Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas

TEMA I. EL MODELO ELECTROMAGNÉTICO BASADO EN LAS ECUACIONES DE MAXWELL.

TEMA II. MEDIOS Y TRANSFERENCIA DE ENERGÍA.

TEMA III. ONDAS PLANAS HOMOGÉNEAS (OPH).

TEMA IV. INCIDENCIA DE ONDAS PLANAS SOBRE OBSTÁCULOS PLANOS.

TEMA V. ONDAS GUIADAS POR SOPORTE FÍSICO. LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN.

Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas
2º curso, 2º cuatrim. del Grado en Ing. de T^{as} y Servicios de Telecomunicación
Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid
Jorge A. Ruiz Cruz (jorge.ruizcruz@uam.es, http://rfcas.eps.uam.es)

TEMA I. EL MODELO ELECTROMAGNÉTICO BASADO EN LAS ECUACIONES DE MAXWELL.

OBJETIVOS ESPECIFICOS POR TEMA SEGÚN LA GUÍA DOCENTE DE FTPO	
Al final del tema* el estudiante deberá ser capaz de:	
1.1	Enunciar las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial e integral en el tiempo, con las relaciones constitutivas para medios sencillos
1.2	Identificar las ecuaciones del régimen estático, cuasi-estático y con variación temporal arbitraria
1.3	Operar con vectores cuyas componentes son números complejos y dominar la notación vectorial y los números complejos
1.4	Utilizar los operadores vectoriales y aplicarlos a las ecuaciones de Maxwell
1.5	Aplicar la trasformada de Fourier a vectores y a ecuaciones integrales y diferenciales
1.6	Obtener las ecuaciones de Maxwell en la frecuencia aplicando la transformada de Fourier
1.7	Escribir de manera rigurosa un campo electromagnético monocromático en el tiempo y la frecuencia.

(*) cada competencia no se corresponde exactamente con un sub-apartado del tema; las competencias mostradas son en conjunto para todo el tema completo)

Tema I. El modelo electromagnético basado en las ecuaciones de Maxwell.

Jorge A. Ruiz Cruz (jorge.ruizcruz@uam.es, http://rfcas.eps.uam.es)
Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid

Grupo de RadioFrecuencia:
Circuitos, Antenas y Sistemas

I.1. Definición del modelo electromagnético macroscópico: ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo.

- "Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas" (FTPO) es una asignatura de introducción a los campos electromagnéticos en el ámbito de los sistemas de comunicaciones.

- Los fenómenos de transmisión y propagación de ondas son estudiados mediante el modelo electromagnético de Maxwell. Este modelo es el que se utilizará durante toda la asignatura.

- El enfoque de FTPO es deductivo: se partirá de las leyes fundamentales, las ecuaciones de Maxwell cuyo estudio se inicia en este tema. De estas ecuaciones fundamentales se irán derivando leyes y resultados específicos para distintos casos de interés para el ámbito de los sistemas de comunicaciones.

- En este tema se presentan las ecuaciones de Maxwell en su forma más general, describiendo los elementos que la forman.

- En temas posteriores se irán particularizando esas ecuaciones para diversas situaciones comunes, empezando por temas de campos estáticos, hasta llegar a variación temporal arbitraria (situación real en telecomunicaciones, que implica propagación de ondas mensaje entre emisor y receptor).

Introducción

• Considérese una sistema de ***tele***-comunicaciones donde el emisor y el receptor están situados en diferentes puntos muy distantes uno del otro.

• El medio de transmisión puede ser un cable (medio guiado) o ondas radioeléctricas emitidas y recibidas por una antena emisora y otra receptora (las ideas básicas de propagación en ambos casos se estudiarán es esta asignatura).

• Supóngase que el emisor transmite una señal (en forma de energía electromagnética) durante un breve instante de tiempo, de forma que el tiempo que tarda la energía en llegar al receptor es mucho mayor que el tiempo de emisión.

• El hecho es que el sistema (si está bien diseñado) ha permitido el intercambio de la señal de información. Pero ¿quién es el portador de esta energía durante el tiempo de propagación del emisor al receptor?.

