recorridos y circuitos eulerianos*) y los que contienen todos los vértices del grafo una sola vez (*caminos y ciclos hamiltonianos*).

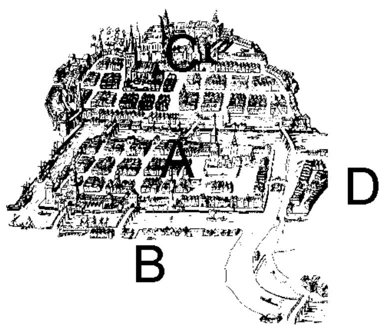
A pesar de la similitud entre los dos problemas, veremos que tienen un tratamiento diferenciado de manera que el primero es un problema "fácil" de resolver, mientras que el segundo es un problema "intratable".

Finalmente, estudiaremos una generalización del problema de buscar un ciclo hamiltoniano en un grafo. Es el *problema del viajante de comercio* (*TSP*) que es uno de los problemas más notables de optimización en un grafo. Es especialmente interesante porque constituye uno de los ejemplos básicos de problema de la clase *NP*.

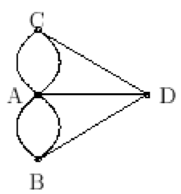
1. Grafos eulerianos

1.1. Resultados fundamentales

En el siglo XVIII la antigua ciudad de Königsberg (en Prusia oriental) estaba dividida en cuatro zonas por el río Pregel. Siete puentes comunicaban estas zonas tal y como muestra el gráfico siguiente:



Uno de los entretenimientos de los ciudadanos de Königsberg consistía en buscar un recorrido que atravesara cada puente una vez, volviendo a su punto exacto de partida. En términos de grafos este entretenimiento es equivalente a buscar un recorrido que pase por cada arista del multigrafo G



exactamente una vez.

Leonard Euler probó que no existía un recorrido que cumpliera estas condiciones y caracterizó los grafos (multigrafos) que sí lo contienen: éstos son los **grafos eulerianos**.

Definición 8.1

En un grafo (multigrafo) $G = (V, A)$

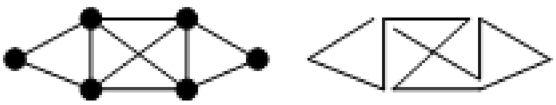
- Un **recorrido euleriano** es un recorrido abierto que contiene todas las aristas del grafo sin repetición.
- Un **circuito euleriano** es un circuito que pasa por todas las aristas del grafo. Si un grafo admite un circuito de estas características, se denomina **grafo euleriano**.

Estas nociones sólo tienen sentido en el contexto de los grafos conexos; en caso de que no lo sean, se tratan los problemas de eulerianidad en las componentes conexas del grafo.

Ejemplo 8-1

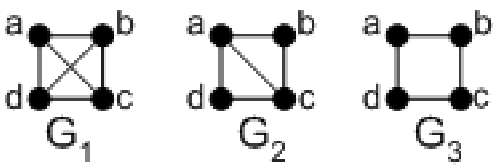
De una manera intuitiva podemos decir que un grafo es euleriano si puede ser dibujado de un solo trazo sin repetir ninguna línea y empezando y acabando en un mismo punto.

El grafo de la izquierda es euleriano, puesto que lo podemos dibujar de un solo trazo sin repetir ninguna línea y empezando y acabando en un mismo punto tal como lo muestra el dibujo de la derecha.



Ejemplo 8-2

De los grafos representados en la siguiente figura



el grafo G_1 no contiene ningún recorrido ni circuito euleriano (obsérvese que es K_4). El grafo G_2 contiene un recorrido euleriano: a,b,c,d,a,c; pero no contiene ningún circuito euleriano. Finalmente, el grafo G_3 contiene un circuito euleriano: a,b,c,d,a; pero no contiene recorrido euleriano (obsérvese que se trata de C_4).

Teorema 8.2

Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo. Entonces, G es euleriano si, y sólo si, todos los vértices son de grado par.

Demostración:

1) Supongamos que el grafo es euleriano y probemos que el grado de todo vértice es par. Sea Q un circuito euleriano que, en la medida que contiene todas las aristas, pasa por todos los vértices; sea v un vértice cualquiera, que tiene que pertenecer a Q, y que eventualmente puede estar repetido. Cada aparición del vértice en el circuito contribuye en dos unidades al grado del vértice (tenemos que contar la arista por la que "llegamos", que se utiliza por primera vez puesto que no se pueden repetir aristas, y tenemos que "salir" por una arista aún no utilizada); la contribución es de dos unidades porque las aristas adyacentes que figuran en la secuencia no han estado utilizadas anteriormente; si k es el número de apariciones del vértice, entonces el grado es $g(v) = 2k$, es decir, par.

2) Supongamos que el grado de todo vértice es par y vamos a probar que el grafo es euleriano. Tenemos que encontrar un circuito euleriano en el grafo G.

Seleccionamos un vértice arbitrario v y formamos un circuito Q que se inicia en v tal como se indica a continuación. Si empezamos por v, cada vez que se alcanza un vértice se selecciona una arista que sea incidente y que no haya sido utilizada anteriormente; continuamos con el otro vértice extremo. Puesto que el grado es par, en cada vértice disponemos de una arista de salida para cada arista de llegada; la única excepción a esta regla es la del vértice inicial v, en donde se ha utilizado una arista de salida sin haber utilizado ninguna de entrada y, por lo tanto, si se llega a un vértice que ya no tiene más aristas con las que continuar el recorrido Q, este vértice es el inicial v.

Cuando esto pasa hay dos posibilidades: Q ya contiene todas las aristas del grafo, en cuyo caso ya hemos acabado y éste es el circuito euleriano que queríamos construir. No contiene todas las aristas, en este caso hemos construido un circuito en el grafo y entonces, por conexión, algún vértice del circuito es incidente con alguna otra arista no incluida en Q; este vértice se puede utilizar como punto de partida para la construcción de un nuevo circuito Q' que no contiene aristas de Q y que devuelve al vértice de partida, puesto que en $G - Q$ cada vértice es todavía de grado par. La reunión $Q \cup Q'$ es un circuito; si contiene todas las aristas, hemos acabado. De lo contrario, se repite el proceso hasta obtener un circuito euleriano (el proceso acaba debido a la finitud del grafo).

∎

Se puede enunciar un resultado más completo de caracterización de los grafos eulerianos:

Corolario 8.3

Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo. Entonces son equivalentes:

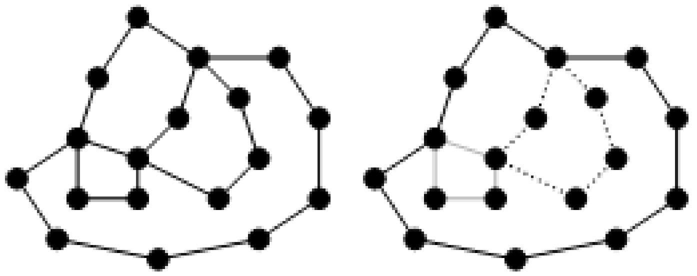
1) G es euleriano.

2) Los grados de los vértices son pares.

3) El conjunto de las aristas admite una partición en circuitos que no tienen aristas en común.

Demostración: Consecuencia inmediata del teorema 8.2 de caracterización de los grafos eulerianos. ∎

La tercera propiedad describe la estructura del grafo. La figura que sigue ilustra, en un caso concreto, el enunciado; el conjunto de las aristas A se puede expresar como $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y el conjunto de las aristas de cada A_i forma un circuito que no comparte lógicamente ninguna arista con ningún otro de los circuitos correspondientes a los otros subconjuntos, aun cuando los circuitos mencionados pueden compartir vértices. En la primera figura se muestra el grafo original y en la otra, una descomposición posible. La descomposición no es necesariamente única; el lector se puede dedicar a buscar otras descomposiciones posibles.

