2.- Vectores deslizantes.

Hemos visto en la lección anterior como la definición de igualdad (equipolencia) entre vectores nos permite clasificarlos en dos categorías: la de los *vectores libres* y la de los *vectores deslizantes*.

En la lección anterior hemos establecido las reglas del Álgebra Vectorial bajo el supuesto de que nos referíamos a los vectores libres. Así, cuando se definía la suma vectorial, no teníamos inconveniente alguno en desplazar los vectores de modo que tuviesen un punto de origen común. Esta operación, obviamente, no la podemos realizar con los vectores deslizantes, a menos que sus rectas de acción concurran en un mismo punto. Así pues, debemos ampliar nuestras definiciones de modo que podamos dar cabida en el Álgebra Vectorial a los llamados vectores deslizantes.

§2.1. Momento de un vector respecto a un punto.- Definimos el momento de un vector deslizante $\boldsymbol{F}$ con respecto a un punto O del espacio como el vector OP×$\boldsymbol{F}$, siendo P un punto cualquiera de la recta de acción del vector $\boldsymbol{F}$; esto es,

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = \mathrm{OP} \times \boldsymbol{F} \qquad [2.1]$$

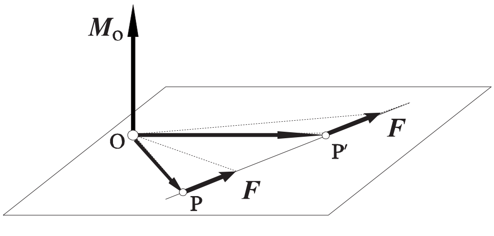


Figura 2.1

Esta definición exige que el momento de $\boldsymbol{F}$ con respecto al punto O sea independiente de la posición de $\boldsymbol{F}$ sobre su recta de acción. En efecto, imaginemos el vector $\boldsymbol{F}$ desplazado a lo largo de su recta de acción, de modo que sea P′ su punto de aplicación (Figura 2.1). La definición [2.1] significa que, llamando $\boldsymbol{M}'_{\mathrm{O}}$ al momento de $\boldsymbol{F}$, aplicado en P′, con respecto al punto O es

$$\boldsymbol{M}'_{\mathrm{O}} = \mathrm{OP}' \times \boldsymbol{F} \qquad [2.2]$$

de modo que restando [2.1] y [2.2] miembro a miembro resulta

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} - \boldsymbol{M}'_{\mathrm{O}} = (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}') \times \boldsymbol{F} = \mathrm{P}'\mathrm{P} \times \boldsymbol{F} = 0 \qquad [2.3]$$

por ser $\mathrm{P'P} \parallel \boldsymbol{F}$. Por lo tanto es $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{M}'_{\mathrm{O}}$.

Es obvio que el módulo del momento de un vector $\boldsymbol{F}$ con respecto a un punto O puede expresarse por

$$M_{\mathrm{O}} = F\,b \qquad [2.4]$$

donde b es la distancia del punto O a la recta de acción del vector. Dicha distancia recibe el nombre de *brazo del vector deslizante* con respecto al punto O.

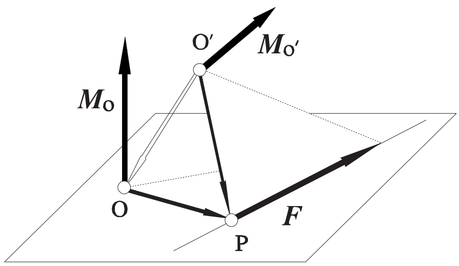


Figura 2.2

Por otra parte, de la propiedad geométrica del producto vectorial, por la que representa el área del paralelogramo determinado por los dos vectores, se sigue una propiedad geométrica análoga para el momento de un vector, que queda representado por el doble del área de los triángulos sombreados en la Figura 2.1 y en la Figura 2.2

El momento de un vector, aunque es independiente de su punto de aplicación sobre su propia recta de acción, depende del punto con respecto al cuál se toma. Esto es, si en lugar de tomarlo con respecto al punto O lo tomamos con respecto a otro punto O′ (Figura 2.2), en general, será $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O'}} \neq \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$. En efecto

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{O'}} = \mathrm{O'P} \times \boldsymbol{F} = (\mathrm{O'O} + \mathrm{OP}) \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} + \mathrm{O'O} \times \boldsymbol{F} \qquad [2.5]$$

de modo que $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O'}}$ sólo es igual a $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$ cuando $\mathrm{O'O} \times \boldsymbol{F} = 0$, lo que ocurre cuando se escoge O′ sobre una recta que pasando por O sea paralela a la dirección del vector $\boldsymbol{F}$.

§2.2. Momento de un vector respecto a un eje.- Consideremos un vector deslizante $\boldsymbol{F}$ y un eje en la dirección del versor $\boldsymbol{e}$ (Figura 2.3). Definimos el momento del vector $\boldsymbol{F}$ con respecto al eje $\boldsymbol{e}$ como la proyección sobre dicho eje del momento del vector con respecto a un punto cualquiera del eje. Esto es

$$M_{\mathrm{eje}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} \cdot \boldsymbol{e} = (\mathrm{OP} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} \qquad [2.6]$$

o bien

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{eje}} = M_{\mathrm{eje}}\boldsymbol{e} \qquad [2.7]$$

Esta definición sólo tendrá sentido si logramos demostrar que, cualquiera que sea el punto elegido sobre el eje, la proyección sobre el eje del momento del vector con respecto a dicho punto del eje es siempre la misma (invariante). En efecto, considerando otro punto del eje, O′, tenemos

$$M'_{\text{eje}} = \boldsymbol{M}_{\text{O}'} \cdot \boldsymbol{e} = (\text{O}'\text{P} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} \qquad [2.8]$$

y restando miembro a miembro [2.6] y [2.8] resulta

$$\begin{aligned} M_{\text{eje}} - M'_{\text{eje}} &= [(\text{OP} \times \boldsymbol{F}) - (\text{O}'\text{P} \times \boldsymbol{F})] \cdot \boldsymbol{e} = \\ &= [(\text{OP} - \text{O}'\text{P}) \times \boldsymbol{F}] \cdot \boldsymbol{e} = (\text{OO}' \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} = 0 \end{aligned} \qquad [2.9]$$

ya que $\text{OO}' \parallel \boldsymbol{e}$. Por lo tanto es $M'_{\text{eje}} = M_{\text{eje}}$.

El momento de un vector con respecto a un eje sólo será nulo cuando la recta de acción del vector corte al eje o cuando sea paralela a él; esto es, cuando el vector sea coplanario con el eje, puesto que entonces el momento del vector con respecto a un punto del eje será perpendicular al eje y no dará proyección sobre él.

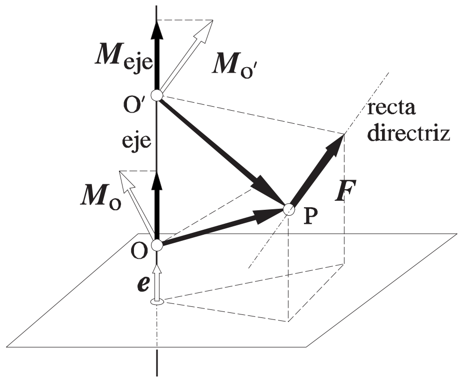


Figura 2.3

§2.3. Sistemas de vectores deslizantes.- Consideramos un sistema de vectores deslizantes, $\boldsymbol{F}_i$ (i=1,2, ... n), aplicados respectivamente en los puntos P_i (Figura 2.4).

