Tema 1

Sistemas de ecuaciones lineales. Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Multitud de problemas de la vida real se rigen por proporciones constantes entre las magnitudes implicadas: procesos físicos, reacciones químicas, costes de materias primas y sus relaciones para formar otros productos, distribuciones que se mueven en circuitos como simulaciones de tráfico, canalizaciones de agua, etc...

Todas estas situaciones admiten de forma natural una descripción matemática a través de *s*istemas de ecuaciones lineales, concepto con el que comenzamos el temario de álgebra y que constituye uno de sus problemas centrales.

Más aún, la resolución de muchos problemas conlleva el manejo de gigantescos sistemas de ecuaciones lineales, por lo que nos plantearemos métodos eficientes para su análisis, pasando por la formulación matricial, y por las herramientas adecuadas para tratarlos: los espacios vectoriales.

De hecho, al final del curso se estará en disposición de comprender cómo incluso para fenómenos de modelización no lineal, el estudio aproximado del problema en torno a puntos de equilibrio puede ser satisfactorio, lo que tiene su traducción (linealización) en "la vuelta" a ciertos sistemas lineales (de tipo diferencial), continuación natural de los que empezamos estudiando aquí.

Esos problemas son básicos para cualquier ingeniería, en contextos tan distintos como la mecánica, o la estabilidad de poblaciones que conviven en equilibrio en un ecosistema.

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales. Transformaciones elementales

Definición 1. *Un sistema de ecuaciones lineales, en concreto de m ecuaciones con n incógnitas, es un conjunto de m igualdades que se pueden escribir en la forma:*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Los números $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \cdots, m$; $\quad j = 1, 2, \cdots, n$ reciben el nombre de coeficientes y los $b_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \cdots, m$, términos independientes[1]. Por último, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son las incógnitas del sistema.

En el caso particular de que $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ el sistema se denomina **homogéneo,** y aparecerá más adelante en el estudio de espacios vectoriales.

Definición 2. *Diremos que un conjunto de n números ordenados* $(\alpha_1, \alpha_2, ,\cdots, \alpha_n)$ *es una solución del sistema (1.1) si satisfacen todas las ecuaciones del sistema.*

Ejemplo 3. *Consideremos el siguiente sistema*

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & -2 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 3 \\ 5x_1 & -x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Para encontrar una solución del sistema si la hubiere, deberíamos intentar simplificar las ecuaciones. Pero de hecho, de existir solución, dichas igualdades han de satisfacerse. Podemos así combinarlas entre si para intentar simplificar coeficientes. Las combinaciones del tipo "multiplicar por escalar" y/o "sumar ecuaciones", aparte de intercambiarlas (obviamente), son "operaciones de ida y vuelta" (podríamos pasar de un sistema a otro y volver), lo que genera la siguiente

Definición 4. *Diremos que dos sistemas de ecuaciones son* **equivalentes** *si tienen las mismas soluciones.*

Obsérvese (como comprobaremos a continuación) que dos sistemas equivalentes no han de tener necesariamente el mismo número de ecuaciones. Seguimos con el sistema del Ejemplo 3 sobre el que ilustraremos de hecho el algoritmo que describiremos en la próxima sección.

Los siguientes sistemas son equivalentes:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & -2 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 3 \\ 5x_1 & -x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ & -4x_2 & -10x_3 & +2x_4 & = & 6 \\ & -6x_2 & -11x_3 & +3x_4 & = & -3 \end{array}\right.$$

En el segundo sistema hemos eliminado una variable, la primera (por una simple cuestión de orden) sumando convenientes múltiplos de la primera ecuación a las demás. En realidad, imaginando sistemas enormes, parece más práctico esto que despejar una variable en función de las otras y sustituir a continuación.

Si deseamos continuar actuando igual, para simplificar más en sucesivos sistemas equivalentes, debemos operar igual (pero ojo, no a partir de la primera ecuación, sino de la segunda, para no reintroducir la incógnita x_1):

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ & & -8x_3 & & = & 6 \\ & & -8x_3 & & = & 6 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ & & -8x_3 & & = & 6 \end{array}\right.$$

[1] Habrá ocasiones en que debamos usar el cuerpo de los números complejos. Si los $a_{ij} \in \mathbb{C}$, (1.1) puede transformarse separando partes real e imaginaria en un sistema de coeficientes, incógnitas y términos independientes reales con doble número de ecuaciones y de incógnitas que el sistema inicial.

Como advertíamos antes, todos estos sistemas son equivalentes entre sí, sin embargo el último consta sólo de tres ecuaciones (pues la cuarta era redundante).

Apoyados en el ejemplo, es conveniente hacer un par de observaciones respecto a la notación:

Por claridad y para evitar equívocos, es aconsejable escribir siempre las incógnitas en el mismo orden y ordenadas en columnas, es decir, dejar un hueco(s) si no aparece(n).

Realmente las transformaciones hechas, si somos ordenados en el sentido anterior, sólo requieren los coeficientes, y no las propias variables o incógnitas x_1, $x_2 \ldots$ lo que nos lleva a introducir la notación matricial para sistemas generales de ecuaciones lineales del siguiente modo:

Definición 5. *La* **matriz del sistema** *dado (o* **matriz ampliada***) es el conjunto formado por los $m \times (n+1)$ números que se obtiene al escribir los coeficientes y los términos independientes, ordenadamente por filas y columnas, en la forma:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

La matriz que resulta de eliminar la última columna de los términos independientes se llama **matriz de los coeficientes** *del sistema. (En general, se suele denotar A y $(A|b)$ a la matriz de coeficientes y la matriz ampliada respectivamente.)*

Es fácil comprobar que las siguientes transformaciones (nombradas ya antes, pero introducidas ahora notacionalmente) que denominaremos **elementales**, efectuadas sobre la matriz de un sistema nos conducen a otro sistema equivalente:

1. F_{ij} : Intercambiar el orden de las filas i, j (equivale a cambiar el orden de dichas ecuaciones).

2. $F_i(\alpha)$: Multiplicar la fila i por el escalar $\alpha \neq 0$ (equivalente a multiplicar la ecuación i-ésima por el escalar α no nulo).

3. $F_{ij}(\alpha)$: Sumar a la fila i la fila j multiplicada por el escalar α (equivalente a sumar a la ecuación i-ésima un múltiplo de la ecuación j-ésima).

Aunque sólo sea para identificar, repasar y corregir las transformaciones realizadas, es aconsejable seguir éstas (o cualquier otro conjunto de) reglas notacionales.

A pesar de que se sale de los objetivos de este curso, nótamos que estas indicaciones son útiles para obtener factorizaciones matriciales del sistema, y por ello una notación frencuente en la literatura. Sin embargo, y por simplicidad, nosotros usaremos solamente F_i para denotar la ecuación $i-$ésima.

