TEMA 2: **REPASO DE GEOMETRÍA EUCLÍDEA**

5. Espacios afines euclídeos

Hasta ahora solo hemos hablado de rectas, planos, subespacios afines, de sus dimensiones, de sus posiciones relativas... Sin embargo, cuando uno piensa en geometría, se le vienen también a la cabeza formas, distancias (longitudes), ángulos o conceptos como el de perpendicularidad. Para incluir estas nociones en nuestro estudio introducimos un nuevo objeto, *el espacio afín euclídeo*, que es un concepto con el que en un caso, particular pero significativo, habéis trabajado ya. En efecto, en $\mathbf{R}^n$, que ya sabemos que podemos verlo como el espacio afín estándar de dimensión n sobre $\mathbf{R}$, conocemos cómo medir la distancia entre dos puntos y también cómo medir el ángulo entre dos rectas coplanarias: usando el *producto escalar estándar*. Esto lo podemos generalizar en la siguiente definición:

Definición 5.1. *Un espacio afín euclídeo* es una cuaterna $(A, V, \varphi, <,>)$, donde (A, V, φ) es un espacio afín real y $(V, <,>)$ es un espacio vectorial euclídeo (es decir, $<,>$ es un producto escalar o, dicho de otra manera, una forma bilineal simétrica definida positiva de V). La dimensión de $(A, V, \varphi, <,>)$ es la dimensión de (A, V, φ) como espacio afín sobre $\mathbf{R}$ (o lo que es lo mismo, la dimensión de V como espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$).

Usaremos las propiedades (conocidas de álgebra lineal) de un producto escalar y de la norma asociada a un producto escalar (recordemos que en un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$ la norma de un vector $v \in V$ es $||v|| = \sqrt{<v, v>}$).

Ejemplo 5.2. El ejemplo más importante de espacio afín euclídeo de dimensión n (veremos enseguida que todo espacio afín euclídeo de dimensión n es *isométrico*, aunque no de forma canónica, a él) es $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, \varphi, <,>)$, donde $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, \varphi)$ es el espacio afín estándar y $(\mathbf{R}^n, <,>)$ es el espacio vectorial euclídeo estándar (es decir, $<,>$ es el producto escalar estándar en $\mathbf{R}^n$). Llamaremos a $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, \varphi, <,>)$ el *espacio afín euclídeo estándar* de dimensión n.

En el espacio afín euclídeo estándar de dimensión n el coseno del ángulo de dos vectores de $\mathbf{R}^n$ y la distancia entre dos puntos de $\mathbf{R}^n$ se define de la manera usual. Estas definiciones se generalizan sin problemas a un espacio afín euclídeo arbitrario. Comenzamos recordando la generalización de la noción de ángulo.

Definición 5.3. *(ángulo no orientado entre dos vectores de un espacio vectorial euclídeo)* Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo y sean v_1 y v_2 dos vectores no nulos de V. Definimos el *ángulo no orientado entre* v_1 y v_2 como el arco coseno entre 0 y π de

$$\frac{<v_1, v_2>}{||v_1|| \cdot ||v_2||}$$

(recuerda que, por la desigualdad de Cauchy–Schwarz, $| <v_1, v_2> | \leq ||v_1|| \cdot ||v_2||$).

De la misma forma que el producto escalar de un espacio vectorial euclídeo V nos ha permitido generalizar la noción de ángulo de dos vectores de $\mathbf{R}^n$, también nos permitirá generalizar la noción de *perpendicularidad*, tanto de vectores de V como de subespacios afines de un espacio afín euclídeo.

Definición 5.4. Sea $(A, V, \varphi, <,>)$ un espacio afín euclídeo de dimensión n, sean v_1 y v_2 dos vectores de V y sean L_1 y L_2 dos subespacios afines de A con dirección W_1 y W_2 respectivamente.

(1) Decimos que v_1 y v_2 son *perpendiculares* u *ortogonales* si $< v_1, v_2 >= 0$ (es decir, si el angulo no orientado entre v_1 y v_2 es $\pi/2$ o si v_1 o v_2 es nulo).
(2) Decimos que L_1 y L_2 son *perpendiculares* u *ortogonales* si ocurre una de estas dos cosas:
  (2.1) cualquier vector de W_1 es ortogonal a cualquier vector de W_2 (es decir, el *complemento ortogonal* $W_2^\perp$ de W_2 cumple $W_1 \subseteq W_2^\perp$; equivalentemente, $W_2 \subseteq W_1^\perp$).
  (2.2) $W_1^\perp \subseteq W_2$ (equivalentemente $W_2^\perp \subseteq W_1$), si $\dim L_1 + \dim L_2 \geq n$.

Observación 5.5. La condición $W_1 \subseteq W_2^\perp$ implica que $\dim L_1 + \dim L_2 \leq n$. Esa es la razón de dar otra definición de ortogonalidad para cuando $\dim L_1 + \dim L_2 > n$. Observa que las condiciones (2.1) y (2.2) son equivalentes cuando $\dim L_1 + \dim L_2 = n$.