• La respuesta es que la energía la transporta el campo electromagnético, y por tanto, dicho campo tiene entidad física. La noción del campo electromagnético es la base de la teoría moderna del electromagnetismo y el "*vehículo*" donde "*transportar señales*" para los sistemas de comunicaciones.

Contexto del modelo electromagnético de Maxwell

• Se pueden reconocer tres grandes áreas en la física:

- Gravitacional (interacción entre masas).
- Electromagnética (interacción entre cargas).
- Nuclear (interacción entre partículas subatómicas), que a su vez puede dividirse en dos (según el rango de las interacciones): fuerte y débil.

• Esta asignatura está enfocada a los fenómenos de naturaleza electromagnética, cuyo estudio se puede abordar desde el ***modelo propuesto por James Clerk Maxwell***.

• Este es un modelo que describe los ***fenómenos electromagnéticos en el ámbito macroscópico***, usando como herramientas los campos vectoriales y las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

• ¿Cómo afectó al modelo la parición de la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica?. La primera (restringida) hace referencia en su origen, precisamente, a fenómenos electromagnéticos, mientras que la segunda se refiere a fenómenos microscópicos.

• En ambos casos, el modelo clásico de Maxwell no se ve afectado, en tanto en cuanto se traten fenómenos electromagnéticos ***macroscópicos***.

Modelo macroscópico vs. microscópico

• El modelo de Maxwell está orientado a los fenómenos electromagnéticos, los cuales tienen su origen en la interacción entre cargas: se va a ver ahora que se entiende desde un punto de vista macroscópico al hablar de distribuciones de carga y de corriente.

• Si la carga en la materia se presenta con carácter discreto y microscópico, ¿cómo se entiende el mencionado "***punto de vista macroscópico***"?.

- La respuesta está en tomar en el estudio elementos de volumen ***suficientemente grandes*** para englobar un elevado número de partículas discretas cargadas,

- **pero a su vez *suficientemente pequeño*** para poder utilizar una descripción basada en cálculo diferencial.

compromiso

• Ej: Un cubo elemental de una micra ($10^{-6}m$) tiene un volumen de $10^{-18}m^3$, el cual contiene unos 10^{11} átomos.

- Cualquier función que varíe en saltos de una micra, será útil desde el punto de vista macroscópico, porque engloba el efecto agregado de muchas partículas,

- y a su vez, cualquier volumen de este tamaño podrá considerarse como un elemento diferencial de volumen dV.

Distribución de carga (I)

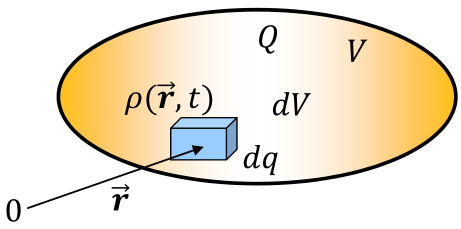
• De esta manera, se podrá definir una densidad volumétrica de carga (carga por unidad de volumen) que describa como está distribuida la carga por el espacio:

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

densidad volumétrica de carga $[\mathrm{C/m^3}]$

• La carga total en un recinto cualquiera V será:

$$Q(t) = \iiint_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)dV \qquad [\mathrm{C}]$$

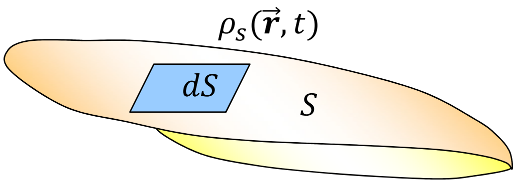


• De igual manera, a veces será útil el concepto de densidad superficial de carga, cuando ésta se distribuye en una región (típicamente la superficie de un conductor) donde:

- una de sus dimensiones es despreciable frente a la distancia de observación,

- pero a su vez esa dimensión que se obvia es suficientemente grande desde el punto de vista microscópico.