1.2. Método de eliminación de Gauss

Basados en el ejemplo anterior, describimos ahora los pasos teóricos que conforman el citado método. Es una forma directa para llegar en un número finito de pasos a un sistema equivalente pero más simple, tal que en las ecuaciones vayan apareciendo menos variables, tal y como se describe a continuación:

Definición 6. *Un sistema de ecuaciones lineales se denomina* **escalonado** *(o* **reducido***) si la matriz del sistema verifica que:*

1. *Todos los elementos por debajo de los a_{ii} para $i = 1, 2, \cdots, n$ son nulos.*
2. *El primer elemento no nulo de cada fila, llamado* **pivote***, está a la derecha del primer elemento diferente de cero (pivote) de la fila anterior.*
3. *Cualquier fila formada únicamente por ceros está bajo todas las filas con elementos diferentes de cero.*

En tal caso, la matriz se dice **matriz reducida.**

El **método de eliminación de Gauss** consiste utilizar transformaciones elementales sobre la matriz del sistema para generar otro equivalente que sea escalonado. Los sucesivos pasos de este proceso (no todos necesarios en la práctica, como ya hemos visto) son:

1. Localizamos en la primera columna no nula, de la matriz del sistema, el primer elemento no nulo a.
2. Intercambiamos la primera fila con la fila en la que se encuentra a.
3. Multiplicamos la primera fila por a^{-1}.
4. Sumando múltiplos adecuados de la primera fila a las demás, anulamos todos los elementos de la primera columna no nula menos el primero.
5. Repetimos el proceso, con la matriz que resulta de eliminar la primera fila y la primera columna, hasta conseguir un sistema escalonado.

En algunos casos podemos ahorrarnos cálculos no siguiendo a rajatabla los pasos del proceso explicado. Por ejemplo, si, para alguna fila, en la primera columna no nula hay un **uno** conviene, en el primer paso, tomar a como dicho elemento, pues así nos ahorraremos el paso tercero. Esto nos permite afirmar que dado un sistema, el sistema escalonado obtenido a partir de él no es único, aunque si hay ciertas características que son comunes a todos ellos, a saber:

- El número de filas no nulas (número de ecuaciones “independientes” que tiene el sistema; coincide con el número de pivotes).
- El pivote de cada fila está situado siempre en la misma columna.

Resolución del sistema escalonado. Clasificación de un sistema de ecuaciones lineales

A la hora de tratar el sistema reducido, es fácil analizar la siguiente casuística con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales:

Puede que haya o no solución. Atendiendo a ello, los sistemas lineales se clasifican en **compatibles (S.C.)** e **incompatibles (S.I.)** respectivamente. Otra división, en el caso de que exista solución, y que se presenta en la práctica, es que haya una única solución o más de una (en cuyo caso habrá infinitas soluciones), lo que denotaremos por **sistema compatible determinado (S.C.D.)** o **sistema compatible indeterminado (S.C.I.)** respectivamente.

Notemos que los sistemas homogéneos tienen siempre, al menos, la solución $(0, 0, \ldots, 0)$ que recibe el nombre de solución trivial, por ello siempre son compatibles.

Volvamos una vez más sobre el ejemplo de partida (sobre el sistema escalonado, también se llama sistema en cascada):

$$\left\{\begin{array}{ccccrr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ & & -8x_3 & & = & 6 \end{array}\right.$$

Resulta natural comenzar resolviendo primero la tercera ecuación:

$$x_3 = -\frac{3}{4}.$$

Comprobamos que la ecuación segunda queda indeterminada salvo que elijamos darle un valor arbitrario a una de las variables, lo que sí determina la otra:

$$x_4 = \alpha \quad \Rightarrow \quad -2x_2 = -3 + x_3 - x_4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{15}{8} + \frac{\alpha}{2},$$

y ahora sí conseguimos también despejar sin problema la incógnita x_1 :

$$x_1 = 1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = \frac{11}{8} + \frac{\alpha}{2}.$$

Hemos resuelto el problema por sustitución regresiva.

Damos algunas explicaciones teóricas sobre el proceso realizado antes para su descripción y uso general:

De forma natural separamos las incógnitas de nuestro sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en dos grupos, aquéllas que corresponden a columnas con pivotes (recuérdese punto 2 de la Definición 6), que llamaremos **incógnitas básicas** y las restantes, correspondientes a las columnas sin pivotes, que llamaremos **incógnitas libres**. Al número de incógnitas libres se le denomina número de **grados de libertad** del sistema (x_4 era la incógnita libre y grado de libertad en el sistema anterior).

En el sistema escalonado puede ocurrir entonces lo siguiente:

1. Aparece una fila al menos, en la matriz del sistema, que tiene todos los elementos nulos salvo el último (es decir hay alguna ecuación de la forma $0 = b$ con $b \neq 0$). En dicho caso el sistema escalonado, y por tanto el inicial (1.1), son incompatibles.

2. En caso contrario el sistema (1.1) es compatible.

   a) Si el número de pivotes coincide con el de incógnitas, es decir, no hay incógnitas libres, el sistema tiene solución única (sistema compatible determinado), y ésta se obtiene por sustitución regresiva empezando por la última ecuación hasta llegar a la primera.

b) Si el número de pivotes es menor que el de incógnitas, es decir, hay incógnitas libres, el sistema tiene infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado). En este caso las soluciones se obtienen dando valores arbitrarios a las incógnitas libres y poniendo las incógnitas básicas, por sustitución regresiva, en función de dichos valores arbitrarios.

Nota: Aunque la profundización sobre el lenguaje matricial corresponde a un tema posterior, podemos, a partir de las observaciones anteriores y previa definición del rango de una matriz, enunciar y comprender el Teorema de Rouché-Fröbenius.

En esencia el Método de Gauss se queda con las ecuaciones indispensables para obtener un sistema equivalente quitando las restantes, que son “combinaciones” (lineales, aunque no definamos con propiedad el término hasta la próxima sección) de las anteriores. Así, el **rango (rg) de una matriz** es el número de filas con pivotes tras aplicar el Método de Eliminación de Gauss.

Teorema 7 (Rouché-Fröbenius). *El sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$ admite solución si y sólo si los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada coinciden:* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.

En tal caso, si $\mathrm{rg}(A) = n$, *el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado; de lo contrario, si* $\mathrm{rg}(A) < n$, *el sistema es compatible indeterminado y tiene* $n - \mathrm{rg}(A)$ *grados de libertad.*

El resultado anterior simplemente compara el rango de las matrices A y $(A|b)$, que son iguales a los rangos de las matrices transformadas por el Método de Gauss. Las tesis del teorema es otra forma de escribir lo citado en los párrafos previos respecto a la resolución el sistema.

Nota: Es frecuente que al aplicar modelos conocidos a fenómenos reales algunos de los términos que intervienen en esas leyes sean indeterminados. Cuando se trata de sistemas de ecuaciones en los cuales ciertos coeficientes o términos independientes no tienen un valor fijo predeterminado, sino que son parámetros, es sensato que se nos pida estudiar el sistema para todos los valores posibles de dichos parámetros (**discutir el sistema**).

La forma más eficiente de tratar el problema (aun cuando se sepa calcular el rango via determinantes) es recurrir a la técnica de eliminación gaussiana hasta simplificar lo máximo posible el sistema y retrasar el análisis a las filas donde inevitablemente los pivotes incluyen ya parámetros, según sus distintos valores.

1.3. Espacio vectorial. Propiedades

En cualquier sistema lógico matemático es importante tener bien establecidas ciertas reglas (de operación) sobre un conjunto con las que poder “jugar” (operar) sin salirnos del propio conjunto.

Los espacios vectoriales son una muestra de ello, y en el caso de dimensión finita, que será lo que trataremos en este curso, lo podremos ver simplemente como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales (a esta conclusión llegaremos propiamente al final del tema). Teniendo esto en mente, igual que antes manipulamos ecuaciones (el conjunto ordenado de los coeficientes de cada una de ellas, más exactamente) sumando unas con múltiplos de otras, no resultará extraño las operaciones que se definen a continuación, ya sea entre los elementos del espacio vectorial propiamente, o bien el producto por escalares[2].