Igual que el dotar a un espacio vectorial real V de un producto escalar nos permite elegir, para cada subespacio vectorial W, un subespacio complementario de W distinguido, a saber, su *complemento ortogonal* $W^\perp$, dado un subespacio afín L, de dirección W y dimensión m, de un espacio afín euclídeo $(A, V, \varphi, <,>)$ de dimensión n y un punto $p \in A$, existe un subespacio afín por p de dimensión $n-m$ distinguido, a saber, $p + W^\perp$. De la misma manera, como en un espacio vectorial euclídeo existe una dirección distinguida para proyectar sobre un subespacio W (la dirección dada por $W^\perp$), esto permite que en un espacio afín euclídeo exista también una proyección distinguida sobre un subespacio afín L, a saber, la dada por la dirección ortogonal a L. Lo vemos en la siguiente proposición:

Proposición 5.6. *Sea $(A, V, \varphi, <,>)$ un espacio afín euclídeo de dimensión n. Sea L un subespacio afín de A de dimensión m y dirección W.*
(1) *Para cada $p \in A$, existe un único subespacio afín L' de A por p, ortogonal a L y con dimensión $n-m$. Este subespacio es $L' = p + W^\perp$.*
(2) *La aplicación*
$$\begin{array}{rccc} \pi: & A & \longrightarrow & A \\ & p & \mapsto & \pi(p), \end{array}$$
donde $\pi(p)$ es el único punto del conjunto $L \cap L'$, es una proyección (como se definió en la definición 3.25). De hecho, π es la proyección sobre L con dirección $W^\perp$ y su aplicación lineal asociada es la proyección vectorial ortogonal *sobre W (es decir, la proyección vectorial sobre W con dirección $W^\perp$).*

Demostración. Demostramos primero (1). Si L' es ortogonal a L y tiene dimensión $n-m$, la dirección W' de L' cumple $W' \subseteq W^\perp$. Como $\dim W^\perp = n-m$, $W' = W^\perp$ y L' es necesariamente $p + W^\perp$. Por otra parte (2) se sigue de forma inmediata del lema 3.23, de la proposición 3.24 y de la definición 3.25. □

Definición 5.7. A la proyección π de la proposición anterior la llamamos *proyección ortogonal* sobre L.

Damos ahora la definición de distancia en un espacio afín euclídeo arbitrario generalizando la noción de distancia que conocemos en $\mathbf{R}^n$.

Definición 5.8. *(distancia entre dos puntos de un espacio afín euclídeo)* Sea $(A, V, \varphi, <,>)$ un espacio afín euclídeo y sean $p, q \in A$. La distancia entre p y q, que abreviaremos como $\mathrm{d}(p,q)$, es la norma de $\vec{pq}$, es decir, $\mathrm{d}(p,q) = ||\vec{pq}|| = \sqrt{< \vec{pq}, \vec{pq} >}$.

Observación 5.9. La distancia entre dos puntos de un espacio afín euclídeo es un número real no negativo, siendo nula si y solo si los puntos son iguales.

Proposición 5.10. *(desigualdad triangular) Sean p_1, p_2 y p_3 tres puntos de un espacio afín euclídeo. Entonces:*
(1) $d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$;
(2) $d(p_1, p_3) = d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$ *si y solo si* p_1, p_2 *y* p_3 *están alineados y la razón simple de* p_1, p_2, p_3 *cumple* $(p_1p_2p_3) \geq 1$.

Demostración. Ejercicio (indicación: se sigue de la desigualdad de Cauchy–Schwarz y de la desigualdad triangular para la norma). □

Proposición 5.11. *(distancia mínima desde un punto a un subespacio afín). Sea* $(A, V, \varphi, <,>)$ *un espacio afín euclídeo, sea* $p \in A$, *sea* L *un subespacio afín de* A, *sea* π *la proyección ortogonal sobre* L *y sea* $p' = \pi(p)$. *Para todo* $q \in L$, $d(p, p') \leq d(p, q)$ *y la igualdad se da solo si* $p' = q$. *En particular,* $d(p, p') = \text{mín}\{d(p, q) | q \in L\}$.

Demostración. Para todo $q \in L$, $\vec{pq} = \vec{pp'} + \vec{p'q}$. El vector $\vec{pp'}$ está en la dirección de la proyección π mientras que el vector $\vec{p'q}$ está en la dirección de L. Como π es una proyección ortogonal, $\vec{pp'}$ y $\vec{p'q}$ son ortogonales. En ese caso el cuadrado de $\mathrm{d}(p, q)$ es

$$< \vec{pq}, \vec{pq} >=< \vec{pp'}, \vec{pp'} > +2 < \vec{pp'}, \vec{p'q} > + < \vec{p'q}, \vec{p'q} >=< \vec{pp'}, \vec{pp'} > + < \vec{p'q}, \vec{p'q} >,$$

por lo que $\mathrm{d}(p, p')^2$ es menor o igual que $\mathrm{d}(p, q)^2$. Por otra parte, $\mathrm{d}(p, p')^2$ es igual a $\mathrm{d}(p, q)^2$ si y solo si $< \vec{p'q}, \vec{p'q} >= 0$ y eso equivale a $\vec{p'q} = \vec{0}$, es decir, a $p' = q$. □