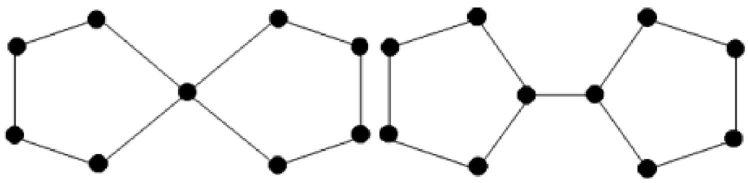


Ejemplo 8-3

A partir de la caracterización de los grafos eulerianos en términos de los grados de los vértices, resulta trivial comprobar que el (multi)grafo correspondiente al problema de los puentes de Königsberg no es euleriano y, por lo tanto, el problema no tiene solución.

Ejemplo 8-4

La primera figura corresponde a un grafo euleriano y la segunda a un grafo no euleriano. Sólo se necesita encontrar los grados de los vértices.



También nos podemos preguntar cuándo un grafo (multigrafo) conexo $G = (V, A)$ contiene un recorrido euleriano.

Corolario 8.4

Un grafo (multigrafo) conexo $G = (V, A)$ contiene un recorrido euleriano si, y sólo si, G tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Demostración: Si G contiene un recorrido euleriano $u - v$ entonces el grado de todos los vértices de G diferentes de u y v será un número par (con el mismo razonamiento utilizado para los circuitos eulerianos) y el grado de u y v será impar.

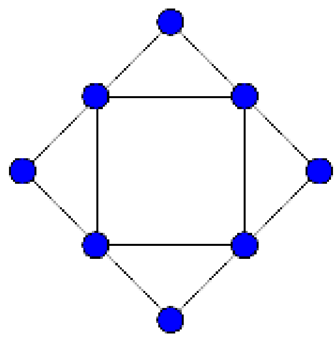
Si G contiene exactamente dos vértices u y v de grado impar, entonces el multigrafo $G+uv$ es conexo y tiene todos los vértices de grado par. Por lo tanto, si aplicamos el resultado de caracterización de los grafos eulerianos, $G + uv$ contiene un circuito euleriano C. Si eliminamos de este circuito C la arista $\{u, v\}$ obtendremos un $u - v$ recorrido euleriano en el grafo G. ∎

1.1.1. Ejercicios

8-5 ¿Un circuito euleriano contiene todos los vértices del grafo?

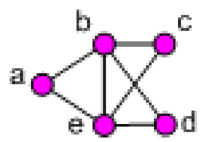
8-6 Analizar para qué valores de n, m, r, s, t son eulerianos los siguientes grafos: K_n, R_n, E_n, C_n, $K_{n,m}$, $K_{r,s,t}$.

8-7 ¿Cómo podemos saber si el siguiente grafo

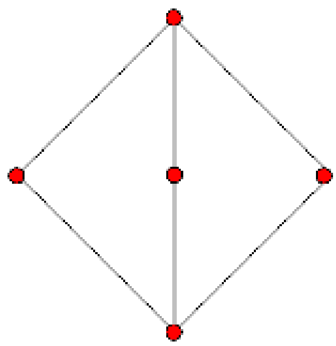


se puede dibujar de un solo trazo, sin repetir ninguna línea y empezando y acabando en el mismo vértice?

8-8 Estudiar si el siguiente grafo es euleriano utilizando la caracterización de los grafos eulerianos en términos de la descomposición del conjunto de aristas en circuitos que no tienen aristas en común.



8-9 Estudiar si el grafo siguiente es euleriano:



En caso de que no lo sea, decir si contiene un recorrido euleriano.

8-10 En una exposición se debe entrar por el mismo sitio por el que se sale. Durante un recorrido un visitante se da cuenta de que el espacio donde está tiene tres puertas. ¿Puede deducir de aquí que pasará por lo menos dos veces por la misma puerta?

8-11 ¿Cuál es el número mínimo de puentes que se necesitaría construir (y dónde) en Königsberg para que el "problema de los puentes de Königsberg" tenga solución?

1.1.2. Soluciones

8-5 Sí.

8-6 Según el teorema 8.2 (página 8) de caracterización, serán eulerianos cuando el grado de cada vértice sea par. Así, K_n será euleriano cuando n sea impar, puesto que cada vértice tiene grado $n-1$. En R_n ($n > 3$) un vértice tiene grado $n-1$ y el resto tienen grado 3, por lo tanto no será euleriano. En E_n ($n > 2$) hay vértices de grado 1, por lo tanto tampoco podrá ser euleriano.

En C_n todos los vértices tienen grado 2, por lo tanto será euleriano para todo n.

En $K_{n,m}$ los vértices tienen grado m o n, por lo tanto $K_{n,m}$ será euleriano cuando n y m sean pares.

Finalmente, en $K_{r,s,t}$ hay vértices de grado $s+t$, $r+t$ y $r+s$. Por lo tanto, será euleriano cuando r, s y t sean los tres pares o los tres impares.

8-7 Se podrà dibujar el grafo de un solo trazo si el grafo es euleriano, es decir, si cada vértice tiene grado par como es el caso del grafo representado por el dibujo.

8-8 El grafo es euleriano porque todos sus vértices tienen grado par. Una posible descomposición es $C_1 = \{$a,b,c,e,a$\}$, $C_2 = \{$b,d,e,b$\}$.

8-9 El grafo no es euleriano, ya que contiene vértices de grado impar. No obstante, puesto que contiene exactamente dos vértices de grado impar se puede concluir que contendrá un recorrido euleriano.

8-10 Si se considera el grafo que tiene como vértices los espacios de la exposición y, como aristas, cada una de las puertas; entonces el espacio donde se encuentra el visitante corresponde a un vértice de grado impar. Por lo tanto, el grafo no es euleriano y no se podrá construir un circuito que pase por cada arista sin repetir alguna.

8-11 Se necesitaría construir dos puentes. Por ejemplo, uno entre A y D y otro entre B y C.

1.2. Construcción de un circuito euleriano

En esta sección caracterizaremos los grafos eulerianos como aquéllos en los que el conjunto de aristas admite una partición en circuitos que no tienen aristas en común. El algoritmo resultante (primeramente atribuido a Hierholzer, 1873) construye un circuito euleriano a partir de la concatenación de circuitos disjuntos, es decir, sin aristas en común.

Formulación del algoritmo de Hierholzer

Entrada : un (multi)grafo conexo y euleriano $G = (V, A)$ de orden n
y un vértice inicial $s \in V$.
Salida : un circuito euleriano C de G representado como una lista de vértices.

```
algoritmo CircuitoEuleriano(G, s)
  inicio
    C ← {s}
    mientras A ≠ ∅
            v ← VérticeGradoPositivo(G, C)
            C' ← Circuito(G, v)
            C ← Concatenar(C, C', v)
            G ← G − C'
    finmientras
    retorno (C)
  fin
```

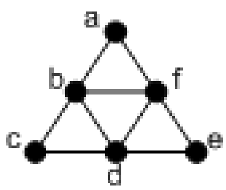
En el algoritmo se han utilizado las siguientes funciones:

- *VérticeGradoPositivo*(G, C) devuelve el primer vértice de C que tiene grado positivo en el grafo G.
- *Circuito*(G, v) devuelve un circuito C' construido en el grafo G a partir del vértice v.
- *Concatenar*(C, C', v) devuelve el circuito que se obtiene de sustituir la primera aparición del vértice v en el circuito C por la totalidad del circuito C'.
- La instrucción $G \leftarrow G - C'$ elimina de G las aristas del circuito C'.

Simulación del algoritmo de Hierholzer

Ejemplo 8-12

Considerar el grafo euleriano definido por el gráfico siguiente:



Si se aplica el algoritmo de Hierholzer empezando por el vértice a se obtiene:

Iteración	v	C'	C
0	a		$\{a\}$
1	a	$\{a, b, f, a\}$	$\{a, b, f, a\}$
2	b	$\{b, c, d, b\}$	$\{a, b, c, d, b, f, a\}$
3	d	$\{d, e, f, d\}$	$\{a, b, c, d, e, f, d, b, f, a\}$

Así, el circuito euleriano obtenido será $C = \{a, b, c, d, e, f, d, b, f, a\}$.