Recordemos que un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo siempre es compatible. En el caso de que haya infinitas soluciones, es obvio que deberíamos intentar manipular dicho conjunto de un modo más efectivo, por ejemplo, si se nos permite la expresión, *en base* a los grados de libertad.

Profundizar en su estructura, saber manejar espacios vectoriales dentro de un espacio mayor a través de sus sistemas de ecuaciones, relaciones entre ellos (sumas e intersecciones), o dar conjuntos básicos de elementos que, de algún modo, permitan obtener todas las soluciones (los elementos de ese espacio) es el objetivo de esta segunda parte del tema.

Finalmente, notamos que es recomendable por parte del estudiante para su comprensión, la visualización en $\mathbb{R}^3$, el espacio físico usual, de los espacios vectoriales propios: rectas y planos que pasan por el origen (estamos con sistemas homogéneos, y no con espacios afines). Así, aunque ambos tengan infinitos puntos, intuimos que basta dar "un elemento director" para definir una recta cualquiera, y un par de ellos para dar un plano. Pasamos ya a analizar con rigor los elementos que completan el tema.

Definición 8. *Sea V un conjunto dotado de una operación interna* "$+$" $: V \times V \to V$, *que llamaremos* **suma**, *y sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo que define sobre V una operación externa* "$\cdot$" $: \mathbb{K} \times V \to V$, *que llamaremos* **producto por escalares**.

Diremos que $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ *es un* **espacio vectorial (e.v.) sobre** $\mathbb{K}$, *respecto de las operaciones* **suma** *y* **producto por escalares** *si se verifican las siguientes condiciones:*

1. $(V,\ +)$ *es un grupo conmutativo (es decir, satisface las propiedades conmutativa, asociativa, existencia de elemento neutro, y simétrico de cualquier elemento dado).*

2. *El producto por escalares cumple:*

   2.1 $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \quad \forall\, \vec{a} \in V,$

   2.2 $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a} \quad \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall\, \vec{a} \in V,$

   2.3 $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha \cdot \vec{a}) + (\alpha \cdot \vec{b}) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, \vec{a},\ \vec{b} \in V,$

   2.4 $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot \vec{a}) + (\beta \cdot \vec{a}) \quad \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall\, \vec{a} \in V.$

Los elementos de V se denominan **vectores**.

Aunque la suma de vectores y la de escalares son operaciones distintas, por comodidad se representan por el mismo signo. Igualmente omitimos el (.) del producto interno en $\mathbb{K}$. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el espacio vectorial se dice **real**, y cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, el espacio vectorial se llama **complejo**.

Se pueden obtener fácilmente las siguientes propiedades:

1. $\forall \vec{a} \in V : 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}.$

[2] En general, denotaremos por $\mathbb{K}$ el cuerpo escalar con que trabajemos; normalmente será el de los números reales, $\mathbb{R}$, aunque ocasionalmente puede ser conveniente recurrir al de los números complejos, $\mathbb{C}$.

2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \cdot \vec{0} \;=\; \vec{0}$.

3. $\forall \vec{a} \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : -(\alpha \cdot \vec{a}) \;=\; (-\alpha) \cdot \vec{a} \;=\; \alpha \cdot (-\vec{a})$.

Es usual trabajar dentro de un espacio ambiente y manipular un conjunto "más pequeño", y que también querríamos que fuese "cerrado" (autocontenido) para las operaciones anteriores: es lo que se entiende por un subespacio (vectorial).

Definición 9 (Subespacio vectorial). *Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y F una parte no vacía de V, se dice que F es* **subespacio vectorial (s.e.v.)** *de V, si las restricciones a F de las dos operaciones de V, dotan a F de una estructura de espacio vectorial, es decir si:*

1. *$(F, +)$ es subgrupo de $(V, +)$ [esto es: dados $(\vec{a}, \vec{b} \in F \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} \in F)$]*

2. *$\alpha \in \mathbb{K},\ \vec{a} \in F \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in F$*

   Observaciones:

   - Una forma sencilla de caracterizar subespacios vectoriales es la siguiente: Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y sea F una parte no vacía de V. Entonces F es subespacio vectorial de V si y sólo si:
   $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in F \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} \in F$$

   - El vector nulo $\vec{0}$ pertenece a todos los subespacios de un espacio V.

   - En cualquier espacio vectorial V hay trivialmente dos subespacios vectoriales: el conjunto formado exclusivamente por el vector nulo, $\{\vec{0}\}$, que se llamará **subespacio nulo,** y el mismo espacio V. Los demás subespacios de V, distintos de V y $\{\vec{0}\}$, se llaman **subespacios propios.**

Ejemplo 10. *Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el sistema homogéneo de ecuaciones lineales*
$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +y & & = 0, \\ x & -y & -z & = 0. \end{array} \right.$$

Es inmediato comprobar que se trata de un sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones: $H = \{(\alpha, -\alpha, 2\alpha)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Podemos comprobar que las ternas de H forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, esto es, la suma de dos soluciones cualesquiera $(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1)$, $(\alpha_2, -\alpha_2, 2\alpha_2)$ genera otro elemento de H, $(\alpha_3, -\alpha_3, 2\alpha_3)$, siendo $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, y lo mismo si multiplicamos una solución $(\alpha, -\alpha, 2\alpha)$ por un escalar $k : (k\alpha, -k\alpha, 2k\alpha)$ (ojo, esto es porque los términos independientes del sistema son todos nulos).

De hecho, lo mismo ocurre con el conjunto de $n-$uplas soluciones de cualquier sistema homogéneo de ecuaciones lineales planteado en $\mathbb{R}^n$. [Al final del tema veremos el recíproco: todos los espacios vectoriales "de dimensión finita" se escriben como soluciones de un sistema lineal homogéneo.]

Intersección y suma de subespacios

Resulta natural (y útil en el futuro) operar entre subespacios vectoriales. Definimos las dos que dan título a este parágrafo, aunque su interpretación es obvia, y veremos cómo se plasma ello en un ejemplo concreto.

Definición 11 (Intersección de subespacios vectoriales). *Sea* $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un espacio vectorial. Se define la* **intersección** ($\cap$) *de dos subespacios vectoriales U y W de V, como el subconjunto de V que verifica:*

$$\vec{a} \in U \cap W \iff [\vec{a} \in U \quad \text{y} \quad \vec{a} \in W]$$

Teorema 12. *La intersección de un número cualquiera de subespacios vectoriales de un espacio vectorial V es, a su vez, un subespacio vectorial de V.*

El resultado anterior es obvio: si dos elementos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ pertenecen a la intersección de los subespacios vectoriales, es decir, están en todos ellos, entonces, dados dos escalares α y β, el elemento $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ también está en todos los subespacios vectoriales, y por tanto en la intersección, con lo que por la caracterización dada en una observación previa termina la prueba.