Sistemas de referencia cartesianos rectangulares

Al igual que hicimos para los espacios afines, queremos encontrar un modo de trabajar en un espacio afín euclídeo arbitrario como si se tratara del espacio afín euclídeo estándar. Ya vimos que, dado un espacio afín real A de dimensión n, si fijamos una referencia cartesiana $\mathscr{R}$, podemos asignar a cada punto de A una n–upla en $\mathbf{R}^n$ (sus coordenadas respecto de $\mathscr{R}$) y esto nos permite trabajar en el espacio afín estándar $\mathbf{R}^n$ (que nos resulta más familiar) en vez de trabajar en A. Con el siguiente ejemplo vemos que, en el caso de que estemos trabajando en un espacio afín euclídeo, elegir una referencia cartesiana cualquiera no es general suficiente:

Ejemplo 5.12. En el plano afín euclídeo estándar $\mathbf{R}^2$ consideramos los vectores $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (0, 1)$ y los puntos $p = (2, 2)$ y $q = (3, 3)$. El ángulo entre v_1 y v_2 es $\pi/2$. La distancia entre p y q es $\sqrt{2}$. Consideremos ahora la referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{(2, 2); B\}$, con $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ base de $\mathbf{R}^2$. Las coordenadas de v_1 y v_2 en B son respectivamente $(1, 0)$ y $(-1, 1)$ y las coordenadas de p y q en $\mathscr{R}$ son respectivamente $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Si tratamos ahora las coordenadas de v_1 y v_2 como si fueran vectores del plano vectorial euclídeo estándar y calculáramos el ángulo que forman este sería $\pi/4$, que no es el ángulo que forman v_1 y v_2. De igual manera, si tratamos las coordenadas de p y q como si fueran puntos del plano afín euclídeo estándar, la distancia entre dichas coordenadas sería 1, que tampoco es la distancia entre p y q. En resumen, al dar coordenadas en la referencia $\mathscr{R}$ se nos "estropean" los ángulos y las distancias.

Entonces, dado un espacio afín euclídeo $(A, V, \varphi, <,>)$ (de dimensión n), ¿qué tipo de referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{o; B\}$ deberemos usar para que no se nos estropeen los ángulos y las distancias, como nos pasaba en el ejemplo anterior? Para que la referencia que tomemos sea "buena", esta debe cumplir dos cosas:

(i) que calcular el ángulo de dos vectores de V sea lo mismo que calcular el ángulo de sus coordenadas respecto a B, consideradas como vectores del espacio vectorial euclídeo estándar (es decir, usando para ello el producto escalar estándar de $\mathbf{R}^n$);
(ii) que calcular la distancia entre dos puntos de A sea lo mismo que calcular la distancia de sus coordenadas respecto de $\mathscr{R}$, consideradas como puntos del espacio afín euclídeo estándar (es decir, usando para ello la distancia estándar de $\mathbf{R}^n$).

Como el ángulo y la distancia dependen del producto escalar, bastará con que la base B sea *ortonormal* (es decir, tal que sus vectores sean ortogonales dos a dos y tengan norma 1). Esto justifica esta definición:

Definición 5.13. *(sistema de referencia cartesiano rectangular)* Sea $(A, V, \varphi, <,>)$ un espacio afín euclídeo y sea $\mathscr{R} = \{o; B\}$ un sistema de referencia cartesiano de (A, V, φ). Decimos que $\mathscr{R}$ es *rectangular* si B es una base ortonormal de $(V, <,>)$.

Una vez que definamos el concepto de *isometría* entre espacios afines euclídeos, podremos afirmar que la aplicación que asigna a cada punto de un espacio afín euclídeo A de dimensión n sus coordenadas en una determinada referencia cartesiana rectangular de A es una isometría entre A y el espacio afín euclídeo estándar $\mathbf{R}^n$.

Orientación

En los párrafos anteriores hemos hablado del ángulo entre dos vectores de un espacio vectorial euclídeo. Sin embargo, la noción de ángulo que hemos definido no contempla en qué "sentido de giro" medimos el ángulo. Para abordar esta cuestión con precisión y para describir y clasificar las isometrías de un espacio afín euclídeo en sí mismo (aplicaciones afines que conservarán ángulos y distancias), necesitaremos "orientar" dichos espacios, o más bien, sus espacios vectoriales asociados. Sin embargo, observa que la siguiente definición de *orientación* tiene sentido para un espacio vectorial real sin más (sin necesidad del añadido de una estructura euclídea). Por ello podríamos haber hablado de orientación antes, a saber, en el momento en que hablamos de espacios afines, eso sí, restringiéndonos al cuerpo $\mathbf{R}$ (ve también la observación 5.19).

Definición 5.14. *(Orientación)* Una *orientación* en un espacio vectorial real es una (de las dos) clases de equivalencia de bases, respecto de la siguiente relación de equivalencia: B' es equivalente a B si la matriz de cambio de base de B a B' tiene determinante positivo. Un espacio vectorial real *orientado* es un espacio vectorial real en el que hemos elegido una de las dos orientaciones posibles. Un espacio afín real *orientado* es un espacio afín real cuyo espacio vectorial asociado está orientado. A las bases de la clase que da la orientación de un espacio vectorial real orientado las llamamos bases *positivas*.

Ejercicio 5.15. Comprueba que, en efecto, la relación descrita en la definición anterior es una relación de equivalencia y que el conjunto cociente tiene exactamente dos clases de equivalencia.

Ejemplo 5.16. En el plano vectorial estándar las dos orientaciones corresponden a girar en contra de las agujas del reloj (esta se considera la orientación *positiva*) y a girar a favor de las agujas del reloj (esta se considera la orientación *negativa*). En el espacio vectorial estándar de dimensión n se toma por convenio que la orientación *positiva* es la dada por la clase de la base canónica.