Distribución de carga (y II)



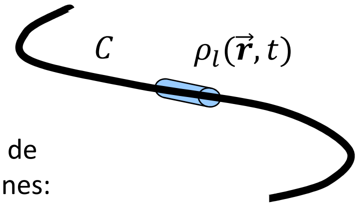
- Densidad superficial de carga:

$$\rho_s(\vec{\boldsymbol{r}},t) \equiv \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \qquad [\mathrm{C/m^2}]$$

$$Q(t) = \iint_S \rho_s(\vec{\boldsymbol{r}},t)dS \qquad [\mathrm{C}]$$

- También se puede hablar de densidades lineales de carga: dos dimensiones suficientemente grandes macroscópicamente pero despreciables frente a la distancia de observación:

$$\rho_l(\vec{\boldsymbol{r}},t) \equiv \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \qquad Q(t) = \int_C \rho_l(\vec{\boldsymbol{r}},t)dl$$



- Para las conversiones matemáticas entre las distintas distribuciones de corriente se usa la función delta de Dirac en una, dos y tres dimensiones:

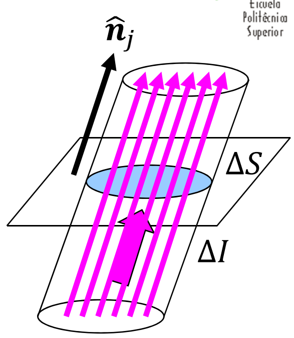
  - Ej: especificar una distribución superficial (sobre superficie $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_s$) de carga como una función densidad volumétrica $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \rho_s(\vec{\boldsymbol{r}})\delta^{1D}(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_s)$

  - Ej: "carga puntual en $\vec{\boldsymbol{r}}_0$" (desde el punto de vista macroscópico) $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q_0\delta^{3D}(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$

Distribución de corriente (I)

- Si las cargas están en movimiento, se tendrá una distribución de corriente, cuya densidad se puede caracterizar como el:

cociente entre la cantidad de carga por unidad de tiempo que atraviesa un elemento de superficie normal a la dirección en que se mueven y el valor de dicho elemento



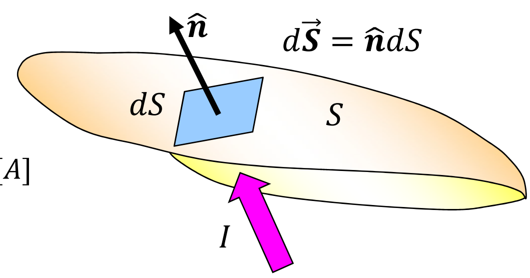
$$J(\vec{\boldsymbol{r}},t) \equiv \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q/\Delta t}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \qquad [(\mathrm{C/s})/\mathrm{m^2}] = [\mathrm{A/m^2}]$$

- Se define el **vector densidad de corriente** para tener la información de la dirección y sentido de movimiento de las cargas (por convención histórica **se fija el sentido según las cargas positivas**), que se definirá con el vector dirección unitario y sin dimensiones $\hat{\boldsymbol{n}}_j$:

$$\vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \equiv J(\vec{\boldsymbol{r}},t)\hat{\boldsymbol{n}}_j \qquad [\mathrm{A/m^2}]$$

- Corriente total que pasa por un casquete de superficie *S*

$$I(t) = \iint_S \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} \qquad [A]$$



Distribución de corriente (II)

• El vector de densidad de corriente $\vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ es, estrictamente, un vector de densidad superficial de corriente volumétrica:

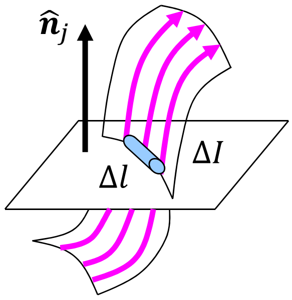
- Densidad superficial porque es la densidad de flujo de cargas a través de una superficie en la unidad de tiempo

- Corriente volumétrica porque las cargas se mueven dentro de un volumen

• También existe el vector densidad lineal de corriente superficial, o simplemente **vector densidad superficial de corriente** $\vec{\boldsymbol{J}}_s(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ (porque modela la corriente fluyendo por una superficie) definido como:

- Vector dirigido según la línea de flujo de corriente que pasa por el punto o, dicho de otra manera, "vector contenido en la superficie por la que circula la corriente"