Ejemplo 13. *Supongamos dos subespacios vectoriales, los generados en* $\mathbb{R}^4$ *por los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:*

$$H \left\{ \begin{array}{ccccl} x_1 & -x_2 & -x_3 & & = 0, \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0, \end{array} \right. \qquad U \left\{ \begin{array}{ccccl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & & = 0, \\ x_1 & -3x_2 & & -x_4 & = 0. \end{array} \right.$$

Si queremos considerar los elementos de $\mathbb{R}^4$ *que pertenecen tanto a H como a U, siendo estos subespacios dados por sendos sistemas, simplemente debemos escribir juntas todas las ecuaciones:*

$$H \cap U \left\{ \begin{array}{ccccl} x_1 & -x_2 & -x_3 & & = 0, \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0, \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & & = 0, \\ x_1 & -3x_2 & & -x_4 & = 0. \end{array} \right.$$

Es recomendable reducir a un sistema equivalente para eliminar las posibles ecuaciones "falsas" (redundantes) que aparezcan tras unir las de los dos sistemas previos (es decir, las que sean combinación lineal de las demás). Recordemos que la forma reducida de la matriz de coeficientes se obtenía por el Método de Gauss. Cuando se trata de sistemas homogéneos, es vano (y por tanto no lo haremos) arrastrar en la notación la columna de ceros que forman los términos independientes. Una posible forma reducida es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \Rightarrow \\ F_2 \rightleftarrows F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ F_3 - F_2 \\ F_4 - 2F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, un sistema que define $H \cap U$ es

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & & = 0, \\ & -x_2 & & & = 0, \\ & & x_3 & -x_4 & = 0. \end{cases}$$

Dejando la variable x_4 como grado de libertad:

$$U \cap H = \{(\alpha, 0, \alpha, \alpha)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 0, 1, 1)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

que también denotaremos por $U \cap H = \langle (1, 0, 1, 1) \rangle$.

Sería natural preguntarse: dado que la intersección de subespacios vectoriales es s.e.v., ¿lo será también la unión? Un instante de reflexión nos lleva a matizar la pregunta, pues, por ejemplo, dos rectas que se cortan pero no son coincidentes, deberían generar... el propio plano que las contiene, y eso no se consigue tomando simplemente la unión. En general, la unión de subespacios de un espacio vectorial V no es un subespacio de V. Debemos afinar más:

Definición 14 (Suma de subespacios). *Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ y sean U_1 y U_2 dos subespacios de V. Se llama suma de U_1 y U_2 al conjunto:*

$$U_1 \ +\ U_2 \ =\ \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid \vec{u}_1 \in U_1,\ \vec{u}_2 \in U_2\}$$

El siguiente resultado es inmediato por la propia definición de s.e.v.:

Teorema 15. *El conjunto $U_1 + U_2$ es un subespacio de V; es más, se trata del menor de todos los subespacios que contienen a U_1 y U_2.*

Ejemplo 16. *Ya vimos en el ejemplo anterior una forma simple de dar un subespacio vectorial en $\mathbb{R}^4$: $U_1 = \langle (1, 0, 1, 1) \rangle = \{\alpha(1, 0, 1, 1)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si tenemos otro s.e.v. $U_2 = \langle (1, 2, 1, -1) \rangle = \{\beta(1, 2, 1, -1)\ ,\ \beta \in \mathbb{R}\}$, es claro, siguiendo la definición constructiva anterior, que*

$$U_1 + U_2 = \{\alpha(1, 0, 1, 1) + \beta(1, 2, 1, -1)\ ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

que también denotaremos por $\langle (1, 0, 1, 1), (1, 2, 1, -1) \rangle$.

Si nos dan uno o dos s.e.v. con ecuaciones, no podemos unir las ecuaciones para generar el espacio suma (eso sería el espacio intersección). Habría que obtener vectores que generen ambos s.e.v. como se ha visto antes. Más adelante tratamos dicha cuestión.

Otra relación entre subespacios vectoriales que debemos resaltar es cuándo podemos "dividir" un s.e.v. dado como suma de dos, pero de forma óptima, es decir, sin repetir elementos en ambos conjuntos (salvo el cero, claro, que siempre pertenece a cualquier subespacio). Esto es importante a la hora de generar aproximaciones desde un s.e.v. dado, y lo desarrollaremos más adelante, cuando tratemos los espacios euclídeos (Tema 2).

Definición 17 (Suma directa). *Sean U_1 y U_2 subespacios de un espacio vectorial $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ y sea $L \subseteq V$, decimos que L es* **suma directa** *de U_1 y U_2, lo que se denotamos $L = U_1 \oplus U_2$, si se verifica que $L = U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$.*

Si $L = V$, a los subespacios U_1 y U_2 se les denominan subespacios suplementarios.

Ejemplo 18. *En el Ejemplo 13 teníamos un s.e.v. de* $\mathbb{R}^4$,

$$H \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & -x_3 & & = 0, \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0, \end{array} \right.$$

y un subespacio contenido en él:

$$H \cap U \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & -x_3 & & = 0, \\ & -x_2 & & & = 0, \\ & & x_3 & -x_4 & = 0, \end{array} \right.$$

que podíamos dar explícitamente como el conjunto

$$U \cap H = \{(\alpha, 0, \alpha, \alpha)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 0, 1, 1)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 0, 1, 1)\rangle.$$

Así, si queremos descomponer H *como suma directa de* $U \cap H$ *y otro subespacio, basta con describir* H *no a través de sus ecuaciones, sino de sus soluciones.*

Podemos resolver el sistema que define H *dejando* x_3 *y* x_4 *como grados de libertad.*

$$H \left\{ \begin{array}{rrrr} x_1 & -x_2 & = x_3, & \\ & x_2 & = x_3 & -x_4. \end{array} \right.$$

Así pues todas las soluciones son de la forma $(2\alpha - \beta, \alpha - \beta, \alpha, \beta)$, *con* α, $\beta \in \mathbb{R}$. *Esto es, cualquier elemento de la forma* $\alpha(2, 1, 1, 0) + \beta(-1, -1, 0, 1)$.

Dado que $U \cap H$ *viene determinado con un grado de libertad, todos los vectores proporcionales a* $(1, 0, 1, 1)$ *(no hay que extrañarse porque ese vector no corresponda con* $(2, 1, 1, 0)$ *ni con* $(-1, -1, 0, 1)$, *obsérvese que es la suma de ambos), resulta natural intentar "completar" dicho vector con, al menos, algún otro que permita obtener todos los* α *y* β *posibles de las soluciones de* H.

En la siguiente sección presentamos con rigor las propiedades que permiten completar lo iniciado aquí. Por ahora, baste decir que, por ejemplo, una elección del tipo $(\mathtt{x}, \mathtt{x}, 1, 0)$ *permite buscar solución en* H *que seguro no es proporcional a* $(1, 0, 1, 1)$, *y construir junto con el vector* $(1, 0, 1, 1)$ *todos los posibles* $(\mathtt{x}, \mathtt{x}, \alpha, \beta)$ *de* H. *En este caso pues* $H = \langle(2, 1, 1, 0)\rangle \oplus \langle(1, 0, 1, 1)\rangle$, *ya que claramente ambos subespacios vectoriales generan* H *y sólo tienen en común el elemento nulo.*

1.4. Subespacios vectoriales. Dependencia e independencia lineal

Hemos acabado la sección previa con un ejemplo en el que vemos que conjuntos con infinitos elementos pueden ser representados como expresiones simples de algunos elementos, a saber, sumas de ciertos vectores multiplicados por escalares.