Llamaremos *resultante general* de un sistema de vectores deslizantes al vector que se obtiene sumando todos los vectores del sistema como si fuesen libres. Es decir, designando por $\boldsymbol{R}$ tal resultante

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \qquad [2.10]$$

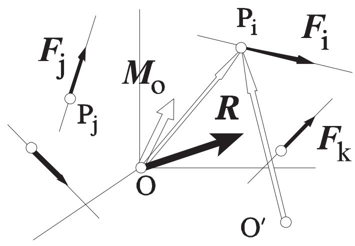


Figura 2.4

Llamaremos *momento resultante general* de un sistema de vectores deslizantes, con respecto a un punto dado O, al vector obtenido sumando todos los momentos individuales, de cada uno de los vectores que integran el sistema, con respecto al punto O. Es decir, designando por $\boldsymbol{M}_{\text{O}}$ tal momento resultante, es

$$\boldsymbol{M}_{\text{O}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_{\text{O},i} = \sum_{i=1}^{n} (\text{OP}_i \times \boldsymbol{F}_i) \qquad [2.11]$$

Obsérvese que la resultante $\boldsymbol{R}$ es independiente del punto elegido como *polo o centro de reducción*; pero no sucede lo mismo con el momento resultante $\boldsymbol{M}_{\text{O}}$, que varía de un punto a otro. Si elegimos otro centro de reducción, O′, tendremos

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}'} = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{O}'\mathrm{P}_i \times \boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{O}'\mathrm{O} + \mathrm{OP}_i) \times \boldsymbol{F}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{OP}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{O}'\mathrm{O} \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} + \mathrm{O}'\mathrm{O} \times \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \qquad [2.12]$$

o sea
$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}'} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} + \mathrm{O}'\mathrm{O} \times \boldsymbol{R} \qquad [2.13]$$

de modo que el momento resultante con respecto al punto O′ es igual al momento resultante con respecto al punto O más el *momento de la resultante* del sistema, supuesta aplicada en el punto O, con respecto al punto O′.

Debemos advertir que el momento de un vector con respecto a un punto, tal como el O, es un vector aplicado en dicho punto, de modo que cuando sumamos los dos términos del segundo miembro de [2.13], el primero de ellos aplicado en O y el segundo en O′, lo deberemos hacer como si de vectores libres se tratara y luego trasladaremos el resultado al punto O′.

Si las rectas de acción de todos los vectores del sistema concurren en un punto O, entonces es obvio que $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}=0$ y que

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}'} = \mathrm{O}'\mathrm{O} \times \boldsymbol{R} \qquad [2.14]$$

de modo que:

el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes concurrentes en un punto es igual al momento de su resultante aplicada en dicho punto de concurrencia.

Este enunciado corresponde al llamado Teorema de VARIGNON (1654-1722), que puede enunciarse también en esta otra forma equivalente:

El momento de la resultante de un sistema de vectores deslizantes concurrentes en un punto es igual a la suma de los momentos individuales de cada vector.

§2.4. Invariantes del sistema.- Hemos visto que la resultante $\boldsymbol{R}$ de un sistema de vectores es independiente del punto elegido como centro de reducción; se dice que la resultante $\boldsymbol{R}$ es un invariante del sistema que, dado su carácter vectorial, recibe el nombre de *invariante vectorial* o *primer invariante* del sistema.

Podemos encontrar un *segundo invariante* del sistema si multiplicamos escalarmente por $\boldsymbol{R}$ ambos miembros de la expresión [2.13]; entonces se sigue

$$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}'} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} + \boldsymbol{R} \cdot (\mathrm{O}'\mathrm{O} \times \boldsymbol{R}) \qquad [2.15]$$

pero como $(\mathrm{O}'\mathrm{O}\times\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{R} = 0$, resulta que

$$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}'} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} \qquad [2.16]$$

que es el *segundo invariante* del sistema que, dado su carácter escalar, recibe el nombre de *invariante escalar*.

El significado de este segundo invariante se hace más evidente si lo escribimos en la forma

$$\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}}{R} = \text{cte.} \qquad [2.17]$$

expresión que suele recibir el nombre de *tercer invariante* del sistema, aunque en realidad es sólo otra forma de escribir la expresión del segundo invariante. Vemos que el invariante escalar expresa la constancia de la proyección del momento resultante en la dirección de la resultante general del sistema de vectores deslizantes.

§2.5. Par de vectores.- Llamamos *par de vectores* a todo sistema formado por dos vectores del mismo módulo y dirección (*i.e.*, situados sobre rectas de acción paralelas entre sí), pero en sentidos opuestos.

Evidentemente, la resultante de un *par* de vectores es nula ($\boldsymbol{R}$ = O), pero no así su momento, que goza de la propiedad de ser independiente del punto elegido como centro de reducción. Esto es, *el momento resultante de un par de vectores es invariante*.

En efecto, sea O un punto cualquiera del espacio (Figura 2.5); entonces, tomando momentos con respecto a dicho punto, tenemos

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = \mathrm{OP}\times\boldsymbol{F} + \mathrm{OQ}\times(-\boldsymbol{F}) = \mathrm{QP}\times\boldsymbol{F} \qquad [2.18]$$

de modo que resulta ser independiente (invariante) del punto elegido como centro de reducción.

El momento de un par de vectores es un vector perpendicular al plano definido por los dos vectores y su sentido es el del avance de un tornillo que girase en el sentido indicado por los vectores, esto es, el que impone la regla de la mano derecha explicada en la lección anterior. El módulo del momento de un par de vectores es

$$M = F\ \mathrm{QP}\ \mathrm{sen}\,\theta = F\,b \qquad [2.19]$$

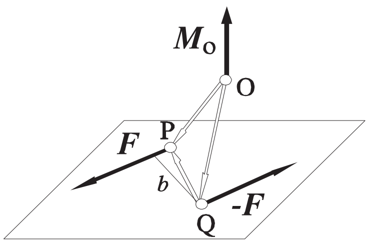


Figura 2.5

siendo b la distancia entre las rectas de acción de los vectores que forman el *par*; *i.e.*, el *brazo del par*.

Las propiedades más importantes del par de vectores son las siguientes:

(1) El momento de un par es un *invariante*.

(2) El momento de un par es un *vector libre*; esto es, no vinculado a ninguna recta de acción.

(3) Dos pares son equivalentes si tienen el mismo momento. Esto es, al ser nula la resultante $\boldsymbol{R}$ del par, su momento lo caracteriza completamente.

(4) Un par puede girarse en su plano o trasladarse paralelamente a sí mismo, sin alterar su momento.

(5) Si un sistema de vectores está formado por varios pares, de momentos individuales $\boldsymbol{M}_i$ (i=1,2,...), el momento del *par resultante* es $\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{M}_i$.

(6) Dos pares se equilibran si $\boldsymbol{M}_1 = -\boldsymbol{M}_2$.