Análisis del algoritmo de Hierholzer

En el algoritmo de Hierholzer se pueden distinguir las siguientes operaciones:

1) Elegir un vértice v de grado positivo en la lista C. Ésta es una operación lineal en la medida de C. C contendrá, como máximo, n vértices diferentes. Por lo tanto, será una operación de complejidad $O(n)$.

2) Construir un circuito C' en G a partir del vértice v. Ésta es un operación que depende del número de aristas elegidas. En el peor de los casos serán tantas como la medida m del grafo. Será, pues, una función de complejidad $O(m)$.

3) Concatenar los circuitos C y C'. Ésta es una operación lineal en la medida de C, es decir , de complejidad $O(n)$.

4) Eliminar de G las aristas del circuito C'. Trivialmente, es una operación que, en el peor de los casos, tendrá una complejidad $O(m)$.

Resumiendo, se puede concluir que la complejidad de todo el algoritmo será

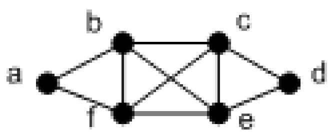
$$\max\{O(n), O(m), O(n), O(m)\} = O(m)$$

puesto que el grafo es conexo.

1.2.1. Ejercicios

8-13 ¿El circuito euleriano obtenido por el algoritmo de Hierholzer es único?

8-14 Aplicando el algoritmo de Hierholzer, encontrar un circuito euleriano del grafo



8-15 ¿Como se podría utilizar el algoritmo de Hierholzer para obtener un recorrido euleriano de un grafo G?

1.2.2. Soluciones

8-13 No, dependerá de cómo la función *Circuito()* construye cada uno de los circuitos. En el ejemplo 8-12 (página 13) se podrían haber construido los circuitos $\{a, b, c, d, e, f, a\}$ y $\{b, d, f, b\}$, obteniendo el circuito euleriano $C = \{a, b, d, f, b, c, d, e, f, a\}$.

8-14 La siguiente tabla muestra la aplicación del algoritmo de Hierholzer empezando por el vértice a:

Iteración	v	C'	C
0	a		$\{a\}$
1	a	$\{a, b, f, a\}$	$\{a, b, f, a\}$
2	b	$\{b, c, d, e, b\}$	$\{a, b, c, d, e, b, f, a\}$
3	c	$\{c, e, f, c\}$	$\{a, b, c, e, f, c, d, e, b, f, a\}$

Así, el circuito euleriano obtenido será $C = \{a, b, c, e, f, c, d, e, b, f, a\}$.

8-15 Si el grafo G contiene un recorrido euleriano, entonces contiene exactamente dos vértices de grado impar. Sean u y v estos vértices. Se construye el grafo $G' = G + uv$ y se aplica el algoritmo de Hierholzer a G' (puesto que G' será euleriano). En el circuito obtenido sólo se necesita eliminar la arista $\{u, v\}$ para obtener el recorrido euleriano de G.

2. Grafos hamiltonianos

2.1. Resultados fundamentales

El origen de los grafos hamiltonianos está en el juego de Hamilton, en el que se debe hallar un recorrido cerrado sin repetición de vértices, a través de las aristas de un dodecaedro regular. Otros problemas como el del tablero de ajedrez, el del viajante de comercio y el del robot de soldadura controlado por ordenador han motivado el estudio de estos grafos.

Definición 8.5

En un grafo $G = (V, A)$

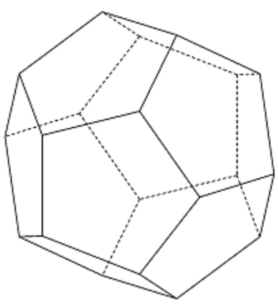
- Un recorrido es un **camino hamiltoniano** si pasa por todos los vértices sin repetición.
- Un **ciclo hamiltoniano** es un ciclo que pasa por todos los vértices del grafo. Si el grafo admite un ciclo de estas características, se denomina **grafo hamiltoniano**.

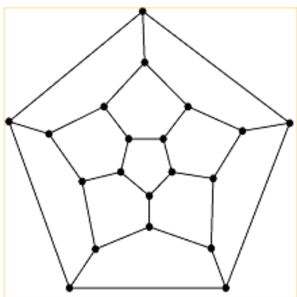
Estas definiciones sólo tienen sentido en el caso de un grafo conexo; en caso contrario, se aplican a cada una de las componentes conexas.

Ejemplo 8-16

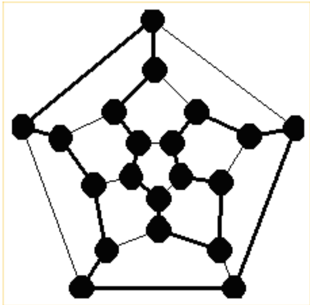
El matemático W.R. Hamilton inventó en 1856 un juego denominado "*The traveller's dodecahedron*", que consistía en un dodecaedro cuyos vértices representaban las principales ciudades del mundo de aquella época; se tenía que encontrar un recorrido cerrado a lo largo de las aristas del poliedro que pasara por todos los vértices sin repetición.

Obsérvese que se puede considerar un modelo en términos de teoría de grafos para este entretenimiento, como se ve en el esquema adjunto: los vértices del grafo corresponden a los vértices del dodecaedro y las aristas del grafo se corresponden con las aristas del poliedro; se trata de buscar un recorrido cerrado sobre el grafo que pase por todos los vértices exactamente una vez.





En este caso, el problema tiene solución como se puede ver en el siguiente gráfico.

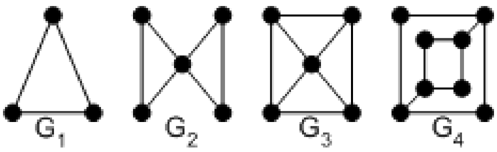


Encontrar una solución diferente de la presentada.

A pesar de la similitud entre las definiciones de grafo euleriano y grafo hamiltoniano, el siguiente ejemplo muestra que las condiciones de las definiciones son independientes:

Ejemplo 8-17

Vamos a estudiar si son eulerianos y/o hamiltonianos los siguientes grafos:



G_1 es euleriano porque todos los vértices son de grado par. También es hamiltoniano porque fácilmente se puede construir un ciclo hamiltoniano.

En G_2 todos los vértices son de grado par y, por lo tanto, es euleriano. En cambio, no es hamiltoniano. En efecto, si fuera hamiltoniano, tendría que tener un ciclo hamiltoniano, al cual contribuirían todos los vértices con exactamente dos aristas; considerando, pues, la contribución de los vértices de grado 2, resultaría que todas las aristas incidentes al vértice de grado 4 serían de este ciclo, lo que no tiene sentido.

G_3 no es euleriano (contiene vértices de grado impar) pero sí es hamiltoniano. Fácilmente se puede encontrar un ciclo hamiltoniano.

Finalmente, G_4 ni es euleriano ni hamiltoniano. No es euleriano porque contiene vértices de grado impar. Si hubiera un ciclo hamiltoniano, contendría todas las aristas de los vértices de grado 2, y puesto que cada vértice puede contener exactamente dos aristas incidentes; se tienen que descartar las aristas que conectan los vértices de grado 3 del grafo y, en consecuencia, el supuesto "ciclo hamiltoniano" sería reunión de dos ciclos!

A diferencia de los grafos eulerianos no hay ningún resultado que dé la condición necesaria y suficiente para que un grafo sea hamiltoniano. Existen condiciones necesarias de hamiltoneidad y existen también, independientemente, condiciones suficientes; muchas de éstas tienen poca aplicabilidad práctica en muchos casos concretos.

De manera intuitiva se puede observar en el ejemplo anterior que un grafo hamiltoniano es un grafo denso, es decir, contiene muchas aristas necesarias para conectar los vértices del grafo.

Primeramente, se da una definición que permitirá obtener condiciones necesarias para que un grafo sea hamiltoniano.

Definición 8.6

Un grafo $G = (V, A)$ es **2-conexo** si cada pareja de vértices u y v de G está conectada por un mínimo de dos caminos disjuntos, es decir, dos caminos que los únicos vértices que tienen en común son los extremos u y v.

Ejemplo 8-18

Si nos fijamos en los grafos del ejemplo anterior, se puede observar:

G_1 es 2-conexo, puesto que todos los vértices forman parte de un ciclo.