- cuyo módulo es la carga por unidad de tiempo que cruza la unidad de longitud de la línea ortogonal a la línea de flujo

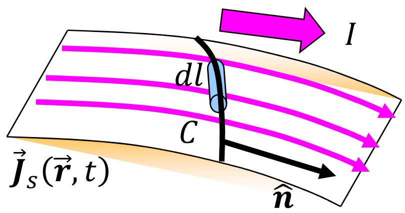


$$\vec{\boldsymbol{J}}_s(\vec{\boldsymbol{r}},t) \equiv \hat{\boldsymbol{n}}_j \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q/\Delta t}{\Delta l} = \hat{\boldsymbol{n}}_j \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \qquad [\mathrm{A}/m]$$

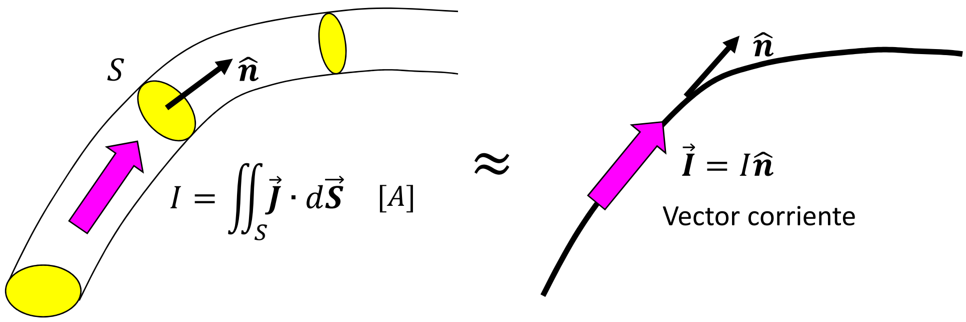
Distribución de corriente (y III)

• La corriente que fluye por una superficie se podría calcular integrando la densidad de corriente superficial sobre la línea de interés:

$$I(t) = \int_C \vec{\boldsymbol{J}}_s(\vec{\boldsymbol{r}},t) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dl \quad [A]$$



• También es útil el concepto de corriente filiforme: aproximación de las corrientes que circulan a lo largo de un recinto de dimensiones transversales despreciables frente a la distancia al punto de observación:



Ley de conservación de la carga

• Un postulado clave de los desarrollos que se van hacer es la conservación de la carga, de acuerdo con el hecho de no existir evidencia ni comprobación alguna de que la carga pueda crearse o destruirse desde el punto de vista macroscópico:

• **La disminución de la carga almacenada en un recinto $\boldsymbol{V}$ (fijo) al transcurrir el tiempo vendrá dada por el flujo de corriente a través de la superficie $\boldsymbol{S}$ que lo rodea**:

$$-\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho dV\right) = \oint\!\!\!\oint_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}}$$

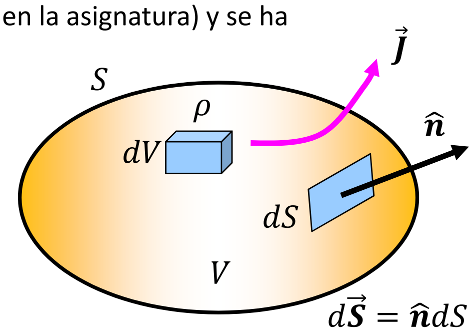
$$\frac{-d}{dt}\left(\iiint_V \rho dV\right) = \iiint_V \frac{-\partial\rho}{\partial t} dV = \oint\!\!\!\oint_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} \overset{(1)}{=} \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}\, dV \;\Longrightarrow\; \iiint_V \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{J}} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) dV = 0$$

- Se ha supuesto que se cumplen las condiciones matemáticas para intercambiar la derivación y el signo integral (se hará muy frecuentemente en la asignatura) y se ha aplicado el teorema de Gauss en (1).

- Puesto que además la igualdad se debe cumplir para cualquier volumen (fijo en t) que se elija:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) + \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad de la carga



El campo electromagnético. Definición

• Se denomina punto ordinario del espacio a todo aquel en el que las propiedades físicas del medio no presentan discontinuidades.