Vemos ahora cómo definir el angulo orientado entre dos vectores v_1 y v_2 de un plano vectorial euclídeo orientado.

Definición 5.17. *(angulo orientado)* Sea $(V, <, >)$ un plano vectorial euclídeo orientado y sean v_1 y v_2 dos vectores no nulos de V. Recordemos que el ángulo no orientado formado por v_1 y v_2 es el arco coseno, en $[0, \pi]$, de

$$\alpha = \frac{< v_1, v_2 >}{||v_1||||v_2||}.$$

(1) Si v_1 y v_2 son linealmente dependientes, entonces α es 1 o -1, por lo que el ángulo no orientado entre ellos es 0 o π. En este caso, definimos el *ángulo orientado* entre v_1 y v_2 como su ángulo no orientado.
(2) Si los vectores v_1 y v_2 son linealmente independientes definimos su *ángulo orientado* como
   (i) su ángulo no orientado si la base (¡ordenada!) $\{v_1, v_2\}$ define la orientación positiva de V;
   (ii) el opuesto de su ángulo no orientado si la base (¡ordenada!) $\{v_1, v_2\}$ define la orientación negativa.

Observación 5.18. Observa que el ángulo orientado que acabamos de definir es un valor del intervalo $(-\pi, \pi]$. Alternativamente, se puede definir ángulo orientado de forma que este sea un valor en el intervalo $[0, 2\pi)$. En realidad se puede definir el ángulo orientado de forma que tome valores en cualquier intervalo de longitud 2π de la recta real, con uno de sus extremos abierto y el otro cerrado.

Observación 5.19. ¡Aclaración! Aunque hayamos hablado de orientación en este tema, recalcamos que se puede orientar cualquier espacio vectorial real y cualquier espacio afín real, es decir, para hablar de orientación no hace falta tener ninguna estructura euclídea. Por tanto, dado un espacio vectorial V real orientado, tiene sentido hablar de automorfismos de V que *conservan la orientación*, que son aquellos automorfismos de V que tienen determinante positivo (o equivalentemente, transforman bases positivas en bases positivas como veremos en la proposición siguiente), o de automorfismos de V que *invierten la orientación*, que son aquellos automorfismos de V que tienen determinante negativo (o equivalentemente, transforman bases positivas en bases negativas). Igualmente, dado un espacio afín real orientado (A, V, φ), tiene sentido hablar de isomorfismos afines de A en A *directos*, que son aquellos isomorfismos afines cuyo automorfismo asociado conserva la orientación, y de isomorfismos afines de A en A *inversos*, que son aquellos isomorfismos afines cuyo automorfismo asociado invierte la orientación. Sin embargo, para otros conceptos como el de ángulo orientado, obviamente sí necesitamos una estructura euclídea, pues primero precisamos definir ángulo no orientado, y para eso usamos el producto escalar.

Proposición 5.20. *Sea V un espacio vectorial real orientado y sea ϕ un automorfismo de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *ϕ tiene determinante positivo;*
(2) *ϕ transforma* alguna *base positiva de V en otra base positiva;*
(3) *ϕ transforma* cualquier *base positiva de V en otra base positiva.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 5.21. *Sea V un espacio vectorial real orientado y sea ϕ un automorfismo de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *ϕ tiene determinante negativo;*
(2) *ϕ transforma* alguna *base positiva de V en una base negativa;*
(3) *ϕ transforma* cualquier *base positiva de V en una base negativa.*

Demostración. El enunciado de esta proposición es equivalente al enunciado de la anterior. □

Observación 5.22. Quizá te hayas preguntado por qué, si empezamos estos apuntes enunciando los resultados para un cuerpo $\mathbf{k}$ lo más general posible (aunque en el fondo y desde un punto de vista geométrico lo que nos importara es que $\mathbf{k}$ fuera $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$), en este tema hemos pasado de pronto a trabajar solo sobre $\mathbf{R}$. Una primera respuesta "fácil" sería decir que estamos trabajando con productos escalares y estos se definen en espacios vectoriales reales. Sin embargo existe una noción análoga de producto escalar para un espacio vectorial complejo V, el *producto hermítico* (véase la sección XI.1 de "Álgebra lineal y geometría", de M. Castellet e I. Llerena). Un producto hermítico es en particular una forma definida positiva, por lo que nos sirve para medir vectores de V, es decir, para definir su norma, que será un número real no negativo como lo es la norma de los vectores de un espacio euclídeo. Sin embargo, si queremos usar el producto hermítico para definir el ángulo entre dos vectores v y w de V, observamos que en general $< v, w >$ es un número complejo. El análogo de la desigualdad de Cauchy–Schwartz nos dice el módulo de $\frac{<v,w>}{||v||\cdot||w||}$ es menor o igual que 1, por lo que tendría sentido hablar de un número cuyo coseno sea $\frac{<v,w>}{||v||\cdot||w||}$, lo que pasa es que ahora este número sería en general complejo. Dicho de otra forma, estaríamos definiendo como ángulo entre v y w un número complejo en general no real, lo que no tiene demasiado sentido geométrico.