Surge por tanto de forma natural la necesidad de dar con rigor una definición de combinación de vectores, de establecer el número mínimo de elementos necesarios para construir un espacio vectorial usando ese concepto, y de distinguir cuándo en una lista dada de elementos algunos resultan redundantes para construir un espacio (igual que sobraban algunas ecuaciones en los sistemas para poder describirlos de modo equivalente).

Discutiremos pues aquí los conceptos de **combinación lineal, rango de un conjunto de vectores, sistema generador y base**. Uno puede imaginar que dispone de "ladrillos" para construir "muros". Más que mirar un "muro" observamos los ladrillos utilizados, como elementos básicos de la construcción: ¿cuántos tipos distintos hemos usado? Asimismo, si tenemos, digamos, tres tipos de ladrillos distintos, pero los del tipo C pueden construirse a partir de los del tipo A y B mezclados adecuadamente, es claro que cualquier muro con esos tres tipos de elementos se puede construir usando exclusivamente de los dos primeros tipos, es lo que entendemos de forma natural por elementos básicos, y lo que diferenciará sencillamente un sistema generador (arbitrariamente grande) de una base (lo mínimo indispensable).

Todo se reducirá a calcular las soluciones de sistemas lineales homogéneos y/o a obtener la forma reducida de una matriz por el Método de Eliminación de Gauss, herramientas tratadas con anterioridad.

Definición 19 (Combinación lineal). *Sea* $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un espacio vectorial. Se llama* **combinación lineal (c.l.)** *de los vectores* $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, ...,\ \vec{v}_p\ \in V$ *a todo vector* $\vec{x}$ *de* V *de la forma:*

$$\vec{x}\ =\ \lambda_1\vec{v}_1\ +\ \lambda_2\vec{v}_2\ +\ ...\ +\ \lambda_p\ \vec{v}_p, \quad \textit{con}\ \lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_p\ \in \mathbb{K}.$$

Definición 20 (Subespacio vectorial generado por un conjunto de vectores). *Consideremos* $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un espacio vectorial y sea* $H = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \subset V$.

Al subconjunto $U = \{\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_p\vec{v}_p \quad | \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}$ *se le denomina* **variedad lineal generada por el conjunto H**. *Se suele denotar por* $L(H)$ *o* $\langle H \rangle$ *(esta última notación ya se usó al final del Ejemplo 13).*

Es inmediato que U es un subespacio vectorial de V. Recibe el nombre de subespacio vectorial **generado** (o engendrado) por $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ ...,\ \vec{v}_p\}$, y vemos que $U = \langle\vec{v}_1\rangle + \cdots + \langle\vec{v}_p\rangle$..

Se verifican las siguientes propiedades (las tres últimas son meras relaciones conjuntistas, inmediatas de comprobar):

1. $L(L(H))\ =\ L(H)$ (un s.e.v. es cerrado para las combinaciones lineales, esto es, no se obtienen más elementos nuevos.)

2. $H\ \subset\ L(H)$.

3. $H\ \subset\ H' \ \Rightarrow\ L(H)\ \subset\ L(H')$.

4. $L(H\ \cap\ H')\ \subset\ L(H)\ \cap\ L(H')\ \subset\ L(H)\ \cup\ L(H')\ \subset\ L(H\ \cup\ H')$.

Independencia lineal. Sistemas generadores

Los siguientes conceptos hacen referencia a cuándo un conjunto de vectores "esconden" alguna relación lineal entre ellos, a lo que hacíamos referencia con el símil del ladrillo tipo C que se podía construir con los de tipo A y B, por lo que no aportaba nada nuevo a la construcción de "muros".

Definición 21 (Dependencia e independencia lineal). *Sea* $H = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, ...,\ \vec{v}_p\}$ *un sistema de vectores de un espacio vectorial* V *sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$.

- *Se dice que H es un sistema* **linealmente dependiente (l.d.)** *o sistema* **ligado** *si existen algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, no todos nulos, tal que $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+...+\lambda_p\vec{v}_p = \vec{0}$.*
  Esto implica que al menos un vector se puede expresar como c.l. de los otros. Se dice entonces que ese vector **depende linealmente** *de éstos.*

- *Se dice que H es un sistema* **linealmente independiente (l.i.)** *o sistema* **libre**, *si no son linealmente dependientes, es decir, si la única combinación lineal de ellos que vale $\vec{0}$ es la que tiene todos sus coeficientes nulos:*

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+...+\lambda_p\vec{v}_p = \vec{0} \\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\lambda_p \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0.$$

Propiedades

1. El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier familia de vectores. Por tanto, Si un sistema contiene al vector nulo, entonces el sistema es linealmente dependiente.

2. Un sistema de vectores es l.d. si y sólo si alguno de sus vectores depende linealmente de los demás. Por tanto, si $\vec{u} \neq \vec{0}$, entonces el sistema $S = \{\vec{u}\}$ es l.i. Un sistema de dos vectores $\{\vec{u},\ \vec{v}\}$ es l.d. si y sólo si uno de ellos es proporcional al otro.

3. Si un sistema S de vectores es l.d., entonces también lo es cualquier sistema que resulte de añadir algún vector a S.

4. El espacio vectorial generado por un conjunto de vectores l.d. es el mismo que el que resulta de eliminar de dicho conjunto a un vector que sea combinación lineal de los demás.

   Por ejemplo, consideremos un sistema formado por tres vectores: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ que cumple que $\vec{v}_3 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$. Tenemos que

$$\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\rangle = \{\gamma_1\vec{v}_1 + \gamma_2\vec{v}_2 + \gamma_3\vec{v}_3 \quad | \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}\}.$$

   Por la relación que satisface $\vec{v}_3$, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\rangle &= \{\gamma_1\vec{v}_1 + \gamma_2\vec{v}_2 + \gamma_3(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) \quad | \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\gamma_1 + \gamma_3\alpha)\vec{v}_1 + (\gamma_2 + \gamma_3\beta)\vec{v}_2 \quad | \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\delta_1\vec{v}_1 + \delta_2\vec{v}_2 \quad | \quad \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}\} = \langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle. \end{aligned}$$

5. Si un sistema S de vectores es l.i., entonces también lo es cualquier sistema que resulte de prescindir de alguno de los vectores de S.

Definición 22 (Sistema generador de un espacio o subespacio vectorial). *Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial. Se dice que los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...,\ \vec{v}_p\}$ de L son un* **sistema generador (s.g.)** *del subespacio vectorial L si todo vector de L es combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$.*

[Cuando definimos un espacio vectorial H a través de la variedad lineal engendrada por un conjunto $S = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$, esto es $H = \langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$, entonces S es un s.g. de H.]

Dado que hemos introducido en esta sección los conceptos de sistema generador y de (in)dependencia lineal, resulta natural preguntarse sobre la relación entre ambos. En la próxima sección vemos el caso óptimo (será el concepto de base: un sistema generador formado por vectores l.i.); por ahora avanzamos un resultado previo relacionado con la cuestión.

Intuitivamente se puede leer como sigue: si un espacio vectorial tiene por sistema generador un conjunto finito de elementos (digamos n, es decir, cualquier otro vector que escojamos se expresa como combinación lineal de estos n elementos), si bien es obvio que hay infinitos sistemas generadores, el número de elementos que lo componen limita la cantidad máxima de vectores l.i. que podemos tener en dicho subespacio. Expresado con rigor, se tiene el siguiente

Teorema 23 (T. Fundamental de la independencia lineal). *Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial generado por un cierto sistema $G = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\}$. Si $I = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_h\}$ es un sistema de vectores l.i., entonces se verifica que $h \leq p$.*

Demostración: podemos suponer sin pérdida de generalidad que el sistema G está formado por vectores l.i. (si no, tomaríamos primero un vector, luego dos, etc. hasta tener un subconjunto de G que fuese l.i. y s.g.).