§2.6. Eje central.- Hemos visto que el momento resultante general de un sistema de vectores deslizantes (en lo sucesivo lo llamaremos simplemente el *momento resultante*) no es un invariante del sistema, ya que depende del punto del espacio que elijamos como *polo* o *centro de reducción*. Existirán, por lo tanto, unos puntos del espacio en los que el momento del sistema presente un valor mínimo; el lugar geométrico de tales puntos (que demostraremos que es una recta) recibe el nombre de *eje central* del sistema. Esto es:

> Llamamos *eje central* de un sistema de vectores deslizantes al lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el momento resultante del sistema presenta un valor mínimo.

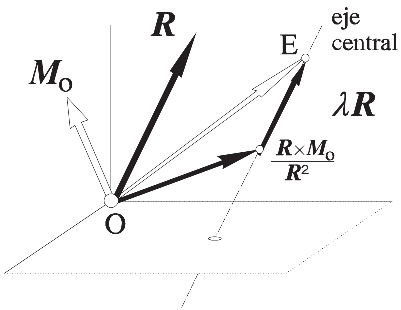


Figura 2.6

Para determinar dicho lugar geométrico, partiremos del invariante escalar, ya que este invariante expresa la constancia de la proyección del momento resultante, cualquiera que sea el punto de reducción, sobre la dirección de la resultante $\boldsymbol{R}$ del sistema. En consecuencia, el momento será mínimo en aquellos puntos en los que sea paralelo a dicha dirección. Esto es, puesto que

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{R} = M\ R\ \cos\theta = \text{cte.} \qquad [2.20]$$

y como R=cte, se sigue que M será mínimo cuando $\cos\theta$ sea máximo, o sea cuando el ángulo θ determinado por los vectores $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{R}$ sea nulo. Entonces, el momento en los puntos del eje central será paralelo a la resultante $\boldsymbol{R}$ del sistema, lo que nos permite dar esta otra definición del eje central:

> Llamamos *eje central* de un sistema de vectores deslizantes al lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el momento del sistema es paralelo a la resultante $\boldsymbol{R}$.

Esta segunda definición del eje central, en todo equivalente a la primera, nos permite identificar fácilmente dicho lugar geométrico. En efecto, multiplicando vectorialmente por $\boldsymbol{R}$ ambos miembros de la ecuación [2.13] se sigue

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}'} &= \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} - \boldsymbol{R}\times(\mathrm{OO}'\times\boldsymbol{R}) = \\ &= \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} - \mathrm{OO}'(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{R}(\mathrm{OO}'\cdot\boldsymbol{R}) \end{aligned} \qquad [2.21]$$

o sea
$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}'} = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} - R^2\,\mathrm{OO}' + m\boldsymbol{R} \qquad [2.22]$$

donde $m = \mathrm{OO}'\cdot\boldsymbol{R}$ es un parámetro escalar cuyo valor depende de la posición del punto O′ respecto al punto O.

Si consideramos que O′ sea un punto del eje central, *i.e.*, O′≡E, la condición de paralelismo entre $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{M}_\mathrm{E}$ es $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_\mathrm{E}=0$, de modo que la ecuación (vectorial) del lugar geométrico buscado es

$$\mathrm{OE} = \frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_\mathrm{O}}{R^2} + \lambda\boldsymbol{R} \qquad [2.23]$$

donde λ es un parámetro escalar ($\lambda=m/R^2$) que es simplemente un transformado del parámetro m anteriormente definido. La ecuación [2.23] lo es de una recta paralela a la dirección del vector $\boldsymbol{R}$ y que pasa por un punto definido por el vector de posición $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_\mathrm{O}/R^2$. La ecuación de dicha recta puede escribirse también en la forma

$$\frac{x-x_0}{R_x} = \frac{y-y_0}{R_y} = \frac{z-z_0}{R_z} \qquad [2.24]$$

donde (x_0,y_0,z_0) representan las coordenadas cartesianas de un punto del eje central (el $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_\mathrm{O}/R^2$, por ejemplo) y donde R_x, R_y y R_z son las componentes cartesianas de la resultante $\boldsymbol{R}$ del sistema de vectores.

Otro método.- Conocido el momento resultante en el origen de coordenadas, determinamos el momento resultante en un punto genérico E mediante la expresión

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{E} = \boldsymbol{M}_\mathrm{O} + \mathrm{EO}\times\boldsymbol{R} \qquad [2.25]$$

Este momento resultante será función de las coordenadas (x,y,z) del punto E; *i.e.*, $\boldsymbol{M}_\mathrm{E}(x,y,z)$. Imponemos la condición de que el punto E pertenezca al eje central, por lo que $\boldsymbol{M}_\mathrm{E}$ deberá ser paralelo a $\boldsymbol{R}$; esta condición se expresa en la forma

$$\frac{M_{\mathrm{E},x}}{R_x} = \frac{M_{\mathrm{E},y}}{R_y} = \frac{M_{\mathrm{E},z}}{R_z} \qquad [2.26]$$

que es la ecuación de la recta asociada al eje central del sistema de vectores deslizantes.

Obviamente, el módulo del *momento mínimo* puede calcularse proyectando el momento resultante en un punto cualquiera del espacio sobre la resultante general del sistema de vectores deslizantes; *i.e.*,

$$M_\text{mín} = \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}}{R} \qquad [2.27]$$

y su dirección es la del vector $\boldsymbol{R}$ (*i.e.*, la del eje central).

§2.7. Centro de un sistema de vectores paralelos.- Dado un sistema de vectores paralelos entre sí, no necesariamente coplanarios, definimos el *centro* de tal sistema como el punto de intersección de todos los ejes centrales correspondientes a todas las posibles orientaciones en el espacio que pudiera presentar dicho sistema de vectores, de modo que se mantengan constantes el módulo y el punto de aplicación de cada uno de los vectores que lo integran.

Sea un sistema de vectores paralelos a una cierta dirección que indicaremos mediante el versor $\boldsymbol{e}$. Cada uno de los vectores que componen el sistema podrá expresarse en la forma

$$\boldsymbol{F}_i = F_i\,\boldsymbol{e} \qquad [2.28]$$

con $F_i \neq 0$, y, obviamente, tendremos un versor $\boldsymbol{e}$ para cada orientación del sistema en el espacio[1].

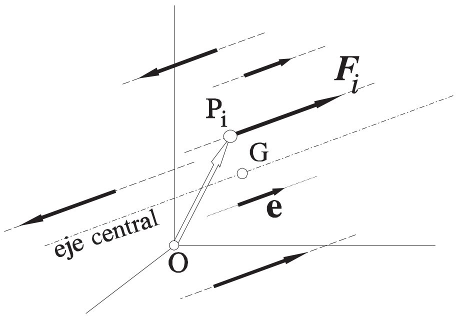


Figura 2.7

Supongamos que sea G el punto que buscamos, esto es el centro del sistema (Figura 2.7). Por pertenecer dicho punto al eje central del sistema deberá ser $\boldsymbol{M}_G \| \boldsymbol{R}$. Pero, por otra parte, al estar constituido el sistema sólo por vectores paralelos entre sí (sistema de vectores concurrentes en el punto impropio), en virtud del teorema de Varignon [2.14], deberá ser $\boldsymbol{M}_G \perp \boldsymbol{R}$. De modo que, para que esas dos condiciones puedan satisfacerse simultáneamente deberá ser $\boldsymbol{M}_G = 0$. En consecuencia podemos enunciar:

> El *centro de un sistema de vectores paralelos* es un punto tal que el momento del sistema con respecto a él es nulo.