Otra razón por la que ahora estamos trabajando sobre $\mathbf{R}$ es la orientación. Recuerda que para hablar de orientación hemos necesitado ver si el determinante de una matriz invertible es positivo o negativo. Eso lo podemos hacer en $\mathbf{R}$, que es un *cuerpo ordenado* y en el que podemos decidir si un elemento no nulo es mayor o menor que 0, pero no lo podemos hacer en $\mathbf{C}$.

6. Isometrías

Al igual que en álgebra lineal se estudian las aplicaciones lineales, que son aquellas aplicaciones que conservan la estructura de espacio vectorial, y en geometría afín se estudian las aplicaciones afines, que son aquellas aplicaciones que conservan la estructura afín, en la geometría afín euclídea queremos estudiar aquellas aplicaciones que preserven la estructura afín euclídea, es decir, que conserven por una parte las propiedades afines y, por otra, los ángulos y las distancias. Para lo primero ya sabemos que las aplicaciones que debemos considerar son las aplicaciones afines. Para lo segundo, como ángulos y distancias se definen a partir del producto escalar, es claro que la condición necesaria y suficiente que precisaremos es que la aplicación lineal asociada a la aplicación afín sea una aplicación *ortogonal* (recuerda que una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales euclídeos se dice ortogonal si respeta el producto escalar). Esto motiva la siguiente definición:

Definición 6.1. Sean $(A_1, V_1, \varphi_1, <, >_1)$ y $(A_2, V_2, \varphi_2, <, >_2)$ dos espacios afines euclídeos. Decimos que una aplicación afín $f : A_1 \longrightarrow A_2$ es una isometría si la aplicación lineal asociada $\vec{f}$ de f es una aplicación ortogonal entre $(V_1, <, >_1)$ y $(V_2, <, >_2)$, es decir, para todo $v_1, w_1 \in V_1$ se tiene que $< \vec{f}(v_1), \vec{f}(w_1) >_2 = < v_1, w_1 >_1$.

Proposición 6.2. *La aplicación que asigna a cada punto de un espacio afín euclídeo A de dimensión n sus coordenadas en una determinada referencia cartesiana rectangular $\mathscr{R}$ de A es una isometría entre A y el espacio afín euclídeo estándar $\mathbf{R}^n$.*

Demostración. Ejercicio. □

Análogamente a las aplicaciones afines en el caso afín (véase la proposición 4.11), las isometrías se caracterizan por cómo actúan sobre los sistemas de referencia cartesianos rectangulares:

Proposición 6.3. *Sean* $(A, V, \varphi, <,>)$ *y* $(A', V', \varphi', <,>')$ *dos espacios afines euclídeos de dimensión* n *y sea* f *la aplicación afín de* A *a* A'. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *La aplicación* f *es una isometría.*
(b) *La aplicación* f *transforma* cualquier *referencia cartesiana rectangular* $\mathscr{R} = \{o; u_1, \ldots, u_n\}$ *de* A *en una referencia cartesiana rectangular* $\mathscr{R}' = \{f(o); \vec{f}(u_1), \ldots, \vec{f}(u_n)\}$ *de* A'.
(c) *La aplicación* f *transforma* una *referencia cartesiana rectangular* $\mathscr{R} = \{o; u_1, \ldots, u_n\}$ *de* A *en una referencia cartesiana rectangular* $\mathscr{R}' = \{f(o); \vec{f}(u_1), \ldots, \vec{f}(u_n)\}$ *de* A'.

Demostración. La proposición se sigue del resultado análogo de álgebra lineal que caracteriza a las aplicaciones ortogonales como aquellas aplicaciones lineales que transforman bases ortonormales en bases ortonormales. □

Proposición 6.4. *Sean* $(A_1, V_1, \varphi_1, <,>_1)$ *y* $(A_2, V_2, \varphi_2, <,>_2)$ *dos espacios afines euclídeos y sea* $f : A_1 \longrightarrow A_2$ *una isometría entre ambos espacios. Entonces* f *es inyectiva y, en particular,* $\dim A_1 \leq \dim A_2$. *Además, si* $\dim A_1 = \dim A_2$, f *es un isomorfismo afín.*

Demostración. Es un sencillo resultado de álgebra lineal el hecho de que una aplicación ortogonal es inyectiva. Por otra parte, sabemos que f es inyectiva si y solo si lo es su aplicación lineal asociada $\vec{f}$. Entonces $\dim A_1 = \dim V_1 = \dim \operatorname{im}\vec{f}$ (por ser $\vec{f}$ inyectiva), y $\dim \operatorname{im}\vec{f} \leq \dim V_2 = \dim A_2$. Por último, si $\dim A_1 = \dim A_2$ como f es inyectiva, f es biyectiva por la proposicion 3.13, (4). □

Proposición 6.5. (1) *La composición de isometrías es una isometría.*
(2) *La inversa de una isometría sobreyectiva es una isometría.*

Demostración. La afirmación (1) se sigue de la proposición 3.7 y de que la composición de aplicaciones ortogonales es una aplicación ortogonal. La afirmación (2) se sigue de las proposiciones 3.13, (2), 3.17, (1) y 6.4 y de que la inversa de una aplicación ortogonal sobreyectiva es ortogonal. □