G_2 no es 2-conexo. En efecto, cualquier camino que una dos vértices opuestos en diagonal tiene que pasar por el vértice central.

Esta noción de 2-conectividad es necesaria para la existencia de un ciclo hamiltoniano.

Teorema 8.7

Si $G = (V, A)$ es un grafo hamiltoniano:

1) G es conexo y todos sus vértices tienen grado mayor o igual que 2.

2) G es 2-conexo.

3) Para todo $S \subset V$, $S \neq \emptyset$ se verifica $c(G - S) \leq |S|$ donde $c(G - S)$ representa el número de componentes conexas del grafo obtenido de G después de eliminar los vértices (y las aristas incidentes) de S.

4) Si G es (V_1, V_2)-bipartito entonces $|V_1| = |V_2|$.

Demostración: Si G es hamiltoniano, entonces se pueden disponer todos los vértices de G formando un ciclo $C : v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$. Así cada vértice v_i se conecta, al menos, con v_{i-1} y v_{i+1}. Por lo tanto, $g(v_i) \geq 2$.

Del mismo modo, entre v_i y v_j $(i < j)$ habrá, al menos, dos caminos disjuntos: el camino $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$ y el camino $v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_i$. Por lo tanto, será 2-conexo.

Si en un ciclo se eliminan r vértices, entonces se producirán como máximo r componentes conexas. Por lo tanto, para que un grafo sea hamiltoniano, siempre que se eliminen un conjunto de vértices S el número de componentes conexas producidas no puede superar el cardinal de S.

La última condición es consecuencia de la distribución de los vértices del grafo G en un ciclo. Necesariamente los vértices tienen que pertenecer alternativamente a V_1 y a V_2. Y esto implica que $|V_1| = |V_2|$. ∎

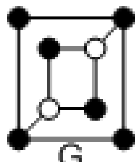
Ejemplo 8-19

Estas condiciones necesarias de hamiltoneidad se suelen utilizar para demostrar que un grafo no es hamiltoniano.

Los grafos con vértices de grado 1 no pueden ser hamiltonianos. Así, todos los grafos trayecto y todos los árboles no son grafos hamiltonianos.

El grafo G_2 del ejemplo 8-17 (página 17) no es hamiltoniano, puesto que no es 2-conexo.

El grafo G_4 del mismo ejemplo tampoco es hamiltoniano. Si se elimina el conjunto de dos vértices de color blanco se obtendrá un grafo con tres componentes conexas.



Todas estas condiciones sirven para demostrar que un grafo no es hamiltoniano, pero no permiten asegurar que lo es. Hay algunas condiciones suficientes para la existencia de ciclos hamiltonianos, pero tampoco sirven para encontrar explícitamente el ciclo. Desde un punto de vista algorítmico el problema de buscar un ciclo hamiltoniano en un grafo G es un problema *NP*. Es decir, un problema computacionalmente "intratable". Esto no significa que no se puedan encontrar ciclos hamiltonianos en un grafo, pero se deben utilizar algoritmos que exploren todas las posibilidades con técnicas de vuelta atrás (*backtracking*, en inglés).

Ejemplo 8-20

Si G es un grafo de n vértices, se podrían generar todos los ciclos formados por los n vértices. Esto es equivalente a formar todas las permutaciones de n elementos que son $n!$ Naturalmente, no todas estas permutaciones dan lugar a ciclos, puesto que puede haber vértices que no son adyacentes. Además, se puede fijar un vértice para empezar siempre por el mismo sitio. También se puede fijar una orientación en el ciclo, lo que reduce el número total de permutaciones que se necesitan explorar. En total se deben explorar $\frac{(n-1)!}{2}$ posibles ciclos.

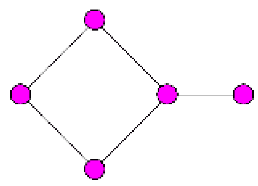
Para n pequeño, por ejemplo $n = 9$, el número de posibilidades es reducido (20160 para $n = 9$) y un computador las puede analizar en breves segundos. Sin embargo, cuando n aumenta, el gran número de posibilidades provoca que este método sea computacionalmente inviable. Por ejemplo, para $n = 20$ ya se tendrían que analizar más de 10^{17} posibilidades.

2.1.1. Ejercicios

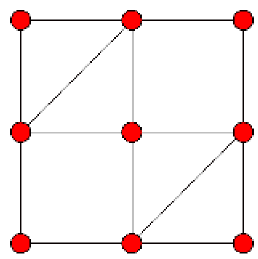
8-21 ¿Es cierto que todo grafo hamiltoniano contiene un camino hamiltoniano? ¿El recíproco es cierto?

8-22 ¿Todo ciclo hamiltoniano es circuito euleriano?

8-23 ¿Es hamiltoniano el siguiente grafo?



8-24 Estudiar si el grafo siguiente es euleriano; analizar también si es hamiltoniano.



8-25 La condición de 2-conectividad es necesaria para la hamiltoneidad. Proponer algún ejemplo que muestre que no es suficiente.

2.1.2. Soluciones

8-21 Si $v_1, \ldots, v_n, v_1$ es un ciclo hamiltoniano en G entonces $v_1, \ldots, v_n$ es un camino hamiltoniano en G. El recíproco, no obstante, no es cierto. Por ejemplo, el grafo trayecto T_n contiene un camino hamiltoniano, pero no es un grafo hamiltoniano.

8-22 No, porque no se incluyen necesariamente todas las aristas.

8-23 No, porque contiene un vértice de grado 1.

8-24 El grafo es euleriano porque todos los vértices tienen grado par. En cambio, no es hamiltoniano. Si se considera el conjunto S formado por los cuatro vértices situados en los puntos medios de los cuatro lados, entonces $|S| = 4$, mientras que $c(G - S) = 5$ en contradicción con la condición 3 del teorema 8.7 (página 18).

8-25 El grafo del ejercicio anterior es 2-conexo, pero no es hamiltoniano. Otro ejemplo sería el grafo G_4 del ejemplo 8-17(página 17).

3. El viajante de comercio

3.1. El TSP

Considérese un conjunto de n ciudades que un representante de una compañía de seguros tiene que visitar para dar a conocer las novedades de la empresa. Naturalmente, el representante tendrá que volver a su punto de partida. El viaje entre cada par de ciudades tiene un coste que dependerá de la distancia entre las dos ciudades. El representante se plantea qué itinerario tiene que seguir para visitar todas las ciudades con el menor coste posible.

La manera natural de enfocar el problema es considerar un grafo conexo y ponderado (G, w) donde los vértices son las ciudades y las aristas representan las distancias entre las mismas.

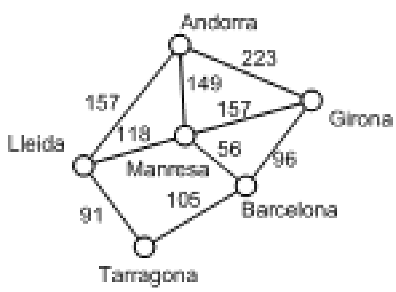
Este problema es un ejemplo del denominado **problema del viajante de comercio** (*travelling salesman problem*, en inglés) y, bajo ciertas condiciones, es equivalente al problema de buscar un ciclo hamiltoniano en el grafo G. A este último problema lo denominaremos problema *TSP*. Ahora bien, también es un problema *NP*, es decir, computacionalmente intratable. Sin embargo, veremos que en determinadas situaciones es posible aproximar la solución óptima de manera eficiente.

Formulación del problema *TSP* 8.8

Sea (G, w) un grafo conexo y ponderado, con pesos no negativos en las aristas. El problema trata de encontrar un ciclo hamiltoniano del grafo de peso (o longitud) total mínimo.