Para cualquiera de las orientaciones del sistema, tomando momentos con respecto al punto O (origen de un sistema de ejes coordenados) tenemos

$$\boldsymbol{M}_O = \sum_i OP_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i OP_i \times F_i\,\boldsymbol{e} = (\sum_i OP_i\,F_i) \times \boldsymbol{e} \qquad [2.29]$$

y tomando momentos con respecto al punto G resulta

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_G &= \boldsymbol{M}_O - OG \times \boldsymbol{R} = (\sum_i OP_i\,F_i) \times \boldsymbol{e} - OG \times (\sum_i F_i)\boldsymbol{e} = \\ &= [\sum_i (F_i\,OP_i) - OG \sum_i F_i] \times \boldsymbol{e} = 0 \end{aligned} \qquad [2.30]$$

y como esta ecuación deberá satisfacerse para cualquier orientación del sistema de vectores, o sea para cualquier $\boldsymbol{e}$, nos queda

[1] Obsérvese que F_i puede ser positivo o negativo, según que el sentido del vector $\boldsymbol{F}_i$ sea coincidente u opuesto al del versor $\boldsymbol{e}$. Así, estrictamente, F_i no es el módulo del vector $\boldsymbol{F}_i$, ya que éste es esencialmente positivo.

$$\mathrm{OG} = \frac{\sum_i F_i \, \mathrm{OP}_i}{\sum_i F_i} \qquad [2.31]$$

que nos determina la posición del *centro* buscado.

En coordenadas cartesianas, siendo (x_i, y_i, z_i) el punto de aplicación del vector $\boldsymbol{F}_i$, la ecuación [2.31] da lugar a tres ecuaciones escalares

$$x_G = \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i} \qquad y_G = \frac{\sum_i F_i y_i}{\sum_i F_i} \qquad z_G = \frac{\sum_i F_i z_i}{\sum_i F_i} \qquad [2.32]$$

que, como veremos en una lección posterior, son las mismas expresiones que definen la posición del centro de gravedad de un cuerpo en un campo gravitatorio uniforme.

§2.8. Sistemas de vectores equivalentes.- Decimos que dos sistemas de vectores son equivalentes cuando tienen la misma resultante $\boldsymbol{R}$ y el mismo momento resultante $\boldsymbol{M}_O$ con respecto a un punto cualquiera del espacio.

Para que la definición anterior tenga sentido, deberemos demostrar que si dos sistemas de vectores deslizantes tienen la misma resultante y el mismo momento resultante con respecto a un cierto punto del espacio, también lo tendrán con respecto a cualquier otro punto. En efecto, dados dos sistemas de vectores, el $\boldsymbol{V}_i$ (i=1, 2, ... m) con puntos de aplicación A_i y el $\boldsymbol{W}_j$ (j=1, 2, ... n) con puntos de aplicación B_j, y suponemos que ambos sistemas tengan la misma resultante y el mismo momento resultante con respecto al punto O; es decir,

$$\boldsymbol{M}_V = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{OA}_i \times \boldsymbol{V}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{OB}_j \times \boldsymbol{W}_j = \boldsymbol{M}_W \qquad [2.33]$$

entonces, para otro centro de reducción, O′, será

$$\boldsymbol{M}'_V = \boldsymbol{M}_V + \mathrm{O'O} \times \boldsymbol{R}_V \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{M}'_W = \boldsymbol{M}_W + \mathrm{O'O} \times \boldsymbol{R}_W \qquad [2.34]$$

y como por hipótesis es $\boldsymbol{M}_V=\boldsymbol{M}_W$ y $\boldsymbol{R}_V=\boldsymbol{R}_W$ será también $\boldsymbol{M}'_V=\boldsymbol{M}'_W$.

De acuerdo con la definición de equivalencia entre dos sistemas de vectores deslizantes, tenemos:

(a) Un sistema de vectores concurrentes en un punto es equivalente a un vector único (*i.e.*, la resultante $\boldsymbol{R}$ del sistema), cuya recta de acción pasa por dicho punto de concurrencia.

(b) Un sistema de vectores cuya resultante $\boldsymbol{R}$ sea nula, no siéndolo el momento resultante $\boldsymbol{M}$, es equivalente a un *par de vectores* que tenga el mismo momento.

Diversas operaciones nos permiten transformar un sistema de vectores en otro que le sea equivalente. Las operaciones elementales que consiguen ese objetivo son:

(1) La incorporación al sistema de vectores de dos vectores de igual módulo y recta de acción común, pero de sentidos opuestos.

(2) La supresión de dos vectores en las mismas condiciones anteriores.

(3) La sustitución de dos vectores concurrentes en un punto por su suma efectuada y situada sobre una recta de acción que pase por el punto de concurrencia.

(4) La sustitución de un vector por otros dos en las mismas condiciones anteriores.

(5) Y, naturalmente, la traslación de un vector a lo largo de su recta de acción.

§2.9. Reducción de sistemas.- Reducir un sistema de vectores es sustituirlo por otro sistema de vectores más sencillo que le sea equivalente. La reducción de un sistema de vectores puede llevarse a cabo mediante las operaciones elementales enumeradas anteriormente.

Para la reducción de un sistema de vectores resulta sumamente interesante la consideración de los siguientes teoremas:

TEOREMA I.- Todo sistema de vectores deslizantes puede reducirse a un vector único cuya recta de acción pasa por un punto arbitrario más un *par* cuyo momento sea el momento resultante del sistema con respecto a dicho punto.

Esto es, elegido un cierto punto O como *centro de reducción*, el sistema es equivalente al formado por la resultante general ***R*** *aplicada* en O y a un par, constituido por los vectores ***F*** y -***F***, que podemos elegir arbitrariamente con tal de que el momento del par sea igual al momento resultante general del sistema dado con respecto al centro de reducción O.

Podemos conseguir una reducción de esa forma sin más que aplicar en el centro de reducción O elegido un vector igual a cada uno de los $\boldsymbol{F}_i$ (***i***=1, 2, ... *n*) y otro, -$\boldsymbol{F}_i$, igual y opuesto Figura 2.8. Los vectores $\boldsymbol{F}_i$ aplicados en el punto O dan (sumados) la resultante ***R*** del sistema total así constituido, en tanto que los vectores -$\boldsymbol{F}_i$ se agrupan por parejas con los dados inicialmente para formar *n pares de vectores* que, una vez sumados nos dan el momento resultante $\boldsymbol{M}_\mathrm{O}$, esto es, el momento del *par resultante* (***F***, -***F***).

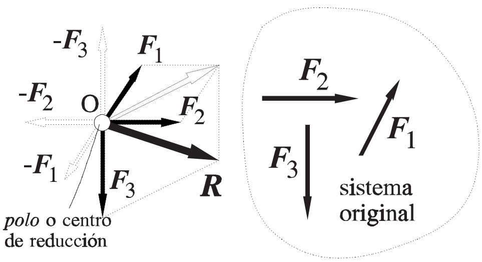


Figura 2.8

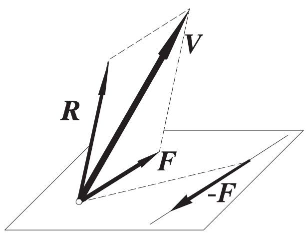


Figura 2.9

TEOREMA II.- Todo sistema de vectores deslizantes puede reducirse a sólo dos vectores, para uno de los cuales podemos elegir la recta de acción.