Al igual que las aplicaciones afines podían caracterizarse como las aplicaciones que preservaban ciertas nociones puramente afines (son las aplicaciones que llevan puntos alineados a puntos alineados y conservan la razón simple), las isometrías también se pueden caracterizar como como aquellas aplicaciones entre espacios afines euclídeos que conservan la distancia, que es una noción puramente métrica o euclídea. Esto es hasta cierto punto sorprendente y da idea de que la condición de conservar distancias es una condición muy fuerte: piensa que con solo imponer a una aplicación f que conserve las distancias nos aseguramos por una parte que f sea aplicación afín y, por otra parte, que $\vec{f}$ sea una aplicación ortogonal, es decir que f no solo conserve las distancias sino también los ángulos (no orientados). Vemos todo esto en la siguiente proposición:

Proposición 6.6. *Sean* $(A, V, \varphi, <,>)$ *y* $(A', V', \varphi', <,>')$ *dos espacios afines euclídeos y sea* $f : A \longrightarrow A'$ *una aplicación. La aplicación* f *es una isometría (y en particular, una aplicación afín) si y solo si* f *conserva las distancias (es decir, para todo* $p, q \in A$,

$d'(f(p), f(q)) = d(p, q)$, donde d y d' son las distancias definidas en A y A' respectivamente a partir de $<,>$ y $<,>'$).

Demostración. Si f es una isometría,

$$\mathrm{d}'(f(p), f(q)) = ||\overrightarrow{f(p)f(q)}||' = ||\vec{f}(\overrightarrow{pq})||' = \sqrt{<\vec{f}(\overrightarrow{pq}), \vec{f}(\overrightarrow{pq})>} =$$

$$\sqrt{<\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}>} = ||\overrightarrow{pq}|| = \mathrm{d}(p, q).$$

Supongamos ahora que f es una aplicación que conserva las distancias. Fijamos un punto o de A. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f': & V & \longrightarrow & V' \\ & v & \mapsto & \overrightarrow{f(o)f(o+v)}. \end{array}$$

Para todo $v \in V$,

$$||f'(v)||' = ||\overrightarrow{f(o)f(o+v)}||' = \mathrm{d}'(f(o), f(o+v)) = \mathrm{d}(o, o+v) = ||\overrightarrow{o(o+v)}|| = ||v||,$$

es decir, f' *conserva la norma.* Recuerda que dados $u, w \in V$,

$$< u, w >= \frac{1}{4}(||u+w||^2 - ||u-w||^2),$$

por lo que tenemos que si f' conserva la norma, también conserva el producto escalar. Por otra parte, toda aplicación que conserve el producto escalar es lineal (véase por ejemplo la proposición XII.1.1 de "Álgebra lineal y geometría", de M. Castellet e I. Llerena), así que f' lo es y de la proposición 3.5, (1) se sigue que f es una aplicación afín y y su aplicación lineal asociada es $\vec{f} = f'$. Por último, como $\vec{f}$ es una aplicación lineal que conserva el producto escalar, es decir, es una aplicación ortogonal, f es una isometría. □

Teniendo en cuenta la proposición 6.4 que nos dice que las isometrías son inyectivas, es lógico centrarnos en las isometrías entre espacios de la misma dimensión. Dentro de las isometrías entre espacios de la misma dimensión, nos centraremos en las isometrías de un espacio afín euclídeo en sí mismo (que, en particular, son isomorfismos afines de dicho espacio en sí mismo).

En la observación 5.19 vimos que, en un espacio afín real orientado, podíamos hablar de isomorfismos afines directos o inversos según sus automorfimos asociados conservaran o invirtieran la orientación. En la siguiente definición repetimos estos conceptos en el caso especial de las isometrías de un espacio afín euclídeo orientado:

Definición 6.7. Sea $(A, V, \varphi, <,>)$ un espacio afín euclídeo *orientado.*

(1) Una isometría f de A cuya aplicación (ortogonal) lineal asociada $\vec{f}$ *conserva la orientación* (es decir, tal que $\det \vec{f} = 1$) se dice que es una isometría *directa.*
(2) Una isometría f de A que no es directa se dice que es una isometría *inversa* (por tanto, una isometría inversa es una isometría cuya aplicación (ortogonal) lineal asociada $\vec{f}$ *invierte la orientación*, es decir, tal que $\det \vec{f} = -1$).

Observación 6.8. El hecho que se afirma en la definición anterior, a saber, que una aplicación ortogonal conserva la orientación si y solo si su determinante es 1 y la invierte si y solo si su determinante es -1 se sigue de las proposiciones 5.20 y 5.21 y de que el determinante de una aplicación ortogonal es 1 o -1.

Proposición 6.9. *Sea $(A, V, \varphi, <,>)$ un espacio afín euclídeo.*

(1) *Las isometrías de A forman un grupo, Iso(A), con respecto a la composición. De hecho, forman un subgrupo del grupo Af(A) de isomorfismos afines de A en A.*
(2) *La composición de dos isometrías directas de A es de nuevo una isometría directa de A.*
(3) *La composición de dos isometrías inversas de A es una isometría directa de A.*
(4) *La composición de una isometría directa y de una isometría inversa de A es una isometría inversa de A.*
(5) *La inversa de una isometría directa de A es de nuevo una isometría directa de A.*
(6) *La inversa de una isometría inversa de A es de nuevo una isometría inversa de A.*
(7) *Las isometrías directas de A forman un subgrupo, Iso$^+(A)$, del grupo IsoA. En realidad, los isomorfismos afines directos de A en A también forman un grupo, Af$^+(A)$, con respecto a la composición e Iso$^+(A)$ es un subgrupo de Af$^+(A)$; de hecho, Iso$^+(A)$ =Iso(A) $\cap$ Af$^+(A)$.*