• El campo electromagnético es el conjunto de los cuatro campos vectoriales dependientes de la posición en el espacio y del tiempo siguientes:

$\vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$: Intensidad de campo Eléctrico
$\vec{D}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$: Inducción Eléctrica
$\vec{B}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$: Inducción Magnética
$\vec{H}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$: Intensidad de campo Magnético

que son finitos, continuos, y con derivadas finitas y continuas en todos los puntos ordinarios del espacio, y que verifican las siguientes relaciones, denominadas **ecuaciones de Maxwell**:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) + \frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t}$$

Fuentes del campo electromagnético

• El postulado de Maxwell define las fuentes de tipo rotacional del campo E-M:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

("donde hay variación temporal de $\vec{B}$, hay líneas de $\vec{E}$ *circulando* alrededor) y donde hay $\vec{J}$ y/o variación temporal de $\vec{D}$, hay $\vec{H}$ *circulando* a su alrededor):

• Las fuentes de tipo divergencia, se pueden obtener de las dos anteriores, como se verá luego:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)$$ ("las líneas de $\vec{D}$ salen/entran de/en las cargas +/–")

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0$$ ("las líneas de $\vec{B}$ son cerradas")

• A la vista de las ecuaciones anteriores, ρ y $\vec{J}$ (relacionadas por la ecuación de continuidad), es decir, las cargas eléctricas en reposo o en movimiento, son las fuentes "*originales*" del campo electromagnético.

• Sin embargo, un campo electromagnético puede originar una redistribución de las cargas, lo cual a su vez modificará el campo: por eso no siempre está muy clara la separación entre causa y efecto y a veces que se habla de campo fuente, campo impreso,…

Fuentes del campo EM tipo divergencia

• Divergencia aplicada a la primera ecuación de Maxwell:

$$\nabla \cdot \left\{ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} \Longrightarrow \nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = 0 = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = cte\ en\ el\ tiempo$$

- Por experimentación y atendiendo a que las líneas de $\vec{B}$ se cierran sobre si mismas, se concluye que: $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0$

• Divergencia aplicada a la segunda ecuación de Maxwell, junto con la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \left\{ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\} \Longrightarrow \nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = 0 = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \cdot \vec{D}}{\partial t} \Longrightarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Longrightarrow \nabla \cdot \vec{D} - \rho = cte\ en\ el\ tiempo$$

- Por experimentación y atendiendo a que las líneas de $\vec{D}$ salen de las cargas positivas y se cierran en las negativas, se concluye que : $\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)$

Distribuciones de carga y corriente libres

• En las ecuaciones de Maxwell, ρ **se refiere a la densidad de carga libre.**

- Ej: electrones de conducción en un metal o los electrones que inyecta en un dieléctrico un haz electrónico de alta energía.

- El término libres viene en oposición al término de cargas ligadas (las que se acumulan en los desplazamientos que ocurren a escala molecular cuando se le aplica un campo eléctrico a un dieléctrico ideal , y que por tanto están ligadas a estructuras bien definidas).

• Igualmente, en las ecuaciones de Maxwell $\vec{J}$ **se refiere a las densidades de corrientes libres,** que puede comprender tanto corrientes de conducción como convección:

- Corrientes de convección: movimiento de cargas en el vacío o un gas enrarecido: haces de electrones en un tubo de rayos catódicos o violentos movimientos de partículas durante una tormenta; ***no se rigen por la ley de Ohm***.

- Corrientes de conducción: cuando se aplica un campo eléctrico a un conductor tiene lugar un movimiento organizado de los electrones de conducción; ***se rigen por la ley de Ohm***.

• Los diferentes tipos de materiales y la ley de Ohm generalizada, se verán en el siguiente tema.