Ejemplo 8-26

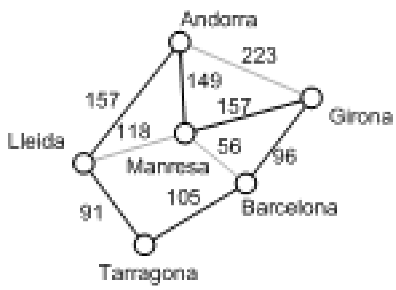
Determinar la ruta óptima (que pase por cada ciudad una sola vez) que tiene que seguir el representante de la compañía de seguros en el mapa siguiente:



En este caso en que sólo hay seis ciudades podríamos mirar las $\frac{5!}{2} = 60$ posibilidades de combinar las seis ciudades (algunas combinaciones no son rutas reales), y elegir la más económica.

Si se utiliza un algoritmo *greedy* y se buscan las cinco aristas de peso más pequeño que no forman ciclo (el árbol generador minimal), se obtendrá un grafo formado por las aristas {Barcelona, Manresa}, {Lleida, Tarragona}, {Barcelona, Girona}, {Barcelona, Tarragona} y {Manresa, Andorra} con una longitud total de 497. Éste es el mínimo valor posible para la solución que se busca. En este caso, no obstante, estas aristas no forman un ciclo hamiltoniano y, por lo tanto, no son solución del problema. Son solamente una cota inferior.

En este caso, la solución óptima estaría formada por el ciclo



con una longitud total de 755, es decir, el representante recorrería 755 kilómetros como mínimo.

3.1.1. El TSP con desigualdad triangular

La mayoría de problemas reales en los cuales se tiene que buscar un ciclo hamiltoniano óptimo corresponden a situaciones en las que intervienen distancias (viajes por una red de carreteras, tiempos transcurridos, repartos de trabajos, etc.). En todas estas situaciones se verifica la *desigualdad triangular* que significa que si comparamos la distancia (coste, tiempo) entre tres puntos x, y, z siempre será más corto ir directamente de x a y que pasar por z. De manera más precisa,

Definición 8.9

Un grafo ponderado (G, w) satisface la propiedad de la **desigualdad triangular** si para toda terna de vértices de G, u, v, x,

$$w(u, v) \leq w(u, x) + w(x, v)$$

En particular, todo grafo que satisface la desigualdad triangular tiene que ser completo.

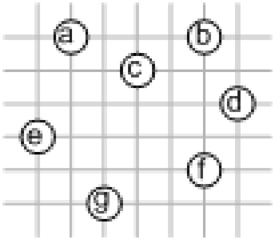
Para esta clase de grafos, el problema del viajante de comercio (*TSP*) se formularía de la siguiente manera:

Formulación del problema *TSP con desigualdad triangular* 8.10

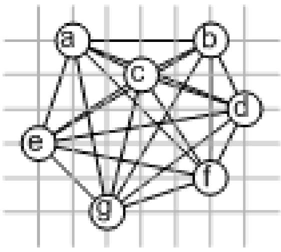
Sea (G, w) un grafo conexo y ponderado, con pesos no negativos en las aristas, que satisface la desigualdad triangular. El problema trata de encontrar un ciclo hamiltoniano del grafo de peso (o longitud) total mínimo.

Ejemplo 8-27

Un grafo ponderado que satisface la desigualdad triangular se puede representar en una porción de plano euclídeo:



Cada vértice del grafo está determinado por un par de coordenadas (v_x, v_y) y el peso de cada arista es la distancia euclídea entre los vértices. En este ejemplo se representa el grafo K_7 ponderado y que satisface la desigualdad triangular:



El vértice e está situado en la posición $(0, 2)$ y el vértice b en la posición $(5, 5)$. El peso de la arista $\{e, b\}$ es $w(e, b) = d(e, b) = \sqrt{(5-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$.

Aunque la formulación del problema del viajante de comercio que satisface la desigualdad triangular parece más simple, continúa siendo un problema *NP*, es decir, computacionalmente intratable. Sin embargo, en la sección siguiente se desarrollará un algoritmo eficiente que permite obtener una solución aproximada del problema. En la práctica, y especialmente si el número de vértices del grafo es elevado, puede ser suficiente construir una solución aproximada del problema (tan buena como sea posible) en lugar de obtener la solución óptima. Por ejemplo, si se tiene un método para encontrar una solución de manera eficiente que no se aleje más de un 2% de la solución óptima, seguramente será una "buena solución" para la mayoría de aplicaciones prácticas (obsérvese que en aplicaciones reales –distancias, por ejemplo– puede haber errores de medición que permiten despreciar errores pequeños en la solución).

3.1.2. Aproximación al TSP con desigualdad triangular

Una forma de aproximar la solución del problema que estamos tratando consiste en considerar la manera más corta de unir todos los vértices del grafo G sin generar un ciclo. Ya sabemos que para conseguir esto tenemos que calcular el árbol generador minimal de G. La idea del algoritmo que se propone será construir un ciclo hamiltoniano en G utilizando el número máximo posible de las aristas de un árbol generador minimal de G.

Formulación del algoritmo TSP-aproximado

<u>**Entrada**</u> : un grafo conexo y ponderado (G, w) de orden n
que satisface la desigualdad triangular.
<u>**Salida**</u> : un ciclo hamiltoniano H de G representado por una lista de vértices.
<u>**algoritmo**</u> *TSP-aproximado*(G)
  <u>**inicio**</u>
    Se selecciona $r \in V(G)$ /* la raíz del árbol */
    $T \leftarrow$ *ArbolGenerador*(G, r)
    $P \leftarrow$ *Preorden*(T)
    $H \leftarrow$ *CicloHamiltoniano*(P)
    <u>**retorno**</u> (H)
  <u>**fin**</u>

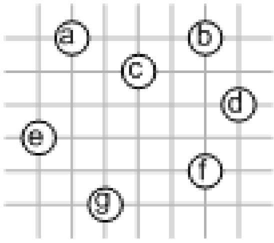
En el algoritmo se han utilizado las siguientes funciones:

- *ArbolGenerador*(G, r) devuelve un árbol generador de G a partir de la raíz r usando el algoritmo de Prim.
- *Preorden*(T) devuelve un recorrido en preorden del árbol con raíz T. Este recorrido contendrá todos lo vértices de G en un determinado orden, $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- *CicloHamiltoniano*(P) devuelve el ciclo que se obtiene al añadir la arista $\{v_n, v_1\}$ al recorrido P, es decir, $H = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1\}$.

Simulación del algoritmo TSP-aproximado

Ejemplo 8-28

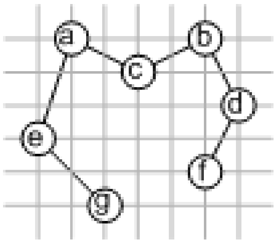
Considérese el grafo del ejemplo 8-27 (página 23)



Vamos a aplicar el algoritmo *TSP-aproximado* a este grafo:

1) Se selecciona un vértice inicial, $a \in G$, como raíz del árbol.

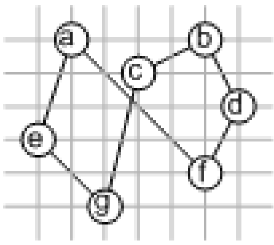
2) Se construye el árbol generador minimal T de G empezando por a:



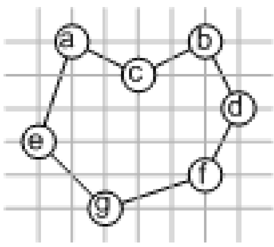
Este árbol generador minimal tiene una longitud $w(T) = 4\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{8} = 14.935$

3) Se obtiene el recorrido en preorden de T: $P = \{a, e, g, c, b, d, f\}$.

4) Y, finalmente, el ciclo hamiltoniano $H = \{a, e, g, c, b, d, f, a\}$ que tendrá un longitud $w(H) = \sqrt{10} + \sqrt{8} + \sqrt{17} + 3\sqrt{5} + \sqrt{32} = 22.4789$



En este ejemplo, el ciclo hamiltoniano óptimo es $H^* = \{a, c, b, d, f, g, e, a\}$



con una longitud $w(H^*) = 18.0973$.

Obsérvese que un número importante de las aristas (en este ejemplo concreto, todas) del árbol generador minimal también pertenecen al ciclo hamiltoniano óptimo. También, muchas de las aristas del árbol generador minimal pertenecen al ciclo aproximado.

