

# Fundamentos matemáticos

Màxim Borrell Vidal (Coordinador)

PID\_00152574

Material docente de la UOC



Universitat Oberta  
de Catalunya

[www.uoc.edu](http://www.uoc.edu)

**Màxim Borrell Vidal**

Coordinador. Catedrático de Economía Financiera y Contabilidad. Ha escrito diversos libros y artículos sobre finanzas y es experto en mercados financieros.

**Margarida Coromines**

Licenciada en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona. Máster de Economía y Empresa por la Universidad Pompeu Fabra.

**Anna Espinal**

Licenciada en Matemáticas por la Universidad Autónoma. Máster en Análisis Económico organizado por el Departamento de Teoría e Historia Económica de la UAB.

**Antoni Montes Lozano**

Profesor titular de la Universidad Politécnica de Cataluña. El ámbito en que desarrolla la investigación es el álgebra computacional en la Facultad de Matemáticas de la UPC.

**Jaume Paradís Balaux**

Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Barcelona. Profesor titular de la Escuela de Ciencias Empresariales de la Universidad Pompeu Fabra.

**Ricard Torres Bargalló**

*Ph. D. en Managerial Economics and Decision Sciences*, Universidad de Northwestern. Actualmente es profesor en la Universidad de Gerona.

**Frederic Udina**

Es profesor de Matemática aplicada de la Universidad Pompeu Fabra desde el año 1990 donde imparte asignaturas de matemáticas y de probabilidad en la Facultad de Economía. Es licenciado en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona.

**Pelegrí Viader Canals**

Doctor por la Universidad Politécnica de Cataluña. Profesor titular de la Escuela de Ciencias Empresariales de la Universidad Pompeu Fabra.

Primera edición: febrero 2010

© Margarida Coromines, Anna Espinal, Antoni Montes Lozano, Jaume Paradís Balaux, Ricard Torres Bargalló, Frederic Udina, Pelegrí Viader Canals

Todos los derechos reservados

© de esta edición, FUOC, 2010

Av. Tibidabo 39-43, 08035 Barcelona

Diseño: Manel Andreu

Ilustraciones: Javier Andrada

Depósito legal: B-2.404-2010

ISBN: 978-84-692-8546-6

*Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.*



Arquímedes (hacia 287-212 a.C.) fue uno de los grandes sabios griegos que utilizó la matemática para las aplicaciones prácticas

*La Edad Media tuvo una enorme ventaja sobre la nuestra. Todavía se consideraba decoroso, más aún, esencial para la vida, aprender un oficio y aprenderlo bien. No existían cursos breves ni enseñanzas condensadas.*

H. Van Loon (1931, pág. 23)

*Puedo comprender, rey Gelón, que estas cosas parecieran increíbles para la mayor parte de los que no se han dedicado al estudio de la matemática.*

Arquímedes



## Introducción

Los autores quieren abrir de par en par la puerta de entrada a una materia fascinante (a pesar de la mala prensa que ha tenido entre los que no han disfrutado de un buen profesor), ya que supone un estímulo intelectual que incita a la reflexión y a la mejora del hábito de pensar.

Las matemáticas fascinan y son prácticas por sus magníficas aplicaciones en diferentes campos científicos y técnicos, entre los que se encuentra el económico. No olvidemos las palabras del Génesis: “Yo he hecho el Mundo con la Medida, el Número y los Pesos”.

El ánimo que nos ha guiado y animado a escribir las páginas que tenéis por delante se podría resumir con las palabras siguientes:

“He preferido la utilidad de ser comprendido, al honor de pasar por docto”.

Marqués de Caracciolo, en el prólogo de su obra *La conversación consigo mismo*. Madrid, 1786.

### Sugerencias para el estudio

Empezar a partir de los conocimientos previos es una buena estrategia para seguir adelante. Es evidente que siempre habrá dudas; pero, ante una duda persistente, no dudéis...: hay un consultor que os clarificará la cuestión. Nos gustaría comprobar que cada vez os interesan más las posibilidades de aplicación a la economía que presenta esta área.

Como veréis en el índice, la asignatura tiene seis créditos, repartidos en siete módulos:

- Los módulos “Matrices y sistemas de ecuaciones” y “Vectores y aplicaciones lineales” desarrollan de forma muy clara, práctica y eficaz una problemática que seguramente ya habíais estudiado parcialmente (como los vectores, las matrices, los sistemas de ecuaciones...), pero conviene profundizar en ellos para entender cuestiones y asignaturas que veréis posteriormente (como el análisis *input-output* y la *Econometría*).
- El módulo “Los números. La medida de cantidades” desarrolla las sucesiones y series infinitas, que todavía no hemos visto nunca, y que inesperadamente surgen aquí y allá al estudiar temas económicos tratados cuantitativamente.
- En el módulo “Las funciones de una variable” se introduce el concepto de función real de una variable y los de crecimiento y decrecimiento de una función. Además, se tratan algunos casos especialmente importantes de funciones como son la función exponencial y la logarítmica.