Demostración. La afirmación (1) se sigue de la proposición 6.5. Las afirmaciones (2), (3) y (4) se siguen de que el determinante de una composición de aplicaciones lineales es el producto de los determinantes. Las afirmaciones (5) y (6) se siguen de que el determinante del inverso de un isomorfismo de espacios vectoriales es el inverso del determinante del isomorfismo. La afirmación (7) se sigue de (2) y (5). □

Observación 6.10. Si (A, V, φ) es un espacio afín real, las afirmaciones análogas a (2), (3), (4), (5) y (6) son también ciertas para isomorfismos afines de A en A.

Vemos a continuación unos cuantos ejemplos de isometrías de un espacio afín euclídeo $(A, V, \varphi, <,>)$:

Ejemplo 6.11. *(identidad)* Obviamente la identidad es una isometría directa; el conjunto de puntos fijos de la identidad es todo A y su aplicación lineal asociada es id_V.

Ejemplo 6.12. *(traslaciones)* Es claro que una traslación de vector no nulo es una isometría directa, ya que la aplicación lineal asociada a una traslación es la identidad. Una traslación de vector no nulo no tiene puntos fijos.

Proposición 6.13. *(simetrías euclídeas) Sea L un subespacio afín de A con dirección W y sea U el complemento* ortogonal *de W. La simetría (afín) con base L y dirección U es una isometría y la llamamos* simetría euclídea *con base L o respecto de L. Una simetría euclídea es directa si la codimensión de L en A es par y es inversa si la codimensión de L en A es impar. Recordemos asimismo que el conjunto de puntos fijos de una simetría es su base L y que su aplicación lineal asociada es una simetría vectorial, en este caso ortogonal, con base la dirección de L.*

Demostración. Como la aplicación lineal asociada a una simetría euclídea es una simetría (vectorial) ortogonal, una simetría euclídea es una isometría. Una simetría vectorial ortogonal se puede representar, en una base adecuada (que en este caso puede tomarse ortonormal) como una matriz diagonal de manera que cada entrada de la diagonal sea 1 o -1. Además, la diagonal tiene tantas entradas que son -1 como la dimensión de U, que es la codimensión de L. En realidad, según la observación 5.19, una simetría afín de un espacio a fín real (no necesariamente euclídea) cumple lo mismo: es directa si la codimensión de L es par y es inversa si la codimensión de L es impar. □

Observación 6.14. Una simetría central es siempre una simetría euclídea.

Observación 6.15. Vimos en la observación 3.11 que una aplicación afín f podía entenderse como la composición de una "aplicación lineal" (que identificábamos con la aplicación lineal asociada a f) seguida de una traslación. Si trasladamos el contenido de la observación 3.11 al estudio de las isometrías de un espacio afín euclídeo, podemos decir que una isometría es la composición de una isometría que deja un punto fijo o (que, usando la identificación dada por φ_o entre el espacio afín y su espacio vectorial asociado, podemos "entender" en este caso como una aplicación lineal ortogonal) seguida de una traslación.

Isometrías de un plano afín euclídeo

Vemos unos cuantos ejemplos de isometrías de un *plano* afín euclídeo orientado $(A, V, \varphi, <, >)$. Además de la identidad y las traslaciones, que aparecen en los ejemplos 6.11 y 6.12, tenemos estos otros:

Ejemplo 6.16. *(giros en el plano)* Sea p un punto de A. Diremos que f es un *giro* de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ alrededor de p o con centro p si p es un punto fijo de f y la aplicación lineal asociada a f es un giro vectorial de ángulo θ. Un giro es una isometría directa y se sigue del ejercicio 4.15, (1) que su centro es su único punto fijo.

Proposición 6.17. *Una isometría de A es un giro si y solo si su aplicación lineal asociada es un giro vectorial de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$.*

Demostración. De nuevo, se sigue del ejercicio 4.15, (1). □

Ejemplo 6.18. *(simetrías axiales euclídeas)* Las simetrías euclídeas respecto a una recta de A son isometrías (inversas) de A (véase la proposición 6.13).

Ejemplo 6.19. *(simetrías axiales deslizantes euclídeas)* Dada una simetría euclídea σ respecto a una recta l de A y una traslación t_v de vector v no nulo y paralelo a l, $t_v \circ \sigma$ es una isometría (inversa) de A, que llamamos *simetría axial deslizante euclídea* con eje l y vector de traslación v.

Observación 6.20. Este ejemplo se puede generalizar de la manera obvia a un espacio afín euclídeo de dimensión arbitraria, considerando la composición de una simetría euclídea σ (véase la proposición 6.13) seguida de una traslación t_v de vector no nulo v paralelo a la base de la simetría. Incluso podríamos haber dado un ejemplo análogo (y más general) cuando presentamos ejemplos de isomorfismos afines: tal ejemplo sería la composición de una simetría afín (no necesariamente euclídea) seguida de una traslación de vector no nulo paralelo a la base de la simetría (véase por ejemplo el ejercicio I.15 de "Geometry" de M. Audin).

Ejercicio 6.21. Sean σ y t_v como en la observación 6.20.