Análisis del algoritmo TSP-aproximado

El algoritmo *TSP-aproximado* efectúa dos operaciones fundamentales:

1) Calcula el árbol generador minimal de G con el algoritmo de Prim. Ésta es una operación que tiene una complejidad $O(n^2)$.

2) Calcula el recorrido en preorden de un árbol con raíz. Este algoritmo visita cada vértice una sola vez y tiene una complejidad que es una función lineal del orden del árbol, es decir, una complejidad $O(n)$.

En total, el algoritmo tendrá una complejidad $O(n^2)$.

Se puede afirmar, pues, que éste es un algoritmo eficiente que obtiene una solución aproximada al problema del *TSP con desigualdad triangular* (que es un problema intratable). Naturalmente, esta ganancia en eficiencia provoca una pérdida de precisión en la solución. No obstante, necesitaríamos asegurarnos de que esta pérdida de precisión no supera ciertos límites, es decir, la diferencia entre la solución aproximada y la óptima se mantiene acotada.

Proposición 8.11

Sea H el ciclo hamiltoniano obtenido por el algoritmo *TSP-aproximado* y denotemos por H^* el ciclo hamiltoniano óptimo (mínimo) de G. Entonces

$$w(H) \leq 2 \cdot w(H^*)$$

Demostración: Sea T el árbol generador de peso mínimo de G obtenido por el algoritmo. Entonces $w(T) \leq w(H^*)$, puesto que $w(T)$ es el peso total de unir todos los vértices de G de la manera más corta posible.

Demostraremos que $w(H) \leq 2 \cdot w(T)$ donde H es el ciclo hamiltoniano obtenido por el algoritmo *TSP-aproximado*. El recorrido en preorden de un árbol se puede entender como un recorrido en profundidad del árbol en el cual se retrocede cuando se llega a una hoja y se visita cada vértice la primera vez que se encuentra en el recorrido. El peso de un recorrido hecho de este modo será exactamente $2 \cdot w(T)$, puesto que cada arista es recorrida dos veces. Puesto que en el ciclo hamiltoniano que retorna el algoritmo se sustituye el retroceso en el árbol T por una arista directa al próximo vértice de su recorrido en preorden y puesto que G cumple la desigualdad triangular, necesariamente $w(H) \leq 2 \cdot w(T)$. De las dos desigualdades se obtiene $w(H) \leq 2 \cdot w(T) \leq 2 \cdot w(H^*)$ ∎

Puesto que siempre $w(H^*) \leq w(H)$, esta proposición nos asegura que utilizando el *TSP-aproximado* podemos esperar que la solución obtenida no sea más del doble de la solución óptima. No obstante, en la práctica suele ser solamente un 15% o un 20% peor que la óptima [1].

3.1.3. Ejercicios

8-29 La solución al problema del viajante de comercio (*TSP*) formulado en 8.8 no siempre es la mejor solución para que un viajante visite todas las ciudades de su zona de representación. Supongamos que el viajante tiene que visitar cinco ciudades $\{A, B, C, D, E\}$ y que la tabla siguiente representa las distancias entre estas ciudades:

	A	B	C	D	E
A	0	10	1	10	0
B	10	0	1	0	10
C	1	1	0	1	1
D	10	0	1	0	10
E	0	10	1	10	0

1) Encontrar la solución al problema *TSP*, es decir, encontrar un ciclo hamiltoniano de peso mínimo en el grafo ponderado G determinado por la tabla de distancias anterior.

2) Demostrar que es posible encontrar un circuito sobre el grafo anterior (que pase por todas las ciudades) con un peso más pequeño que el que se ha obtenido en el apartado anterior.

8-30 Si se utiliza la misma técnica que en el ejemplo 8-26 (página 21) encontrar una cota inferior para la solución al problema *TSP* del grafo definido por la tabla

	A	B	C	D	E
A	0	57	64	8	26
B	57	0	88	54	34
C	64	88	0	57	56
D	8	54	57	0	23
E	26	34	56	23	0

8-31 Dar un ejemplo de un grafo en el que el algoritmo *TSP-aproximado* permita obtener la solución óptima al problema *TSP* con desigualdad triangular.

8-32 ¿Se podría utilizar el algoritmo de Kruskal en lugar del algoritmo de Prim en el algoritmo *TSP-aproximado*?

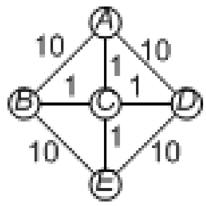
8-33 En el ejemplo 8-26 (página 21) se afirma que el número total de posibles ciclos hamiltonianos diferentes que hay en un grafo de orden n es, como máximo, $\frac{(n-1)!}{2}$. Se pospone la demostración de este resultado a un ejercicio posterior (véase el ejercicio de autoevaluación 8-38, página 29).

Hacer una tabla comparativa de los tiempos de ejecución entre un algoritmo que busque los posibles ciclos hamiltonianos (algoritmo *TSP-fuerza bruta*) y el algoritmo *TSP-aproximado* en un grafo que satisface la desigualdad triangular:

n	*TSP-fuerza bruta*	*TSP-aproximado*
5		
10		
50		
100		
500		
1000		

3.1.4. Soluciones

8-29 El grafo G determinado por la tabla de distancias será:



1) Una solución al problema *TSP* en este grafo es el ciclo $H = \{A, B, C, E, D, A\}$ con un peso total $w(H) = 32$.

2) No obstante, el viajante podría seguir el circuito $C = \{A, C, B, C, D, C, E, C, A\}$ con un peso total $w(C) = 8$ que es menor que el anterior. Naturalmente, en este caso se repiten vértices y aristas.

Obsérvese que este grafo no satisface la desigualdad triangular.

Esta variante del problema *TSP* se denomina problema *TSP generalizado*.

8-30 En el ejemplo 8-26 (página 21) se ha utilizado un árbol generador minimal como aproximación a la solución del problema *TSP*. Si T es el árbol generador minimal del grafo ponderado G construido a partir de la tabla del enunciado, entonces $w(T) \leq w(H^*)$ donde H^* es la solución óptima.

Si se aplican los algoritmos de Prim o de Kruskal a este grafo se obtiene un árbol T de peso $w(T) = 121$. Por lo tanto, la cota mínima de $w(H^*)$ será 121.

8-31 Por ejemplo, se puede considerar K_4 sobre el plano euclídeo con los vértices situados sobre los puntos de coordenadas $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$. El peso de cada arista estaría determinado por la distancia euclídea entre los vértices que determinan la arista. En este grafo la solución dada por el algoritmo *TSP-aproximado* es óptima.

8-32 Sí. Si el árbol obtenido es el mismo, entonces la solución obtenida también será la misma.

8-33 Un algoritmo que utilice la fuerza bruta (todos los posibles ciclos hamiltonianos) para buscar el óptimo en un grafo G de orden n que satisface la desigualdad triangular tendrá que analizar $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos para encontrar la solución óptima. En cambio, el algoritmo *TSP-aproximado* encuentra una aproximación con un tiempo proporcional a n^2. Si se comparan este dos valores en la tabla propuesta, se obtiene:

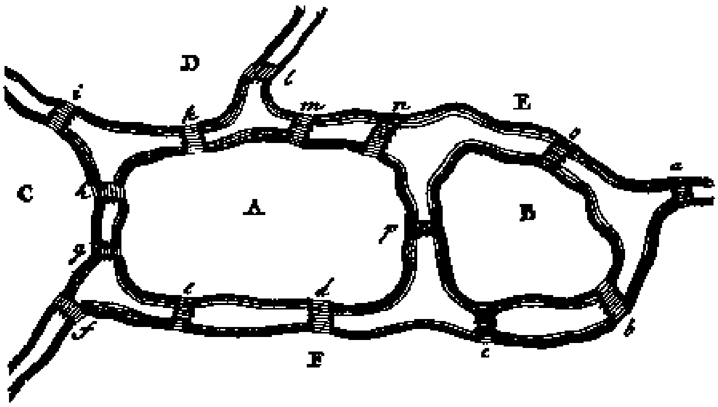
n	*TSP-fuerza bruta*	*TSP-aproximado*
5	12	25
10	181440	100
50	3.041×10^{62}	2500
100	4.666×10^{155}	10000
500	1.220×10^{1131}	250000
1000	2.011×10^{2564}	1×10^6

Estos resultados muestran cómo, para grafos muy pequeños, podría ser mejor utilizar un algoritmo que explora todas las posibilidades en lugar del *TSP-aproximado*. Pero, inmediatamente, cuando n aumenta, la "fuerza bruta" se vuelve intratable, mientras que el *TSP-aproximado* se mantiene dentro de unos valores aceptables.