En efecto, puesto que un *par* de momento ***M*** está compuesto por dos vectores, uno de los cuales puede tener la recta de acción que se desee, uno de ellos puede ser elegido de modo que esté aplicado en el punto O (centro de reducción arbitrario) del caso precedente, de modo que podrá sumarse a la resultante general ***R*** aplicada en O (Figura 2.9). En consecuencia, nos quedará, además de esa suma, el otro vector que formaba parte del *par* de momento ***M***; esto es, dos vectores en total.

TEOREMA III.- **Reducción canónica**[2]**.** Todo sistema de vectores deslizantes cuyo invariante escalar sea distinto de cero, puede reducirse a un vector único y a un *par* cuyo momento sea paralelo a dicho vector único. Tal reducción se llama *canónica*.

En efecto, si tomamos el centro de reducción sobre el eje central del sistema de vectores, la resultante y el momento resultante del sistema serán paralelos entre sí, como se muestra en la Figura 2.10. El sistema así constituido, equivalente al dado, se llama *torsor* y el eje del *par* (*i.e.*, el eje central del sistema) recibe el nombre de *flecha del torsor*.

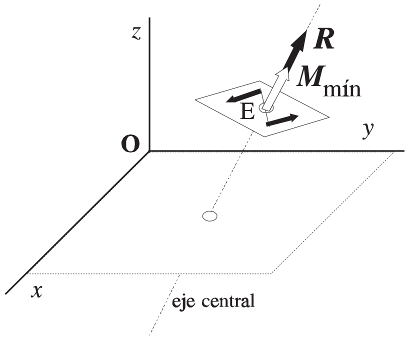


Figura 2.10

Evidentemente la condición necesaria y suficiente para que la reducción canónica sea posible (*i.e.* que el sistema pueda reducirse en un *par* de momento $\boldsymbol{M}_{\text{mín}}$ paralelo a la resultante ***R***) es que el invariante escalar no sea nulo, o sea $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}\neq 0$, pues así ni ***R*** ni ***M*** son nulos ni perpendiculares entre sí.

Cuando el invariante escalar del sistema de vectores es nulo, es decir $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{R}=0$, siendo ***M*** el momento en un punto cualquiera, se pueden presentar los casos siguientes:

(a) Si $\boldsymbol{R}=0$ y $\boldsymbol{M}=0$, esta situación se presentará para cualquier centro de reducción y el sistema es *equivalente a cero (sistema nulo)*.

(b) Si $\boldsymbol{R}=0$ y $\boldsymbol{M}\neq 0$, el sistema se reduce a un *par de vectores* de momento ***M*** cualquiera que sea el centro de reducción.

(c) Si $\boldsymbol{R}\neq 0$ y $\boldsymbol{M}=0$, el sistema se reduce a un vector único cuya recta de acción pasa por ese centro de reducción. Esta situación se presenta tanto si los vectores son concurrentes (sean coplanarias o no) (Figura 2.11), como si los vectores que constituyen el sistema son paralelos entre sí (punto de concurrencia impropio) (Figura 2.12). En todo caso, en los puntos que no pertenecen a la recta de acción de la resultante ***R*** (eje central del sistema) aparecerá un cierto momento $\boldsymbol{M}\neq 0$, pero dicho momento será siempre perpendicular a la resultante ***R***, ya que dicho momento será igual al *momento de la resultante* en esos puntos (teorema de VARIGNON).

(d) Si $\boldsymbol{R}\neq 0$ y $\boldsymbol{M}\neq 0$ pero es $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}=0$, deberá ser $\boldsymbol{M}\perp\boldsymbol{R}$ cualquiera que sea el

[2] En la Física, el adjetivo *canónico* significa *adaptado o ajustado lo mejor posible*. El concepto se aplica a las magnitudes, fórmulas y procedimientos que sirven para describir los fenómenos físicos.

centro de reducción. Como caso particular, si el centro de reducción se toma sobre el eje central del sistema de vectores, deberá ser $\boldsymbol{M}_{\text{mín}} \| \boldsymbol{R}$, de modo que para que puedan satisfacerse simultáneamente las dos condiciones anteriores (perpendicularidad y paralelismo entre $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{R}$) y al ser $\boldsymbol{R}\neq 0$ e invariante, deberá ser $\boldsymbol{M}_{\text{mín}}=0$, reduciéndose el sistema a un vector único (la resultante $\boldsymbol{R}$ del sistema) dirigido a lo largo del eje central.

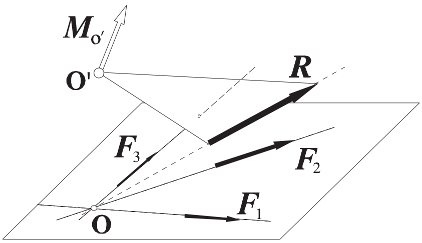


Figura 2.11

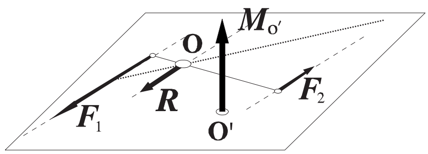


Figura 2.12

Ejemplo I.- Dado el sistema de vectores deslizantes:

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ aplicado en A(1,2,3)

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ aplicado en B(-1,0,1)

$\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ aplicado en C(2,0,-1)

hallar: **a)** su resultante; **b)** su momento resultante respecto al origen de coordenadas; **c)** el módulo y componentes del momento mínimo del sistema; **d)** la ecuación del eje central; **e)** el torsor del sistema.

a) La resultante es $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ y su módulo vale $|\boldsymbol{R}| = \sqrt{1^2+3^2+2^2} = \sqrt{14}$.

1

b) El momento resultante es $\boldsymbol{M}_{\text{O}} = \boldsymbol{M}_{\text{O}}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{M}_{\text{O}}(\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{M}_{\text{O}}(\boldsymbol{c})$, o sea

$$\boldsymbol{M}_{\text{O}} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}$$

c) El invariante escalar es $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}_{\text{O}} = 3 + 21 + 10 = 34$, de modo que el momento mínimo vale

$$M_{\text{mín}} = \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}_{\text{O}}}{R} = \frac{34}{\sqrt{14}} = \tfrac{17}{7}\sqrt{14}$$

en la dirección de $\boldsymbol{R}$, por lo que será:

$$\boldsymbol{M}_{\text{mín}} = \frac{17\sqrt{14}}{7}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right) = \frac{17\sqrt{14}}{7}\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \frac{17}{7}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

d) El punto $$\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_{\text{O}}}{R^2} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

pertenece al eje central, por lo que la ecuaciones cartesianas de éste serán

$$\frac{14x-1}{1} = \frac{14y-1}{3} = \frac{14z+2}{2}$$

Otro método: Calculamos el momento resultante en un punto genérico E(x,y,z) perteneciente al eje central

$$\boldsymbol{M}_{\text{E}} = \boldsymbol{M}_{\text{O}} + \text{EO}\times\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3z-2y+3\\2x-z+7\\y-3x+5\end{pmatrix}$$

de modo que la ecuación de la recta asociada al mismo será

$$\frac{3z-2y+3}{1} = \frac{2x-z+7}{3} = \frac{y-3x+5}{2}$$

e) El torsor del sistema es $$\{\boldsymbol{R}\,;\boldsymbol{M}_{\text{mín}}\} = \{(1,3,2)\,;\tfrac{17}{7}(1,3,2)\}$$

Ejemplo II.- La resultante de un sistema de vectores deslizantes es $\boldsymbol{R} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y su momento resultante con respecto al punto P(1,-1,2) vale $\boldsymbol{M}_{\text{P}} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Determinar el eje central del sistema.