Corrientes externas e inducidas

• Las corrientes de que aparecen en la 2º ecuación de Maxwell también se pueden dividir en corrientes externas e inducidas:

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}_{ext}(\vec{r},t) + \vec{J}_{ind}(\vec{r},t) \Longrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{ext} + \vec{J}_{ind} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{J}_{ext}$: las impuestas/impresas por quien desea generar el campo electromagnético. (las que impone el generador y mantiene independientemente del campo producido, "análogo al generador ideal en teoría de circuitos")

$\vec{J}_{ind}$: las que aparecen inducidas en diferentes puntos del espacio por el hecho de que haya cargas y corrientes libres en el seno del campo electromagnético producido

• El cálculo de $\vec{J}_{ind}$ es, en general, muy difícil puesto que implica resolver un problema de dinámica de partículas cargadas en el seno de un campo EM.

- No obstante, si esta corriente es exclusivamente el resultado de un fenómeno de conducción, su obtención es inmediata sin más que usar la correspondiente relación constitutiva. Por ejemplo para conductores vendría dada por la ley de Ohm generalizada (ver siguiente tema): $\vec{J}_{ind} = \sigma\vec{E}$

Efectos *"observables"* del campo electromagnético

• Introducidos los cuatro vectores fundamentales de electromagnetismo, surgen las preguntas: ¿como caracterizarlos?, ¿como se reflejan o que efectos tienes en las propiedades de la materia?

- Una posible caracterización resulta posible en base a los efectos de tipo mecánico que viene ligados a los campos, las cargas y la corrientes (recuérdese los experimentos de Coulomb, Ampere, Gauss,..)

• Si en una zona del espacio V' existen campos $\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{B}}$ y se admite que al hacer presente en ese volumen V' una distribución ρ' o $\vec{\boldsymbol{J}}'$ ajenos a dichos campos no los perturban, se puede escribir de acuerdo a la evidencia experimental:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \Delta q(\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t))$$

[N]

Fuerza de Lorentz que aparece sobre una carga elemental Δq que se mueve a velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}$ en el seno de un campo EM

$$\vec{\boldsymbol{F}}(t) = \iiint_{V'} \rho'\vec{\boldsymbol{E}}dV' + \iiint_{V'} \vec{\boldsymbol{J}}' \times \vec{\boldsymbol{B}}dV'$$

Fuerza total que aparece sobre la distribución de cargas y corriente

$$\vec{\boldsymbol{J}}'(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \rho'(\vec{\boldsymbol{r}},t)\vec{\boldsymbol{v}} \quad [\mathrm{A/m^2}]$$

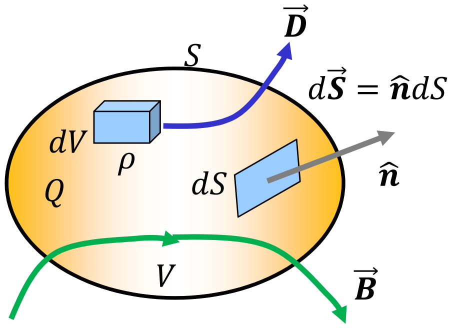
Flujo de los vectores inducción eléctrica y magnética

• **Ley de Gauss**: el flujo total de $\vec{\boldsymbol{D}}$ sobre una superficie cerrada S es igual a la carga total en el volumen V encerrado por S

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) \iff \oiint_S \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = Q(t)$$

• **Ley del flujo nulo** de $\vec{\boldsymbol{B}}$ a través de una **superficie cerrada**:

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = 0 \iff \oiint_S \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = 0$$



• La demostración en los dos casos se basa en el teorema de Gauss (1) :

$$\oiint_S \vec{\boldsymbol{D}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} \overset{(1)}{=} \iiint_V \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}}dV = \iiint_V \rho dV$$

• La densidad de carga es la **fuente escalar** del campo $\vec{\boldsymbol{D}}$: las líneas tienen su origen en regiones de carga positiva y su fin en regiones de carga negativa.

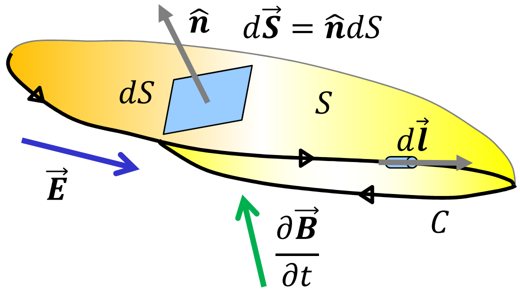
• ***No existen monopolos o cargas magnéticas*** que hagan de fuente escalar del campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ desde donde entre/salga; las líneas de $\vec{\boldsymbol{B}}$ son cerradas, dando flujo nulo a través de cualquier ***S cerrada***.

