Tema 2.1: Preliminares matemáticos

Diseño y Análisis de Algoritmos

Universidad
Rey Juan Carlos

Contenidos

1. Introducción
2. Series generales
3. Series útiles

Preliminares Matemáticos

- Las matemáticas son fundamentales para el estudio y análisis de algoritmos
    - Es una de las ideas principales que tenéis que sacar de la asignatura
- En la asignatura solo veremos conceptos matemáticos básicos para poder analizar algoritmos iterativos y recursivos
- En este tema nos centraremos únicamente en series (sumatorios), útiles para analizar algoritmos iterativos

Aritméticas ($a_i = a_{i-1} + r$)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n$$

$$\sum_{i=J_o}^{J_F} a_i = \frac{1}{2}(a_{J_o} + a_{J_F})(J_F - J_o + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} k = kn \qquad\qquad (a_i = k, \quad r = 0)$$

Geométricas $(a_i = a_{i-1} \cdot r)$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} kr^i = \frac{r^n - 1}{r - 1}k \qquad (a_i = kr^i)$$

$$\begin{array}{rcllr} S & = & k & +kr + kr^2 + \ldots + kr^{n-1} & \\ rS & = & & +kr + kr^2 + \ldots + kr^{n-1} & +kr^n \\ \hline rS - S & = & -k & & +kr^n \end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad S = \frac{r^n - 1}{r - 1}k$$

Series telescópicas

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

- Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = +1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

- Todo encaja, en realidad hemos hecho: $a_i = -1/(i+1)$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(+\left(-\frac{1}{i+1}\right) - \left(-\frac{1}{i}\right)\right) = -\frac{1}{n} - (-1) = 1 - \frac{1}{n}$$

Productorios

- Lo más importante es conocer la relación entre productorios y sumatorios al utilizar **logaritmos**

$$\log\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \log a_i$$

- Se emplea mucho en probabilidad
  - Para simplificar cálculos
  - Para evitar desbordamientos, ya que al multiplicar muchas probabilidades (números entre 0 y 1) el resultado se hace muy pequeño

Derivar series

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + \ldots + N \cdot 2^{N-1} = \sum_{i=1}^{N} i2^{i-1}$$

$$T = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$\frac{dT}{dx} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(x-1)^2}$$

- Para $x = 2$ y $n = N + 1$ tenemos la primera serie:

$$\boxed{S = 1 + (N-1)2^N}$$

Aproximación por integrales

- Para muchas series no obtendremos una fórmula analítica
- Tendremos que recurrir a cotas
- Para $f(x)$ monótona creciente:

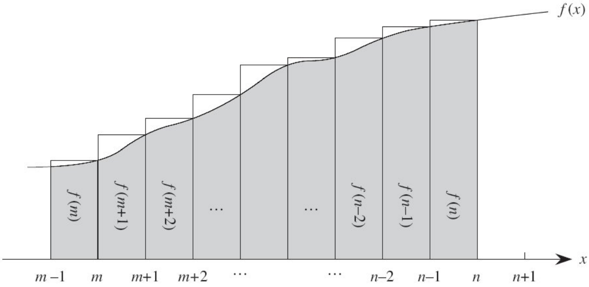
$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \quad \leq \quad \sum_{i=m}^{n} f(i) \quad \leq \quad \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$

- Para $f(x)$ monótona decreciente:

$$\int_{m}^{n+1} f(x)dx \quad \leq \quad \sum_{i=m}^{n} f(i) \quad \leq \quad \int_{m-1}^{n} f(x)dx$$

Funciones monótonas crecientes - cota inferior

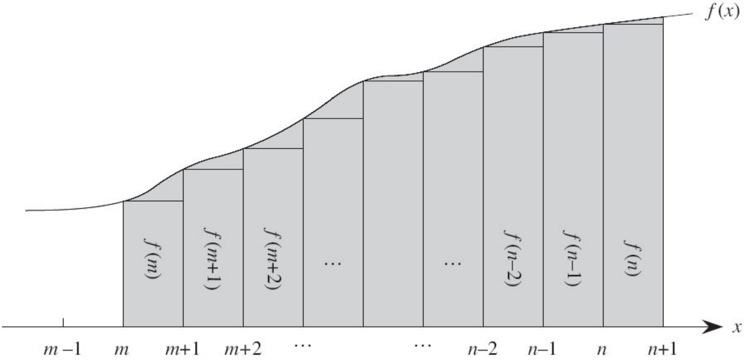
$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \quad \leq \quad \sum_{i=m}^{n} f(i)$$



- $f(x)$ puede ser continua, pero se evalúa en puntos enteros
- Cada término del sumatorio es igual al área de un rectángulo
  - Base $= 1$, altura $= f(i)$

Funciones monótonas crecientes - cota superior

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) \quad \leq \quad \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$



Ejemplo

- Acotar $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
- Cota superior

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \quad \leq \quad \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx = \ln(n) \qquad \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad \leq \quad \ln(n) + 1$$