♦ Podemos evaluar el momento resultante en el origen de coordenadas O(0,0,0); esto es,

$$\boldsymbol{M}_{\text{O}} = \boldsymbol{M}_{\text{P}} + \text{OP}\times\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\-2\end{pmatrix}$$

de modo que la ec. vectorial (ec. paramétricas) del eje central será

$$\text{OE} = \frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_{\text{O}}}{R^2} + \lambda\boldsymbol{R} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6\\5\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/14+2\lambda\\5/7-3\lambda\\2+\lambda\end{pmatrix}$$

o bien, en forma continua $$\frac{x-\frac{1}{14}}{2} = \frac{y-\frac{5}{7}}{-3} = \frac{z-2}{1}$$

♦ También podemos encontrar directamente las ec. del eje central a partir del momento resultante del sistema en P; esto es,

$$\mathrm{OE} = \mathrm{OP} + \mathrm{PE} = \mathrm{OP} + \frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_{\mathrm{P}}}{R^2} + \lambda\boldsymbol{R} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/14 + 2\lambda \\ -11/14 - 3\lambda \\ 5/2 + \lambda \end{pmatrix}$$

o bien en forma continua

$$\frac{x - \frac{15}{14}}{2} = \frac{y + \frac{11}{14}}{-3} = \frac{z - \frac{5}{2}}{1}$$

que es la misma recta que antes, como el lector comprobará fácilmente.

§2.10. Virial de un vector.- Definimos el virial de un vector $\boldsymbol{F}$, *aplicado* en un punto P, respecto al punto O del espacio, como el producto escalar del vector OP por el vector $\boldsymbol{F}$. Esto es

$$V_{\mathrm{O}} = \mathrm{OP} \cdot \boldsymbol{F} \qquad [2.35]$$

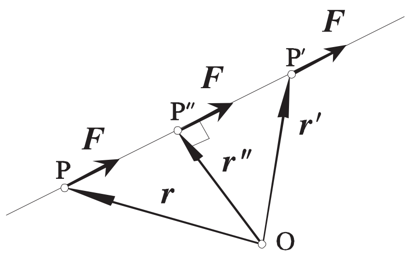


Figura 2.13

El virial de un vector respecto a un punto es, evidentemente, una magnitud escalar. La definición del virial de un vector presenta una cierta analogía con la del momento de un vector, ya que intervienen los mismos elementos (los vectores OP y $\boldsymbol{F}$), si bien el producto vectorial ha sido reemplazado ahora por un producto escalar.

Obsérvese que en la definición del virial de un vector hemos omitido el carácter deslizante de éste; en su lugar, hemos destacado la palabra "aplicado". En efecto, el virial de un vector respecto a un punto dado del espacio *no es independiente* de la posición del vector $\boldsymbol{F}$ sobre su recta de acción (Figura 2.13). Si calculamos el virial del vector $\boldsymbol{F}$, aplicado en otro punto (P′) de su recta de acción, respecto al punto dado O, tenemos

$$V_{\mathrm{O}}' = \mathrm{OP}' \cdot \boldsymbol{F} = (\mathrm{OP} + \mathrm{PP}') \cdot \boldsymbol{F} \qquad [2.36]$$

o sea

$$V_{\mathrm{O}}' = V_{\mathrm{O}} + \mathrm{PP}' \cdot \boldsymbol{F} \qquad [2.37]$$

de modo que $V_{\mathrm{O}}' \neq V_{\mathrm{O}}$. Consideraremos, pues, el vector $\boldsymbol{F}$ como un *vector ligado*. Establecemos, así, una nueva clase de vectores, la de los *vectores ligados*, junto a las dos anteriores definidas de los *vectores deslizantes* y de los *vectores libres*. En los sistemas de vectores ligados, el criterio de igualdad entre dos vectores (equipolencia) exige que los vectores tengan el mismo módulo, la misma dirección y sentido y el *mismo punto de aplicación*.

El virial de un vector depende del punto del espacio respecto al cual se tome.

Esto es, si en lugar de tomarlo respecto al punto O lo tomamos respecto al punto O′, será, en general $V_{O'} \neq V_O$.

En efecto;

$$V_{O'} = \mathrm{O'P} \cdot \boldsymbol{F} = (\mathrm{O'O} + \mathrm{OP}) \cdot \boldsymbol{F} \qquad [2.38]$$

o sea
$$V_{O'} = V_O + \mathrm{O'O} \cdot \boldsymbol{F} \qquad [2.39]$$

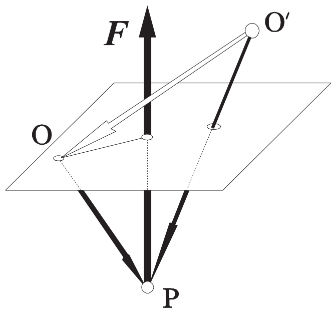


Figura 2.14

de modo que $V_{O'}$ sólo será igual a V_O cuando O′O·$\boldsymbol{F}$=0, lo que ocurre cuando se escoge O′ sobre una recta que pasando por O sea perpendicular a la dirección del vector $\boldsymbol{F}$. Así pues, el virial de un vector tiene el mismo valor en todos los puntos de un plano normal al vector (Figura 2.14.)

§2.11. Virial de un sistema de vectores.- Consideremos un sistema de vectores ligados, $\boldsymbol{F}_i$ (i=1, 2, ...). aplicados respectivamente en los puntos P_i (Figura 2.15). Llamaremos *virial del sistema* de vectores ligados, respecto a un punto dado O, al escalar que resulta de sumar todos los viriales individuales (*i.e.*, de cada uno de los vectores que integran el sistema) respecto al punto O. Esto es, si designamos por V_O el virial del sistema, tenemos

$$V_O = \sum_i \mathrm{OP}_i \cdot \boldsymbol{F}_i \qquad [2.40]$$

El virial de un sistema de vectores depende del punto del espacio respecto al cual se calcula. El virial del sistema en un punto O′ será

$$V_{O'} = \sum_i \mathrm{O'P_i} \cdot \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\mathrm{O'O} + \mathrm{OP}_i) \cdot \boldsymbol{F}_i = \\ = \sum_i \mathrm{OP}_i \cdot \boldsymbol{F}_i + \mathrm{O'O} \cdot \sum_i \boldsymbol{F}_i \qquad [2.41]$$

o sea
$$V_{O'} = V_O + \mathrm{O'O} \cdot \boldsymbol{R} \qquad [2.42]$$

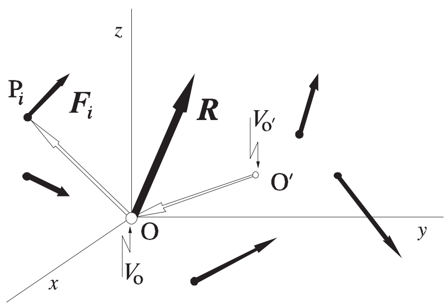


Figura 2.15

donde $\boldsymbol{R}=\sum\boldsymbol{F}_i$ es la resultante general del sistema de vectores ligados (suma de todos los vectores del sistema como si fuesen libres), de modo que el virial del sistema en el punto O′ es igual al virial del sistema en el O más el *virial de la resultante* del sistema, supuesta aplicada en el punto O, en el punto O′.