Naturalmente, esta mejora se consigue a costa de apartarse de la solución óptima. No obstante, en muchas aplicaciones esta pérdida podría no ser significativa. En cambio el tiempo necesario para obtener la mejor solución sí que puede ser una dificultad insalvable.

Ejercicios de autoevaluación

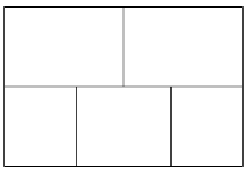
8-34 En el siguiente grafo, versión alternativa del grafo de los puentes de Königsberg, decidir si es posible hacer un recorrido cerrado que pase por todos los puentes sin repetición.



8-35 Suponiendo que un (multi)grafo conexo $G = (V, A)$ está almacenado mediante su matriz de adyacencias; ¿cómo se puede decidir fácilmente sí el grafo es euleriano? ¿Qué complejidad tendrá un algoritmo que compruebe que el grafo G es euleriano? ¿Y si está almacenado mediante la lista de adyacencias?

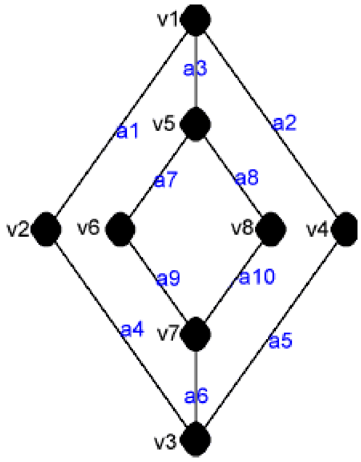
8-36 Sea $G = (V, A)$ un grafo r-regular, con $|V|$ par y $|A|$ impar. Probar que no es euleriano.

8-37 Considérese el recinto cerrado con habitaciones tal como se indica en la siguiente figura (por ejemplo, una sala de exposiciones); se abren puertas a través de las paredes que comunican habitaciones contiguas. Se trata de analizar si hay algún recorrido cerrado, que empiece y acabe en la misma habitación y que pase por todas las puertas exactamente una vez.

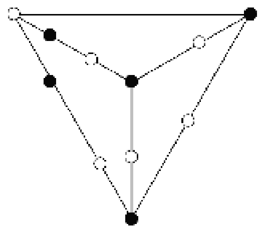


8-38 Demostrar que K_n es hamiltoniano y calcular el número de ciclos hamiltonianos que tiene, considerando que dos ciclos son diferentes si contienen por lo menos una arista diferente.

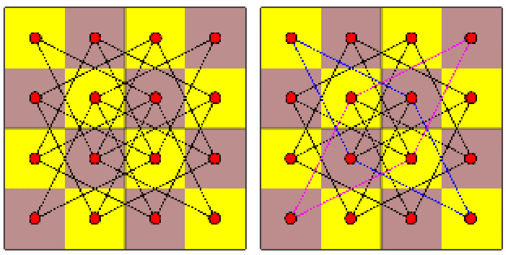
8-39 Considerar el grafo de la figura adjunta. Estudiar si es hamiltoniano por más de un método.



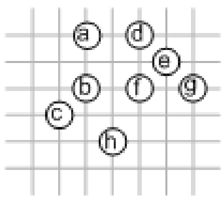
8-40 Estudiar si el grafo de la figura que sigue es hamiltoniano o no.



8-41 Probar que el problema del recorrido del caballo en un tablero de ajedrez de 4×4 no tiene solución (es decir, que el grafo correspondiente no es hamiltoniano). Estudiar también el problema con un tablero de 3×3 y uno de 5×5. Indicación: se deben incluir necesariamente las aristas adyacentes a los vértices de grado 2.



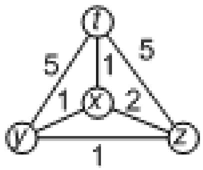
8-42 El gráfico siguiente muestra la red de puntos de reparto que una empresa de correspondencia internacional tiene que cubrir por medio de una línea aérea (cada unidad representa 1000 kilómetros):



Si el reparto empieza en el punto a y tiene que volver al mismo punto sin pasar dos veces por el mismo aeropuerto, obtener, de forma aproximada, la ruta que debe seguir y los kilómetros que tiene que hacer el avión para entregar toda la correspondencia.

8-43 Considerar el problema *TSP generalizado* en un grafo (G, w) ponderado y conexo de orden n. Se pretende buscar un recorrido cerrado de peso mínimo que pase por cada vértice (no necesariamente una única vez).

1) Comprobar que la solución al problema *TSP generalizado* en el grafo

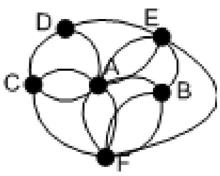


no coincide con la solución al problema *TSP*.

2) Proponer un método con el que se pueda resolver el problema *TSP generalizado* a partir del problema *TSP con desigualdad triangular*. Indicación: considerar el grafo de distancias de G, es decir, el grafo que se obtiene de G considerando las distancias entre todos los pares de vértices.

Soluciones

8-34 El multigrafo correspondiente a la versión alternativa de los puentes de Königsberg es



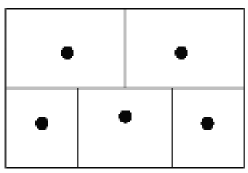
Puesto que hay vértices de grado impar (el D y el E), no es posible hacer un recorrido cerrado que pase por todos los puentes sin repetición. En cambio, puesto que hay exactamente dos vértices de grado impar, sí que se puede hacer un recorrido que pase por todos los puentes sin repetición empezando en D y acabando en E.

8-35 Si está representado por la matriz de adyacencias, el grado del vértice i-ésimo es la suma de la fila i-ésima de la matriz. Por lo tanto, el grafo será euleriano si, y sólo si, las sumas de todas las filas son números pares. Un algoritmo para comprobar si el grafo es euleriano tendría que calcular las sumas de todas las filas y, si el orden de G es n, se necesitarán un total de n^2 operaciones de suma. En definitiva, tendrá una complejidad $O(n^2)$.

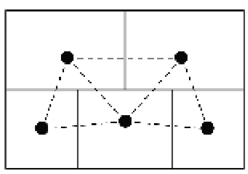
Si está almacenado como una lista de adyacencias, entonces se tendrá que verificar si cada lista tiene un número par de elementos. Si el grafo tiene orden n y medida m se necesitarán $n + 2m$ operaciones. Por lo tanto, tendrá una complejidad $O(n + m)$.

8-36 Aplicando la fórmula de los grados: $2|A| = \sum_{v \in V} g(v) = r|V|$. Si el orden del grafo es par, entonces es $|V| = 2k$, para algún k, y en consecuencia, sustituyendo en la igualdad anterior, resulta: $2|A| = 2rk$, de donde $|A| = rk$. Ahora bien, siendo impar la medida del grafo, r también es impar y, en aplicación del teorema de caracterización de grafos eulerianos (un grafo es euleriano si, y sólo si, todos los vértices son de grado par), se puede concluir que el grafo no es euleriano.