- En el módulo “Las ideas básicas del cálculo” se presentan los conceptos de continuidad y límites de funciones. En la segunda parte de este módulo, se aborda la idea de derivada como medida del cambio de una variable respecto a otra, y se profundiza en algunos aspectos del cálculo diferencial. El módulo se completa con la exposición del concepto de integral de una función, de su interpretación económica, y de algunas de sus propiedades.
- En el módulo “Apliquemos las técnicas del cálculo” se utilizan de forma operativa los contenidos de cálculo diferencial presentados en el módulo anterior, abordándose aquí el problema de la optimización de funciones.
- En el último módulo, “Las funciones de varias variables”, los conceptos básicos de función de una variable se extienden a los de varias variables, lo cual es imprescindible, porque un fenómeno económico depende, en general, de diferentes factores; por ejemplo, el volumen de la cosecha de arroz en un ámbito geográfico determinado y correspondiente a un año determinado depende, entre otros factores, de la calidad y la cantidad de la siembra, del clima, de la cantidad de abono que se utilice, de la existencia de enfermedades de la planta, del uso de plaguicidas, etc., todo ello relacionado con el trabajo humano, el capital invertido, la organización del mencionado trabajo y la comercialización del producto final (ya que una buena comercialización puede dar lugar a un aumento de ventas y, por lo tanto, a un aumento de la superficie destinada a la cosecha de arroz...)

Para acabar, añadiremos algo más sobre la confección de los módulos; como ya sabéis, constan de diferentes partes:

- texto con ejemplos y ejercicios propuestos,
- solucionario de los ejercicios,
- ejercicios de autoevaluación,
- y solucionario de los ejercicios de autoevaluación.

Se ha intentado proceder gradualmente, por lo tanto, al llegar al ejercicio de autoevaluación, debería tenerse la satisfacción de saber responder correctamente la mayoría de las cuestiones propuestas. Pero, aun así, esperamos que la solución detallada del ejercicio reduzca a conjunto vacío las dificultades esporádicas que puedan surgir.

## Objetivos

Los objetivos que pretendemos alcanzar mediante el material que presentamos son:

1. Completar lo que ya conocéis sobre matrices, vectores, sucesiones, etc.
2. Representar gráficamente funciones de una variable.
3. Profundizar en la derivación e integración de funciones.
4. Introducir el tema de la optimización.
5. Presentar las funciones de varias variables.
6. Aportar una visión aplicada a la economía de las matemáticas.

## Contenidos

Módulo didáctico 1

### **Matrices y sistemas de ecuaciones**

Antoni Montes Lozano

1. Introducción
2. Matrices
3. El método de Gauss
4. Sistemas homogéneos
5. Determinantes y regla de Cramer
6. Matriz inversa
7. Ejemplos económicos

Módulo didáctico 2

### **Vectores y aplicaciones lineales**

Pelegrí Viader Canals

1. Vectores
2. Aplicaciones lineales
3. Diagonalización de matrices

Módulo didáctico 3

### **Los números. La medida de cantidades**

Jaume Paradís Balaux

1. Los números. La medida de cantidades
2. La densidad de los números racionales
3. Aproximación de un número irracional mediante racionales
4. Definición de número real mediante intervalos encajados
5. Sucesiones de números reales
6. Series numéricas
7. Introducción a las series de potencias
8. Ejemplo económico

Módulo didáctico 4

### **Las funciones de una variable**

Frederic Udina Abelló, Margarida Corominas Bosch

y Anna Espinal Berenguer

1. Las funciones son modelos para las relaciones entre magnitudes
2. Las funciones lineales
3. El ordenador dibuja funciones para nosotros
4. No todas las curvas son rectas
5. ¿Qué podemos hacer con todo lo que sabemos?
6. ¡El crecimiento es la cuestión!
7. Las funciones exponenciales y las logarítmicas



## Módulo didáctico 5

**Las ideas básicas del cálculo**

Frederic Udina Abelló, Margarida Corominas Bosch y Anna Espinal Berenguer

1. Las ideas de continuidad y de límite
2. ¿Cómo podemos medir el cambio, la variación?
3. El cálculo automático de derivadas
4. La derivada da mucho juego
5. ¿Puede decirme el total de los beneficios?
6. Relación entre la derivada y la integral
7. El cálculo automático de integrales (1)
8. El cálculo automático de integrales (2). Métodos generales
9. Los teoremas principales del cálculo

## Módulo didáctico 6

**Aplicamos las técnicas del cálculo**

Frederic Udina Abelló, Margarida Corominas Bosch y Anna Espinal Berenguer

1. Cuando las cosas parecen estar quietas
2. ¡Que vienen curvas!
3. Optimización global
4. Ejemplos y problemas de optimización
5. Última vuelta en torno a los logaritmos

## Módulo didáctico 7

**Las funciones de varias variables**

Ricard Torres Bargalló, Margarida Corominas Bosch  
y Anna Espinal Berenguer (1 crédito)

1. Una primera aproximación a funciones multivariantes
2. Un viaje con el Gnuplot por funciones de dos variables

## Bibliografía

**Apostol, T.M.** (1972). *Calculus*. Barcelona: Reverté.

**Howard, A.** (1997). *Introducción al álgebra lineal* ( 2.<sup>a</sup> ed.). México: Limusa.

**Chiang, A.C.** (1996). *Métodos fundamentales de economía* (3.<sup>a</sup> ed.). Madrid: McGraw-Hill.

**Salas, S.L.** (1994). *Calculus: cálculo de una y varias variables*. Barcelona: Reverté.

**Sydsaeter, K.; Hammond, P.J.** (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid: Prentice Hall.