De la expresión [2.42] se deduce fácilmente que el virial del sistema tiene el mismo valor en todos los puntos de cualquier plano perpendicular a la dirección de la resultante general del sistema de vectores (Figura 2.16), puesto que entonces es Q′Q·$\boldsymbol{R}$=0.

§2.12. Plano central.- Hemos visto que el virial de un sistema de vectores ligados no es un invariante del sistema, ya que su valor depende del punto del espacio en el que se calcula; dicho valor variará de forma continua desde $-\infty$ a ∞, al pasar de un punto a otro. También hemos visto que el virial de un sistema de vectores ligados toma un valor constante en todos los puntos de cualquier plano perpendicular a la dirección de la resultante general (***R***) del sistema. Existirá, por lo tanto, un plano en cuyos puntos el virial será nulo; tal plano recibe el nombre de *plano central*; *i.e.*,

> Llamamos plano central de un sistema de vectores ligados al lugar geométrico de los puntos del espacio en los que se anula el virial del sistema.

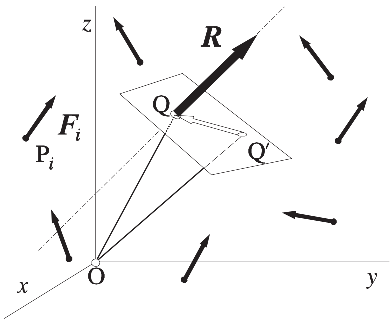


Figura 2.16

Para determinar la ecuación del plano central, consideraremos un punto genérico Q de dicho lugar geométrico, en el que será V_Q=0. Entonces, de acuerdo con la expresión [2.42], será

$$V_Q = V_O + QO \cdot \boldsymbol{R} = 0 \qquad [2.43]$$

o sea

$$OQ \cdot \boldsymbol{R} = V_O \qquad [2.44]$$

que es la ecuación de un plano normal a la dirección de la resultante general del sistema de vectores (*i.e.*, normal al eje central), en cuyos puntos se anula el virial del sistema; la expresión [2.44] es la ecuación vectorial del plano central del sistema de vectores ligados.

En coordenadas cartesianas (x,y,z), tomando el origen en el punto O, como se indica en la Figura 2.16, la ecuación del plano central se escribe en la forma

$$x R_x + y R_y + z R_z = V_O \qquad [2.45]$$

donde (R_x,R_y,R_z) son las componentes de la resultante general del sistema sobre los ejes coordenados y V_O es el virial del sistema en el origen de coordenadas.

§2.13. Punto central.- Hemos definido en esta lección el eje central de un sistema de vectores deslizantes y el plano central de un sistema de vectores ligados. Consideremos ahora un sistema de vectores dado, $\boldsymbol{F}_i$ (i=1, 2, ... n), cuyas rectas de acción pasen por los puntos P_i correspondientes. Considerémoslo, primero, como un sistema de vectores deslizantes y determinemos el eje central del sistema. A continuación, consideraremos cada uno de los vectores del sistema ligados a los puntos P_i correspondientes y determinaremos el plano central del sistema (para

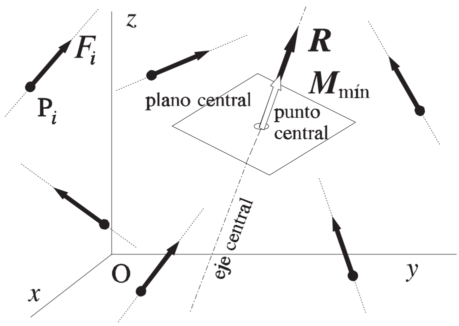


Figura 2.17

los puntos de aplicación dados). El punto de intersección del eje central con el plano central (Figura 2.17) recibe el nombre de *punto central* del sistema de vectores, para unos puntos de aplicación dados. Para encontrar el punto central bastará, evidentemente, resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones del eje central [2.23] o [2.24] y la ecuación del plano central [2.44] o [2.45].

De acuerdo con la definición anterior, es obvio que

> el *punto central* de un sistema de vectores es aquél en el que *el virial es nulo y mínimo el momento*.

Deberá quedar bien claro que el punto central sólo tiene significado para un sistema de vectores ligados o para un sistema de vectores deslizantes para un conjunto de puntos de aplicación dado (lo que equivale a considerar los vectores como ligados).

No debemos confundir el concepto de *punto central* de un sistema de vectores ligados con el de *centro* de un sistema de vectores paralelos; sin embargo, en el caso de un sistema de vectores ligados paralelos, ambos coinciden en un mismo punto del espacio (*vide* Problema 2.25). Podemos considerar el *punto central* como una generalización del *centro* de un sistema de vectores paralelos (deslizantes o ligados).

Problemas

2.1.- Determinar el momento del vector $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, aplicado en el punto P(2,5,3): **a)** con respecto al origen de coordenadas; **b)** con respecto al punto O′(1,2,-1); **c)** comprobar que $\boldsymbol{M}_{O'} = \boldsymbol{M}_O + \mathrm{O'O} \times \boldsymbol{F}$.

2.2.- Dado el vector deslizante $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, aplicado en el punto P(3,4,2), calcular su momento: **a)** con respecto a cada uno de los ejes coordenados; **b)** con respecto al eje determinado por el origen de coordenadas y el punto Q(2,3,1); **c)** con respecto a la recta de ecuación $(x-1)/2 = (y+2)/3 = (z-4)/(-5)$.

2.3.- Dado el vector deslizante $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, cuyo momento con respecto al origen de coordenadas es $\boldsymbol{M}_O = 5\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}$, determinar M_z y la ecuación de la recta de acción del vector $\boldsymbol{F}$.

2.4.- Demostrar que el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes no es igual al momento de la resultante del sistema salvo que los vectores sean concurrentes en un punto o paralelos entre sí.

2.5.- Demostrar que, si el momento de un sistema de vectores deslizantes es nulo con respecto a tres puntos no alineados, el sistema de vectores es equivalente al sistema nulo. ¿Qué ocurre si los tres puntos están alineados?

2.6.- Un sistema de vectores deslizantes está definido por sus momentos respecto a tres puntos del espacio, en la forma siguiente

$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ respecto a $O_1(2,0,1)$

$\boldsymbol{M}_2 = a\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ $O_2(0,0,1)$

$\boldsymbol{M}_3 = b\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ $O_3(1,-1,0)$

Hallar el vector resultante y completar las expresiones de los momentos.

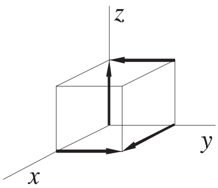
2.7.- El módulo de la resultante de un sistema de vectores es $R = 6$, el invariante escalar del sistema es $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{R}=30$ y la ecuación del eje central del sistema es $2x = y = 2z$. Hallar: **a)** el momento mínimo; **b)** la resultante; **c)** el momento respecto al origen; **d)** el momento con respecto al punto (2,1,0).