8-37 Se plantea el problema en términos de la teoría de grafos. Se asocia a cada habitación un vértice del grafo que se trata de construir, como en el siguiente esquema:



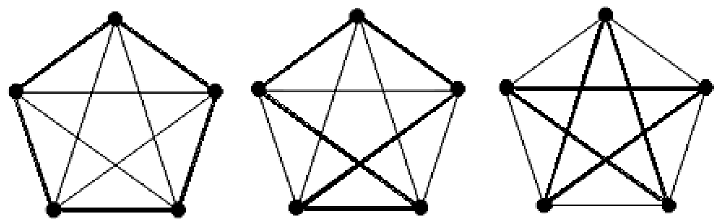
y posteriormente se representa por una arista la comunicabilidad entre habitaciones que comparten una puerta, de manera que el grafo asociado al problema es el del siguiente gráfico, donde las aristas se han indicado con línea discontinua:



Y ahora el problema inicial se plantea como un problema de recorridos sobre el grafo asociado y, más concretamente, se pide si el grafo asociado es o no euleriano; de acuerdo con el teorema de caracterización de grafos eulerianos que dice que un grafo es euleriano si, y sólo si, todo vértice es de grado par, resulta que el grafo no es euleriano y, por lo tanto, no es posible organizar un recorrido como el que se pide.

Obsérvese, en cambio, que puesto que hay exactamente dos vértices de grado impar, es posible organizar un recorrido que atraviese todas las puertas exactamente una vez y empiece y acabe en las habitaciones que tienen un número impar de puertas.

8-38 Puesto que todos los vértices de K_n son adyacentes, cualquier permutación de los n vértices de K_n, $v_1, \ldots, v_n$, formarán un camino hamiltoniano. Añadiendo la arista $\{v_n, v_1\}$, se obtendrá un ciclo hamiltoniano en K_n. El gráfico siguiente muestra varios ciclos hamiltonianos en K_5.



Para contar el número de ciclos hamiltonianos diferentes en K_n, se puede fijar un vértice v y considerar todos los ciclos que empiezan en v. En total existirán $(n-1)!$ de ellos, aunque la mitad tienen las mismas aristas con la orientación cambiada. Así, el número total de ciclos hamiltonianos diferentes en K_n es $\frac{(n-1)!}{2}$.

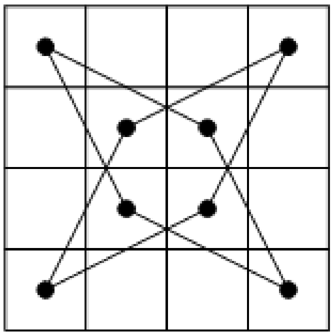
8-39 Método 1. Si hubiera un ciclo tendría que contener todos los vértices, lo que significa que tendría que contener todas las aristas de los vértices de grado 2; por lo tanto, se tendrían que incluir en un posible ciclo, si existiera, las aristas incidentes a los vértices de grado 2, que serían en este caso: $a1, a2, a4, a5, a7, a8, a9, a10$. Ahora bien, en un ciclo hamiltoniano, –puesto que es un ciclo– cada vértice sólo contribuye con exactamente dos aristas, lo que significaría que necesariamente se deben excluir las aristas $a3$ y $a6$ del hipotético ciclo; por consiguiente, el ciclo hamiltoniano tendría que ser finalmente $C_4 \cup C_4$, lo que es evidentemente absurdo.

Método 2. Se pretende buscar un conjunto de vértices cuya eliminación produzca un número de componentes conexas estrictamente superior al número de vértices eliminados; entonces se podrá concluir que no puede haber ningún ciclo hamiltoniano. Existe más de una posibilidad: uno de estos conjuntos de vértices estará formado por los vértices $v5, v7$, dos vértices cuya eliminación produce tres componentes conexas; el otro conjunto estará formado por los vértices $v1, v3$.

8-40 Éste es un ejemplo de grafo $G = (V, A)$ bipartito, como se puede ver ya directamente sobre el esquema dado: en efecto, si indicamos por V_1 el conjunto de los vértices blancos y por V_2 el conjunto de los vértices negros, entonces el grafo es (V_1, V_2)-bipartito. Ahora bien, el número de vértices negros es 5 y el número de vértices blancos es 6; en consecuencia, aplicando el criterio 4 del teorema 8.7 (página 18), el grafo no es hamiltoniano.

8-41 En términos de grafos se puede definir el problema de la siguiente manera: comprobar que el grafo $G = (V, A)$, definido por $V = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 4\}$ donde las aristas están formadas por pares $\{(i, j), (i', j')\}$ con $|i - i'| = 1$ y $|j - j'| = 2$ o $|i - i'| = 2$ y $|j - j'| = 1$, es o no hamiltoniano.

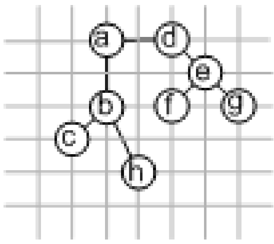
Si el grafo fuera hamiltoniano, las aristas incidentes a los cuatro vértices de las esquinas, que tienen grado 2, deberían estar en el ciclo. Estas aristas determinan dos ciclos disjuntos (véase el gráfico), lo que impide que formen parte del mismo ciclo hamiltoniano.



De manera parecida se puede comprobar que el tablero de 3×3 y el tablero de 5×5 tampoco son hamiltonianos.

8-42 El mapa propuesto se puede modelar como un grafo ponderado y conexo G que cumple la desigualdad triangular. Se utilizará el algoritmo *TSP-aproximado* para obtener una buena aproximación del ciclo hamiltoniano óptimo.

- Empezando por el vértice a se aplica el algoritmo de Prim para obtener un árbol generador minimal T:

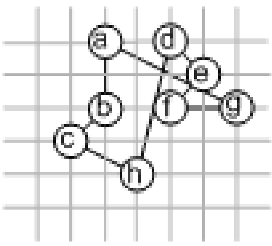


- El recorrido en preorden de este árbol empezando por el vértice a será

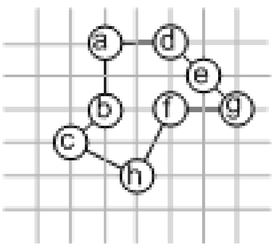
$$P = \{a, b, c, h, d, e, f, g\}$$

- A partir de P se construye el ciclo hamiltoniano $H = \{a, b, c, h, d, e, f, g, a\}$, que tiene una longitud total $w(H) = 19.07$

Así pues, el avión tendrá que recorrer 19070 kilómetros siguiendo la ruta



No obstante, ésta no es la ruta óptima. Se podría mejorar si el avión siguiera la ruta



puesto que sólo tendría que recorrer 14715 kilómetros.

8-43 Este ejercicio relaciona tres problemas aparentemente diferentes: *TSP*, *TSP generalizado* y *TSP con desigualdad triangular*.

1) La solución al problema *TSP* para este grafo sería el ciclo $H_1 = \{t, x, y, z, t\}$ con una longitud total de 8. En cambio, la solución al problema *TSP generalizado* será el circuito $H_2 = \{t, x, y, z, x, t\}$ con una longitud de 6. Observemos que este grafo no satisface la desigualdad triangular.

2) Considérese el grafo de distancias del grafo G. Este grafo será K_4 con el mismo conjunto de vértices de G y con todas las aristas posibles. El peso de la arista $\{u, v\}$ será $w(u, v) = d(u, v)$ en G. Se puede calcular la matriz $D = (d_{i,j})$ de distancias del grafo G a partir de su matriz de pesos $W = (w_{i,j})$ aplicando el algoritmo de Floyd.

A partir de la matriz W de pesos:

	x	y	z	t
x	0	1	2	1
y	1	0	1	5
z	2	1	0	5
t	1	5	5	0

se obtiene la matriz de distancias D aplicando el algoritmo de Floyd:

	x	y	z	t
x	0	1	2	1
y	1	0	1	2
z	2	1	0	3
t	1	2	3	0

El grafo ponderado (K_4, d) obtenido a partir de la matriz D es un grafo que satisface la desigualdad triangular. Por lo tanto, se puede buscar la solución al problema *TSP con desigualdad triangular* en este grafo: $H_3 = \{t, y, z, x, t\}$ con una longitud igual a 6.

Este ejercicio muestra que es posible reducir el problema *TSP generalizado* al problema *TSP con desigualdad triangular* y que la solución a éste da una solución al primero. También muestra que es tan difícil resolver el primero como el segundo, es decir, junto con el *TSP* son problemas *NP*.

Bibliografía

1. Skiena, Steven S. (1998). *The Algorithm Design Manual.* Berlín: Springer-Verlag.