Veamos que cualquier sistema I con al menos $p+1$ vectores ha de ser l.d. Suponemos que los p primeros vectores son l.i. (caso contrario habríamos terminado). Veamos que el último es combinación lineal de los anteriores.

Por ser G s.g., existen escalares α_{ij} $(i, j = 1, \ldots, p)$ tales que $\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \vec{u}_j$. Por otro lado, si $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^{p}$ son l.i., eso significa que cualquier combinación lineal $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ obliga a tomar $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \ldots, p$. Con las expresiones que tenemos de $\vec{v}_i$ en términos de G, la igualdad anterior se traduce en que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \vec{u}_j = \vec{0}$ tiene por única posible solución $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \ldots, p$.

Como G está formado por elementos l.i., realmente se llega a que el coeficiente que afecta a cada $\vec{u}_j$ ha de ser también nulo. Uniendo ambas cosas deducimos que el sistema

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1p} & \ldots & \alpha_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es compatible determinado: tiene únicamente la solución nula. Eso implica que realmente la matriz de los coeficientes es invertible, o dicho de otro modo, establece una biyección en $\mathbb{R}^p$ entre cualesquiera coeficientes que tuvieran los $\vec{u}_i$ y los de $\vec{v}_i$. Así, al ser $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^{p}$ s.g., el conjunto $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^{p}$ también lo es, con lo que cualquier otro elemento (p.ej. $\vec{v}_{p+1}$) es c.l. de los anteriores, como queríamos probar.

1.5. Base de un espacio vectorial. Coordenadas de un vector. Cambio de base

Como anticipábamos en ejemplos anteriores, decir que el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal, homogéneo y compatible indeterminado forma un espacio vectorial con infinitos elementos es "poco satisfactorio". Dar un sistema generador ("ladrillos") en función de los grados de libertad es una respuesta más reducida y eficiente. ¿Es óptima? Si el sistema generador está formado por vectores l.i., sí, ya que no hace falta añadir ni es posible eliminar ningún vector, por lo que merece un nombre especial.

Definición 24 (Base de un espacio o subespacio vectorial). *Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial. Diremos que el sistema $H = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\} \subset L$ es una* **base** *de L si es sistema generador de L y son linealmente independientes.*

En el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$, con $\mathbb{K}$ cuerpo, la elección más simple de un sistema generador es la siguiente:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, ..., 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\ ...,\ \vec{e}_n = (0, 0, ..., 1).$$

De hecho, es obvio que forman un sistema l.i., por lo que constituyen una base, que se llama **base canónica** de $\mathbb{K}^n$.

Ya utilizamos el siguiente resultado implícitamente en la prueba del Teorema 23. Lo enunciamos ahora con rigor tras la introducción del concepto de base.

Teorema 25 (Teorema de existencia de la Base). *Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de tipo finito (es decir, generado por un conjunto finito de vectores) y sea $L \subseteq V,\ L \neq \{\vec{0}\}$, subespacio vectorial. Cualquier sistema generador de L incluye una base. En consecuencia, todo subespacio vectorial de tipo finito posee alguna base.*

Al menos de forma teórica[3] la prueba es obvia: comenzamos tomando un elemento del sistema generador que sea no nulo, y vamos recorriendo los elementos de dicho conjunto, añadiendo los que sean l.i. a los ya tomados. En un número finito de pasos hemos concluido, pues tenemos un conjunto l.i. que sigue siendo sistema generador de L (recuérdese la propiedad 4 citada en la página 13).

Ejemplo 26. *Recordamos que en los ejemplos 13 y 18 habíamos introducido y manipulado el s.e.v. de $\mathbb{R}^4$,*

$$H \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & -x_3 & & = 0, \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0, \end{array} \right.$$

La forma de obtener una base a partir de un sistema es clara: reducimos por Gauss el sistema hasta poder conocer los grados de libertad que tiene, y resolvemos. En este caso eran dos los grados de libertad (será la dimensión del s.e.v.) teníamos que las soluciones eran de la forma $\{\alpha(2, 1, 1, 0) + \beta(-1, -1, 0, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Así, una base es $\{(2, 1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}$. (Obsérvese que la base corresponde a resolver el sistema para los valores concretos de los grados de libertad 0 y 1 primero, y 1 y 0 después, que es la forma más simple de asegurar, gracias a esos valores, la independencia lineal de esos vectores entre sí).

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 23:

Teorema 27 (Teorema de la dimensión). *Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de tipo finito y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial. Todas las bases de L tienen igual número de vectores. A este número se le llama* **dimensión** *del subespacio L y se representa por $dim(L)$.*

[3] Más adelante tratamos la resolución efectiva de este problema: cálculo del rango de un sistema de vectores por el Método de Gauss.

Por cuestiones técnicas, se conviene en decir que el espacio vectorial formado por el vector $\{\vec{0}\}$ tiene dimensión 0.

La dimensión, como hemos visto en el ejemplo precedente, se puede calcular para un sistema de ecuaciones a través de los grados de libertad del sistema equivalente reducido tras aplicar el Método de Gauss.

Cuando un s.e.v. venga dado a través de un sistema generador, para quedarnos con el número óptimo de elementos (una base, un conjunto máximo de ellos que sean l.i.) necesitaremos recurrir de nuevo al Método de Gauss. Más exactamente:

Definición 28 (Rango de un conjunto finito de vectores). *Se llama* **rango** *de un sistema S con un número finito de vectores de un cierto espacio vectorial V, y se denota por $rg(S)$, a la dimensión del subespacio que engendra S (así $rg(S) = dim(L(S))$).*

Dicho de otro modo, el rango de S es el número máximo de vectores l.i. que podemos tomar de dicho sistema.

En consecuencia, la familia $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\}$ es l.i. si y sólo si su rango es igual al número p de vectores que lo forman. Además, en un espacio vectorial de dimensión finita n, un sistema de vectores es generador si y sólo si su rango es n.

¿Cómo calcularlo? Dados un conjunto de vectores en cierto espacio $\mathbb{R}^n$ (en la última sección justificaremos porqué siempre trabajaremos en tales espacios), los colocamos uno debajo de otro y a la matriz resultante le aplicamos el Método de Gauss. El motivo es obvio: en el fondo es lo mismo que imaginar un sistema de ecuaciones a transformar en otro equivalente sin las ecuaciones "falsas" (las que ya están "contenidas" en las otras, siendo combinación lineal de éstas). Cuando llegamos a la forma reducida, como en cada columna los elementos por debajo del pivote son nulos, ni de ellos se pueden generar los de arriba, ni al contrario. El número de pivotes (las filas no idénticamente nulas) nos da el rango. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 29. *Consideramos el sistema de vectores de* $\mathbb{R}^4 : H = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \{(1,-1,-1,0), (0,-1,1,-1), (1,-2,-1,0), (1,-3,0,-1)\}$. *[Hemos elegido voluntariamente el sistema cuyas filas constituyen la matriz del Ejemplo 13.] Las transformaciones hasta llegar a la matriz reducida nos llevan a que*

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \\ \vec{v}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 - \vec{v}_1 \\ \vec{v}_4 - \vec{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_3 - \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_4 - \vec{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_3 - \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 - (\vec{v}_3 - \vec{v}_1) \\ \vec{v}_4 - \vec{v}_1 - 2(\vec{v}_3 - \vec{v}_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene las dos últimas filas iguales y así una matriz reducida tendrá una fila de ceros, y las tres primeras filas no idénticamente nulas.