2.8.- a) Determinar el centro de un sistema de vectores deslizantes paralelos, formado por los vectores de módulos 2, 4 y 5, respectivamente, y aplicados en los puntos (1,1,0), (2,3,1) y (2,1,3). **b)** Determinar la resultante del sistema y el momento resultante con respecto al origen de coordenadas.

2.9.- Demostrar que el sistema de vectores: $\boldsymbol{F}_1 = 2\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{F}_3 = -\boldsymbol{i}$, aplicados en los puntos (0,0,0), (0,1,0) y (0,0,1), respectivamente, se puede reducir a un par y determinar dicho par.

2.10.- Dado un vector deslizante $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ cuya recta de acción pasa por el punto P(2,1,1), y el par de momento $\boldsymbol{M} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, reducir dicho sistema a un vector único (de ser posible) aplicado en un punto del plano *xy*, cuyas coordenadas deben determinarse.

2.11.- Dado el sistema de vectores deslizantes que se representa en la figura, reducirlo a un vector que pase por el origen de coordenadas y a un par. Determinar los módulos de dichos vectores para que el sistema se pueda reducir: **a)** a un vector único y **b)** a un par.



Prob. 2.11

2.12.- Sobre un cuerpo rígido actúan dos fuerzas, $\boldsymbol{F}_1 = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, aplicadas respectivamente en los puntos (0,1,1) y (2,0,1), y un par de fuerzas de momento $\boldsymbol{M} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$. Sustituir ese sistema de fuerzas por: **a)** una fuerza que pase por el punto (1,1,1) y un par; **b)** por una fuerza y un par de eje paralelo a la fuerza.

2.13.- Dados los vectores deslizantes

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ aplicado en A(1,1,0)

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ aplicado en B(0,0,2)

$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ aplicado en C(1,1,1)

$\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{k}$ aplicado en D(0,3,0)

reducirlo a dos vectores, uno aplicado en el origen de coordenadas y otro de módulo unidad aplicado en un punto del plano *xy* cuyas coordenadas deberán determinarse.

2.14.- Sea el sistema de vectores deslizantes formado por los vectores

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{j}$ aplicado en A(0,0,1)

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k}$ aplicado en B(1,0,0)

Determinar un sistema equivalente al dado que esté constituido por dos vectores, de modo que uno de ellos tenga el eje *y* como recta directriz.

2.15.- Determinar el eje central del sistema de vectores deslizantes definidos de la siguiente forma:

$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$; $P_A(0,0,1)$

$|\boldsymbol{B}|=6$; $B_x>0$; $2(x-1)=y=z$

$|\boldsymbol{C}|=3$; $C_x>0$; $P_C(3,0,0)$;

$2\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$

2.16.- Dado el sistema de vectores deslizantes:

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ aplicado en A(0,0,1)

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k}$ aplicado en B(1,0,0)

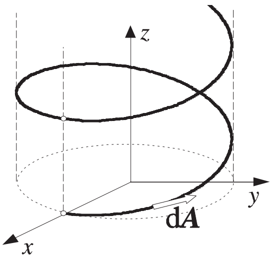
determinar un tercer vector, de módulo 2 y componentes enteras, que junto con los dos anteriores constituya un sistema cuyo eje central sea la recta $x = y = z$.

2.17.- Consideremos el sistema de vectores deslizantes

$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ aplicado en $P_1(0,1,0)$

$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{j}$ aplicado en $P_2(1,0,0)$

Determinar un tercer vector tal, que junto con los dos anteriores, constituya un nuevo sistema equivalente a un *par* cuyo momento tenga la dirección del eje *z*.



Prob. 2.18

2.18.- Consideremos el sistema de vectores deslizantes infinitesimales definido por $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \lambda \mathrm{d}\boldsymbol{s}$, donde λ es una constante y d**s** es el vector arco de la curva:

$$x = 3\,a\,\cos\theta \qquad y = 3\,a\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = 4a\theta$$

para $0\le\theta\le 2\pi$, como se muestra en la figura. **a)** Calcular la resultante y el momento del sistema respecto al origen de coordenadas. **b)** Determinar el eje central y el torsor del sistema.

2.19.- Sean dos sistemas de vectores deslizantes definidos por sus *torsores* $\{\boldsymbol{R};\boldsymbol{M}\}$ respectivos:

$$\mathbf{T}_1 = \{(1,2,1);(2,4,2)\} \quad P_1(1,0,0)$$

$$\mathbf{T}_2 = \{(0,1,1);(0,3,3)\} \quad P_2(0,1,0)$$

Determinar el *torsor resultante* del sistema de vectores constituido por los dos dados.

2.20.- Demostrar que el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes es el mismo para todos los puntos de una recta paralela a la dirección de la resultante general del sistema.

2.21.- Demostrar que un vector y un par coplanarios equivalen a un vector único y que, recíprocamente, un vector único equivale a otro equipolente que pase por el punto que se desee y a un par.

2.22.- En el §2.6 hemos obtenido la ecuación vectorial del eje central de un sistema de vectores deslizantes [2.23], en la que aparece un parámetro escalar λ que depende del punto O elegido como centro de reducción. Normalmente, dicho punto será el origen de un sistema de coordenadas, de modo que O(0,0,0), adoptando entonces la ec. vectorial del eje central su forma más simple [2.23]. Sin embargo, si conocemos el momento resultante del sistema de vectores deslizantes en un punto cualquiera P, podemos obtener la misma ec. vectorial del eje central en la forma

$$\mathrm{OE} = \mathrm{OP} + \mathrm{PE} = \mathrm{OP} + \frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_{\mathrm{P}}}{R^2} + \lambda_{\mathrm{P}}\boldsymbol{R}$$

siendo λ_{P} un nuevo parámetro, asociado al nuevo centro de reducción P, relacionado con el anterior por

$$\lambda_{\mathrm{P}} = \left(\lambda - \frac{\mathrm{OP}\cdot\boldsymbol{R}}{R^2}\right)$$

Demostrar estas dos expresiones y comprobar que se reducen a la [2.23] cuando el punto P coincide con el origen de coordenadas.

2.23.- a) Calcular el virial en el origen de coordenadas y determinar el plano central correspondiente al sistema de vectores ligados dado en el Ejemplo I de esta lección. **b)** Determinar el punto central de dicho sistema de vectores.

2.24.- a) Consideremos el sistema de vectores paralelos al eje *z*, formado por los vectores de módulo 2, 4 y 5, respectivamente y aplicados en los puntos (1,1,0), (2,3,1) y (2,1,3), correspondientes. Determinar la posición del *centro y del punto central* de este sistema de vectores. **b)** Ahora, giremos el sistema de vectores para colocarlo paralelo al eje *x*, sin alterar los módulos ni los puntos de aplicación de los vectores. Determinar de nuevo la posición del centro y del punto central del sistema. Interpretar los resultados.

2.25.- Demostrar los teoremas siguientes: **a)** Dado un sistema de vectores ligados y paralelos entre sí, el punto central de tal sistema queda definido como el punto de intersección de todos los planos centrales correspondientes a todas las posibles orientaciones que pudiera presentar dicho sistema de vectores en el espacio. **b)** El centro y el punto central de un sistema de vectores paralelos coinciden en un mismo punto del espacio.