Circulación del vector intensidad de campo eléctrico

• **Ley de inducción de Faraday**: la circulación de $\vec{\boldsymbol{E}}$ a través un contorno cerrado (fuerza electromotriz) es igual al flujo de la inducción magnética que lo atraviesa, con signo negativo:

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} \Longleftrightarrow \mathrm{fem}_E(t) = \oint_C \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$$

• La fuente vectorial del campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ es la variación temporal de inducción magnética ($\partial\vec{\boldsymbol{B}}/\partial t$): el campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ *circula* alrededor de un campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ variable en el tiempo



• La demostración se basa en el teorema de Stokes aplicado a una superficie S (fija en el tiempo) que se apoya sobre un contorno cerrado C (1):

$$\oint_C \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}} \overset{(1)}{=} \iint_S \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \iint_S -\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot d\vec{\boldsymbol{S}}\right)$$

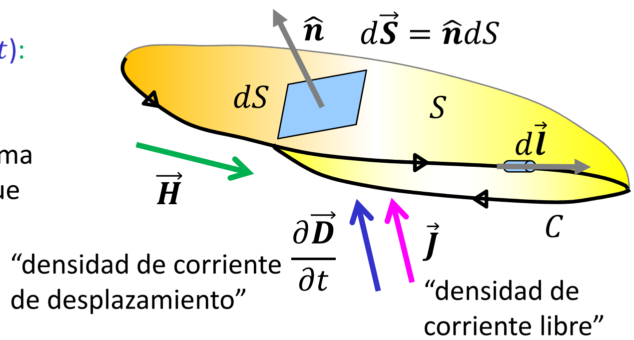
• Notar que el resultado se mantiene para cualquier otra superficie S que se apoye en C.

Circulación del vector intensidad de campo magnético

• **Ley de Ampere generalizada**: la circulación de $\vec{\boldsymbol{H}}$ a través un contorno cerrado es igual a la suma total de corrientes generalizadas (libres y de desplazamiento) que lo atraviesan:

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) + \frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} \Longleftrightarrow \oint_C \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = I(t) + \frac{d\Phi_D(t)}{dt}$$

• Las fuentes vectoriales del campo $\vec{\boldsymbol{H}}$ son las corrientes libres ($\vec{\boldsymbol{J}}$) y de desplazamiento ($\partial\vec{\boldsymbol{D}}/\partial t$): el campo $\vec{\boldsymbol{H}}$ *circula* alrededor de ellas



• La demostración se basa de nuevo en el teorema de Stokes aplicado a una superficie S fija en t que se apoya sobre un contorno cerrado C(1):

$$\oint_C \vec{\boldsymbol{H}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}} \overset{(1)}{=} \iint_S \nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} =$$

$$= \underbrace{\iint_S \vec{\boldsymbol{J}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}}}_{\text{libres}} + \underbrace{\iint_S \frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}}}_{\text{desplazamiento}} =$$

Corrientes totales: libres desplazamiento

$$= \iint_S \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} + \frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot d\vec{\boldsymbol{S}}\right)$$

Resumen de las ecuaciones de Maxwell

	Forma diferencial	Forma integral
• Ley de Faraday	$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\dfrac{d}{dt}(\iint_S \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}})$ $(= \mathrm{fem}_E(t) = -\dfrac{d\Phi_B}{dt})$
• Ley de Ampere generalizada	$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{J}} + \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{\boldsymbol{H}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \iint_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} + \dfrac{d}{dt}(\iint_S \vec{\boldsymbol{D}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}})$ $(= I + \dfrac{d\Phi_D}{dt} = I + I_{desp})$
• Ley de Gauss	$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho$	$\oint\!\!\oint_S \vec{\boldsymbol{D}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \iiint_V \rho dV \quad (= Q)$
• Ley del campo magnético	$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$	$\oint\!\!\oint_S \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = 0$