Deducimos por tanto que $\vec{v}_2 - (\vec{v}_3 - \vec{v}_1) = \vec{v}_4 - \vec{v}_1 - 2(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)$, *esto es,* $\vec{v}_4 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ *y por consiguiente obtener una reducción por Gauss con una fila de ceros equivale a tener que el* *sistema H es l.d., $\vec{v}_4$ es c.l. del sistema formado por $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ (también concluimos que los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2\}$ son l.i. pues acabaron generando en la matriz reducida las tres primeras filas, no nulas).*

Análogamente, tener una matriz reducida con pivotes en todos los elementos de la diagonal, es decir, de rango máximo, implica que los vectores formados por las filas[4] *constituyen un sistema l.i. y así de rango máximo (es decir, los conceptos de rango para matrices y sistemas de vectores son consistentes entre si).*

Los siguientes tres resultados aglutinan muchas consecuencias de los teoremas precedentes.

Teorema 30. *Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de tipo finito y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial. Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\}$ un sistema de vectores de L, entonces se verifica que:*

1. *Si S es un sistema generador de L, entonces $dim(L) \leq p$.*
2. *Si S es un sistema l.i., entonces $p \leq dim(L)$.*
3. *Si S es generador de L y $dim(L) = p$, entonces S es base de L.*
4. *Si S es l.i. y $dim(L) = p$, entonces S es base de L.*

Por tanto, la dimensión de un subespacio vectorial L es el número máximo de vectores de L linealmente independientes (añadiendo cualquier otro, ya es combinación lineal de ellos) y el número mínimo de vectores de un sistema generador de L.

Teorema 31 (de Steinitz o de la base incompleta). *Sean $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n y $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ un sistema de vectores l.i. de V, donde $p < n$. Entonces existe algún sistema S' de $n - p$ vectores de V, tal que $S \cup S'$ es una base de V. Es más, los vectores de S' se pueden tomar de entre los de una base cualquiera $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de V.*

La demostración es inmediata: fijada previamente una base cualquiera $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ...,\ \vec{e}_n\}$ de V, consideramos el sistema ampliado $S \cup \{\vec{e}_1\}$. Pueden ocurrir dos cosas: Si sigue siendo un sistema l.i., nos quedamos con este nuevo sistema, y pasamos a repetir la operación añadiendo $\vec{e}_2$ a dicho conjunto. Si por contra $S \cup \{\vec{e}_1\}$ es un sistema l.d., obviamente el responsable es $\vec{e}_1$, con lo cual lo desechamos y continuamos con el sistema S original, y repetimos la operación pero añadiendo ahora $\vec{e}_2$.

A lo sumo, en $n - p$ pasos habremos acabado, pues el sistema final será l.i. y formado por n elementos, luego base también.

El siguiente resultado es útil a la hora de manipular (suma e intersección) subespacios vectoriales.

Teorema 32 (Fórmula de Grassmann). *Si U_1 y U_2 son dos subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, se verifica:*

$$dim(U_1) \ + \ dim(U_2) \ = \ dim(U_1 + U_2) \ + \ dim(U_1 \cap U_2)$$

[4] La "simetría" que supone en última instancia ver en las matrices reducidas sistemas triangulares superiores o inferiores indica realmente que los vectores formados por las columnas también son l.i.

Antes de dar la prueba, obsérvese que al ser el espacio ambiente de dimensión finita, cualquier subespacio suyo también lo es. Podemos, a partir del s.e.v. $U_1 \cap U_2$, ampliar una base suya con elementos de bases de U_1 y de U_2 hasta rellenar respectivamente U_1 y U_2. La forma en que se hace es tomando elementos l.i. (y por tanto generando sumas directas de subespacios) que permiten ver "el siguiente dibujo":

$$U_1 = L \oplus (U_1 \cap U_2), \quad U_2 = W \oplus (U_1 \cap U_2),$$

$$dim(U_1) = dim(L) + dim(U_1 \cap U_2), \quad dim(U_2) = dim(W) + dim(U_1 \cap U_2).$$

Basta, para terminar, observar que $U_1 + U_2 = L \oplus W \oplus (U_1 \cap U_2)$ (L y W sólo tienen en común el $\{\vec{0}\}$ ya que no tienen nada de $U_1 \cap U_2$).

Coordenadas de un vector. Unicidad

Lo que hace del concepto de base algo realmente útil es que, recurriendo a ellas, cualquier vector queda identificado mediante los coeficientes de la única combinación lineal que lo expresa en función de los vectores de la base (ojo: hay que fijar un orden para esos vectores y mantenerlo siempre). A estos coeficientes se les llama coordenadas. En un espacio vectorial de dimensión finita con base prefijada, conocer un vector equivale a conocer sus coordenadas. Realmente podemos *i*maginar ("identificar" es el término matemático exacto) un espacio de dimensión finita (el de los polinomios de grado 8, por ejemplo) como un cierto $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{K}^n$ más genéricamente; en este caso $n = 9$).

Teorema 33 (Unicidad de la expresión de un vector en una base). *Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Todo vector de un subespacio vectorial finito dimensional $L \subseteq V$ ($L \neq \{\vec{0}\}$), se expresa de manera única como combinación lineal de los vectores de una base de L.*

Cualquier vector se puede expresar como c.l. de la base por ser sistema generador, y que dicha expresión es única ya que el sistema que forma la base es linealmente independiente.

Definición 34. *Sea V espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\{\vec{0}\} \neq L \subseteq V$ un subespacio vectorial. Dada una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de L, (según el teorema anterior) para cada $\vec{x} \in L$ existen unos únicos escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$. Entonces se dice que la n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las* **coordenadas** *del vector $\vec{x}$ en la base B. También lo denotamos $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$.*

Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio vectorial

Hemos visto que los espacios vectoriales de dimensión finita (será con los que trabajaremos) se pueden identificar con cierto $\mathbb{K}^n$. De ahora en adelante, prefijada una base del espacio en cuestión, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, siempre consideraremos los vectores del espacio a través de las coordenadas que tienen respecto de dicha base.

Hemos visto también cómo obtener a partir de la solución general de sistemas de ecuaciones lineales (Ejemplo 18), una base del s.e.v. formado por dichas soluciones.

Resulta natural plantearse lo contrario: obtener las ecuaciones a partir de un sistema generador. El procedimiento es similar:

Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base. Consideremos un subespacio vectorial U generado por los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\}$. Sabemos que $\vec{x} \in U$ si y sólo si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_k \vec{u}_k.$$

Desarrollando por columnas esta expresión en las coordenadas respecto la base fijada, obtendremos:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{21} + ... + \lambda_k u_{k1} \\ x_2 & = & \lambda_1 u_{12} + \lambda_2 u_{22} + ... + \lambda_k u_{k2} \\ \vdots & & \\ x_n & = & \lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n} + ... + \lambda_k u_{kn} \end{array} \right.$$

A las ecuaciones (1) se le llaman **ecuaciones paramétricas** del s.e.v. U, ya que los valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son arbitrarios.