- Cota inferior

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad \geq \quad \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1)$$

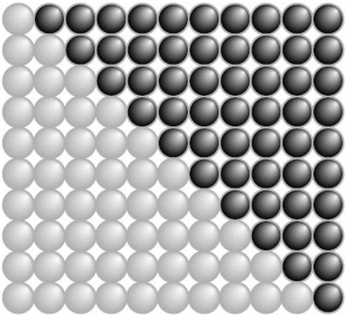
Armónica

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \gamma + \mathcal{O}(1/n)$$

- $\gamma \simeq 0{,}577$ es la constante de Euler
- $\mathcal{O}(1/n)$ es un término muy pequeño
- La serie se puede acotar utilizando la "aproximación por integrales"

Series útiles

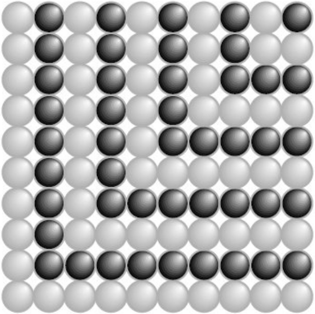
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



- Se puede demostrar por inducción fácilmente, pero visualmente es más sencillo

Series útiles

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$$



- Se usará en la siguiente transparencia

Series útiles

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

- Demostración:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\sum_{i=1}^{n} i^2 & = & 1 & + & 4 & + & 9 & + & 16 & + \ldots + & & n^2 \\
\hline
& & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & 1 \\
& & & & 3 & & 3 & & 3 & & & 3 \\
& & & & & & 5 & & 5 & & & 5 \\
& & & & & & & & 7 & & & 7 \\
& & & & & & & & & & & \vdots \\
& & & & & & & & & & & 2n-1
\end{array}$$

Series útiles

- Utilizando la descomposición anterior y agrupando por filas:

$$S = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 \cdot n + 3 \cdot (n-1) + 5 \cdot (n-2) + \cdots + (2n-1) \cdot 1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (2i-1)(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n} \left(2in - 2i^2 + 2i - n + i - 1\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (2n+3)i - 2\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= (2n+3)\sum_{i=1}^{n} i - 2S - n^2 - n = \frac{(2n+3)n(n+1)}{2} - 2S - n^2 - n \qquad \Longrightarrow$$

Series útiles

- Pasando la serie deseada al lado izquierdo:

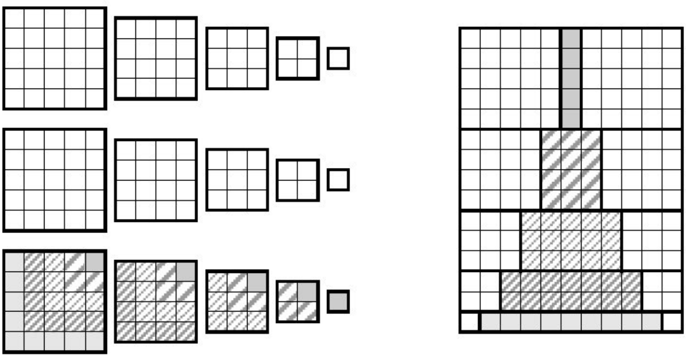
$$3S = \frac{(2n+3)n(n+1)}{2} - n^2 - n$$

$$S = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n \cdot 2(n+\frac{1}{2})(n+1)}{6}$$

$$S = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

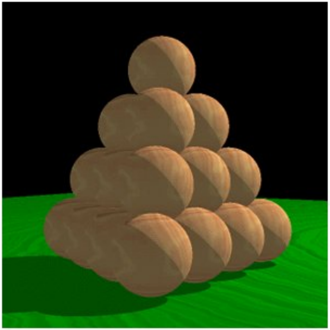
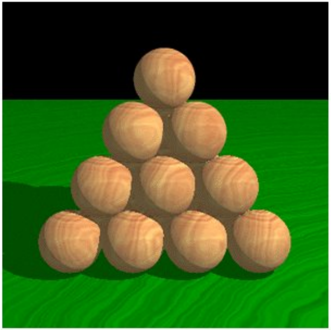
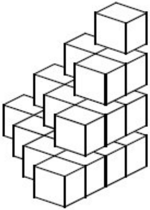
Series útiles

- Demostración visual:



Ejercicio

- Contar el número de bolas para una pirámide de altura n

$$S = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+3+\ldots+n)$$

Solución

- Agrupando los términos en cada paréntesis:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i$$

- Agrupando según el número de veces que se suma un determinado entero:

$$S = \sum_{i=1}^{n} i(n-i+1) = n\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

- La solución es:

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$

Series útiles

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

- Se puede ver gracias a:

$$\begin{array}{lcccccccc}
1^2 & = & 1^3 & & & & & & \\
3^2 & = & 1^3 & + & 2^3 & & & & \\
6^2 & = & 1^3 & + & 2^3 & + & 3^3 & & \\
10^2 & = & 1^3 & + & 2^3 & + & 3^3 & + & 4^3
\end{array}$$