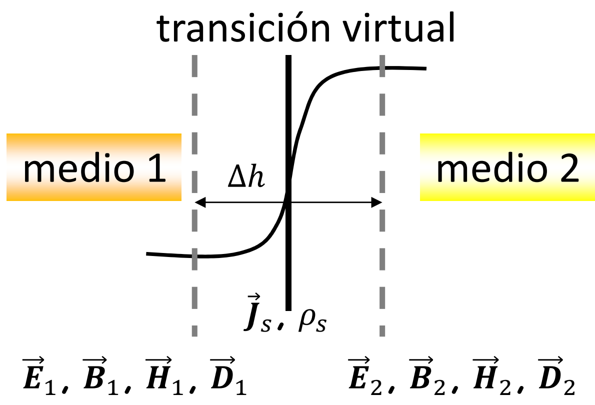
Puntos no ordinarios. Cambio de medio.

- El campo electromagnético se ha postulado en puntos ordinarios del espacio (donde las propiedades físicas del medio no presentan discontinuidades).

- ¿Qué sucede en los puntos no ordinarios, es decir, cuando hay discontinuidades abruptas de medio? En este caso, las ecuaciones diferenciales (que implican continuidad de las funciones implicadas) no son válidas en la **superficies de discontinuidad** entre medios diferentes.

- Desde el punto de vista macroscópico cada medio tendrás sus propiedades físicas particulares y las funciones que lo describan, y por tanto la superficie de separación implica un cambio brusco de los mismos.

- Sin embargo, para la demostración (ver Apéndice del Tema I.1) se considera una zona de transición virtual desde el punto de vista incremental ($\Delta h \rightarrow 0$) en la que los parámetros cambian rápidamente pero de forma continua y las ecuaciones en su forma integral siguen valiendo.



Condiciones de contorno en puntos no ordinarios

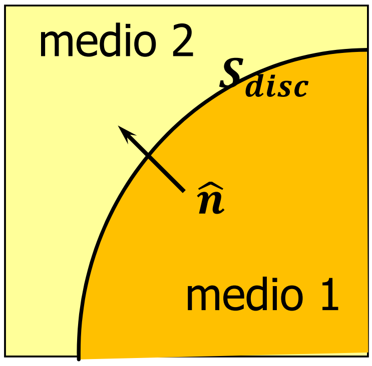
• Las condiciones de contorno (también denominadas de salto o de frontera) en la superficie del cambio de medio $\boldsymbol{S_{disc}}$ (también llamada superficie de contacto, de discontinuidad o interfaz entre los medios) son :

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{E}}_2(\vec{\boldsymbol{r}},t) - \vec{\boldsymbol{E}}_1(\vec{\boldsymbol{r}},t))\big|_{S_{disc}} = \boldsymbol{0}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{H}}_2(\vec{\boldsymbol{r}},t) - \vec{\boldsymbol{H}}_1(\vec{\boldsymbol{r}},t))\big|_{S_{disc}} = \vec{\boldsymbol{j}}_s(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_2(\vec{\boldsymbol{r}},t) - \vec{\boldsymbol{D}}_1(\vec{\boldsymbol{r}},t))\big|_{S_{disc}} = \rho_s(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}}_2(\vec{\boldsymbol{r}},t) - \vec{\boldsymbol{B}}_1(\vec{\boldsymbol{r}},t))\big|_{S_{disc}} = 0$$



• En la interfaz, las componentes tangenciales de $\vec{\mathbf{E}}$ y las normales de $\vec{\boldsymbol{B}}$ son continuas.
Si existe densidad superficial de carga en la interfaz, las comp. normales de $\vec{\boldsymbol{D}}$ serán discontinuas.
Si existe densidad superficial de corriente en la interfaz, las comp. normales de $\vec{\boldsymbol{H}}$ serán discontinuas.

• De igual manera que las ecuaciones de Maxwell fundamentales son dos (las del rotacional), las fundamentales aquí son las condiciones de contorno para $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{H}}$.