Eliminando parámetros en las ecuaciones (1), esto es, aplicando el Método de Gauss considerando como incógnitas los parámetros λ_i, obtendremos $n-k$ relaciones entre las componentes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que se llaman **ecuaciones implícitas** de U, también por razones obvias.

Ejemplo 35. *Veamos cómo obtener por ejemplo* **unas**[5] *ecuaciones implícitas del subespacio que tratamos en el Ejemplo 13:* $U \cap H = \langle (1,0,1,1) \rangle$.

Comenzamos escribiendo las ecuaciones paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \alpha. \end{array} \right.$$

Ahora se trata simplemente de eliminar el parámetro α. *Podemos hacerlo directamente, sustituyendo la primera igualdad en la tercera y en la cuarta:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = x_1. \end{array} \right.$$

Otra forma es plantear un sistema compatible en la incógnita α, *lo que llevaría a aplicar el Método de Eliminación de Gauss a la matriz del sistema:*

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{array} \right),$$

cuya forma reducida es

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 \\ 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_4 - x_1 \end{array} \right).$$

[5] El sistema que obtendremos no ha de coincidir necesariamente con el que aparecía en el Ejemplo 13, esto es, no es único, aunque sí equivalente.

Obviamente la condición (necesaria) para evitar la incompatibilidad (y suficiente a la vez para generar un sistema compatible) es que las filas 2, 3 y 4 tengan segundos miembros nulos, es decir, las mismas ecuaciones implícitas obtenidas antes.

Repetimos ambos procedimientos con un s.e.v. que manejábamos en el Ejemplo 16:
$U_1 + U_2 = \langle(1,0,1,1),(1,2,1,-1)\rangle$.

$$\left\{\begin{array}{rcccr} x_1 = & \alpha & + & \beta, \\ x_2 = & & & 2\beta, \\ x_3 = & \alpha & + & \beta, \\ x_4 = & \alpha & - & \beta. \end{array}\right.$$

De la primera y la segunda ecuaciones deducimos que $\beta = \dfrac{x_2}{2}$, $\alpha = x_1 - \dfrac{x_2}{2}$. *Igualando las ecuaciones primera y tercera, y sustituyendo los valores de los parámetros en la cuarta:*

$$x_1 = x_3, \quad x_4 = x_1 - \frac{x_2}{2} - \frac{x_2}{2} = x_1 - x_2.$$

Por tanto

$$U_1 + U_2 \left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & & -x_3 & & = 0, \\ x_1 & -x_2 & & -x_4 & = 0. \end{array}\right.$$

Si quisiéramos hacerlo vía Método de Gauss llegamos igualmente a esas ecuaciones al imponer que las filas tercera y cuarta de la matriz reducida tengan segundos miembros nulos, como exponemos a continuación:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & x_4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & -2 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 + x_2 \end{array}\right).$$

Es conveniente siempre comprobar que los vectores que hemos usado para generar las ecuaciones verifican el sistema obtenido, y que la dimensión del espacio vectorial (no el número de elementos de un sistema generador, sino de elementos l.i. en el mismo) coincide con la dimensión del espacio menos el número de ecuaciones obtenidas.

Cambio de base en un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Hemos visto que cualquier vector $\vec{x}$ queda determinado de manera única por sus coordenadas respecto de una base de V. Ahora bien, si elegimos otra base de V, $\vec{x}$ tendrá otras coordenadas distintas a las anteriores.

A veces los cambios de base son necesarios, esencialmente para, aún teniendo vectores más complicados, permitir que las aplicaciones entre espacios admitan una representación más simple y manejable (esto lo usaremos especialmente en la diagonalización de matrices en el Tema 3). Así pues surge la siguiente pregunta: ¿qué relación guardan las coordenadas del vector respecto de ambas bases?

Este problema se podrá resolver si se conocen las relaciones de dependencia entre los vectores de las dos bases, es decir, cuando se conozcan las coordenadas de los vectores de una base respecto de la otra, con ello escrito adecuadamente en forma matricial.

Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ bases de V. Supongamos que $\vec{v}_j = a_{j1}\vec{u}_1 + a_{j2}\vec{u}_2 + ... + a_{jn}\vec{u}_n = \sum_{i=1}^n a_{ji}\vec{u}_i \quad (j = 1, ..., n)$. Recordamos la notación introducida con coordenadas: $\vec{v}_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})_B$.

En estas condiciones, cualquier vector $\vec{x} \in V$ puede expresarse en una u otra base de la siguiente manera:

$$\text{En } B, \quad \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^n x_i\vec{u}_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$$

$$\text{En } B', \quad \vec{x} = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + ... + x'_n\vec{v}_n = \sum_{j=1}^n x'_j\vec{v}_j = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{B'}.$$

En consecuencia:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^n x'_j\vec{v}_j = \sum_{j=1}^n x'_j\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}\vec{u}_i\Big) = \sum_{i,j=1}^n a_{ji}x'_j\vec{u}_i = \sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n x'_j a_{ji}\Big)\vec{u}_i = \sum_{i=1}^n x_i\vec{u}_i$$

es decir:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}x'_j \,, \quad \forall\, i = 1, ..., n$$

que son las relaciones buscadas entre ambas coordenadas. Explícitamente el sistema de ecuaciones que permite pasar de unas a otras es:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + ... + a_{n1}x'_n \\ x_2 & = & a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + ... + a_{n2}x'_n \\ & \vdots & \\ x_n & = & a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + ... + a_{nn}x'_n \end{array}\right.$$

Matricialmente se expresa de forma más simple:

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{B'}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B.$$

Obsérvese que la matriz del cambio de base de B' a B (que se suele denotar por $M_{B'B}$) simplemente consiste en poner ordenadamente por filas las coordenadas de los elementos de la base B' respecto de la base B.

Ejemplo 36. *Consideramos en $\mathbb{R}^2$ las bases $B = \{(1,0), (0,1)\}$ y $B' = \{(1,1), (2,-1)\}$. Así, la matriz de cambio de base de B' a B es (trivialmente)*

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esto es,

$$(x', y')_{B'}M_{B'B} = (x, y)_B, \quad \text{es decir} \left\{\begin{array}{l} x' + 2y' = x, \\ x' - y' = y. \end{array}\right.$$

Consideramos el subespacio vectorial $U = \{x + 3y = 0\}$ *expresado respecto de la base* B*, se puede expresar en la base* B' *como* $x' + 2y' + 3x' - 3y' = 0$*, es decir,* $\{4x' - y' = 0\}$*.*

Para comprobar que la traducción a las nuevas coordenadas es correcto damos un vector de U *en* B*, por ejemplo el* $(-3, 1)_B$*, y vemos en qué se transforma respecto de la base* B' *:*

$$\left\{ \begin{array}{lll} x' & +2y' & = -3 \\ x' & -y' & = 1 \end{array} \right. \Rightarrow\ 3y' = -4\ \Rightarrow\ y' = -4/3\ \Rightarrow\ x' = -1/3.$$

Comprobamos que efectivamente dichas coordenadas en B' *generan el elemento original:* $-\frac{1}{3}(1, 1) - \frac{4}{3}(2, -1) = (-3, 1)$*.*

Finalmente vemos que $(-1/3, -4/3)$*, así como cualesquiera proporcionales, satisfacen la ecuación* $\{4x' - y' = 0\}$*.*