(1) Demuestra que $t_v \circ \sigma$ no tiene puntos fijos.
(2) Demuestra que la descomposición $f = t_v \circ \sigma$ es única respecto de f.
(3) Demuestra que la descomposición del apartado anterior conmuta, es decir, $t_v \circ \sigma = \sigma \circ t_v$.

De la clasificación de las aplicaciones ortogonales de un plano vectorial euclídeo se deduce el siguiente teorema:

Teorema 6.22. *(Clasificación de las isometrías del plano). Una isometría de un plano afín euclídeo orientado $(A, V, \varphi, <, >)$ es de uno (y solo uno) de los cinco tipos siguientes, cada uno con las propiedades que se indican en este cuadro:*

Tipo de isometría	¿Directa o inversa?	Conjunto de puntos fijos	Aplicación lineal asociada
Identidad	directa	A	Id_V
Traslación (de vector no nulo)	directa	$\emptyset$	Id_V
Giro (de áng. $\theta \in (0, 2\pi)$)	directa	un punto$^{(1)}$	giro vectorial (de áng. $\theta \in (0, 2\pi)$)
Simetría axial euclídea	inversa	una recta$^{(2)}$	simetría axial vectorial ortogonal
Simetría axial deslizante euclídea	inversa	$\emptyset$	simetría axial vectorial ortogonal

((1) el centro del giro; (2) el eje de la simetría).

Cada uno de los tipos de isometría anteriores está caracterizado por el tipo de su aplicación ortogonal asociada y por su conjunto de puntos fijos.

Demostración. No damos aquí la demostración detallada del teorema sino que la dejamos como un ejercicio (avanzado) que el alumno puede resolver siguiendo los pasos que se proponen a continuación (también puede encontrarse una demostración en la sección XIII.6 de "Álgebra Lineal y Geometría" de M. Castellet e I. Llerena):

Paso 1: Sea f una isometría de A. Si $\det \vec{f} = 1$, usa la clasificación de las aplicaciones ortogonales del plano vectorial euclídeo $(V, <,>)$ que conservan la orientación, que dice que, en cualquier base ortonormal B de V, la matriz de $\vec{f}$ es

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

para algún $\theta \in [0, 2\pi)$ (en ese caso, $\vec{f}$ es un giro vectorial de ángulo θ).

Paso 2: Si en el paso 1 se tiene $\theta = 0$, entonces $\vec{f} = \mathrm{id}_V$. En ese caso, por la proposición 3.10 sabemos que f es una traslación de vector $v \in V$. Si $v = 0$, entonces f es la identidad y si $v \neq 0$, entonces f es una traslación de vector no nulo.

Paso 3: Si en el paso 1, $\theta \neq 0$, recuerda que $\vec{f}$ es un giro vectorial de ángulo θ no nulo. En este caso, según la observación 6.17, f es un giro de ángulo θ no nulo, con un único punto fijo, que es su centro.

Paso 4: Si $\det \vec{f} = -1$, usa la clasificación de las aplicaciones ortogonales del plano vectorial euclídeo $(V, <,>)$ que invierten la orientación, que dice que, en una base ortonormal adecuada $B = \{u_1, u_2\}$ de V, la matriz de $\vec{f}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso $\vec{f}$ es una simetría vectorial ortogonal respecto de la recta $L(u_1)$.

Paso 5: Si en el paso 4 la isometría f tiene algún punto fijo $p \in A$, concluye a partir de la demostración de la proposición 3.32 que $\mathrm{Fij}(f) = p + L(u_1)$. En este caso f es una simetría (axial) euclídea respecto de la recta $p + L(u_1)$.

Paso 6: Si en el paso 4 la isometría f no tiene ningún punto fijo, elige un punto $p \in A$, sea $p' = f(p)$, sea $v = \overrightarrow{pp'}$ y sean t_v y t_{-v} respectivamente las traslaciones de vector v y $-v$. Entonces p es un punto fijo de la isometría $g = t_{-v} \circ f$, que además tiene a $\overrightarrow{f}$ por aplicación lineal asociada. Por el paso 5, g es una simetría (axial) euclídea respecto de la recta $p + L(u_1)$ y $f = t_v \circ g$.

Paso 7: Demuestra que si v fuera ortogonal a u_1, entonces $t_v \circ g$ sería de nuevo una simetría (axial) euclídea respecto a una recta paralela a $p + L(u_1)$. Como estamos en el caso en que f no tiene puntos fijos, se sigue que v no es ortogonal a u_1 y que existe $v' \in L(u_1)$ tal que $f = t_{v'} \circ g'$ (de hecho, v' es la proyección ortogonal de v sobre $L(u_1)$), donde g' es una simetría (axial) euclídea respecto a una recta paralela a $p + L(u_1)$. Tal composición $t_{v'} \circ g'$ es lo que hemos llamado una simetría axial euclídea deslizante.

Paso 8: Las propiedades que se enuncian para cada uno de los tipos las vimos en los ejemplos 6.11, 6.12, 6.16, en la proposición 6.13 y en el ejercicio 6.21, (1).

Paso 9: Por último, es obvio que una isometría f no puede ser a la vez de dos tipos distintos de la lista, puesto que el conjunto de puntos fijos y la aplicación ortogonal asociada a una isometría de un tipo determainado tienen propiedades diferentes a las del conjunto de puntos fijos y la aplicación ortogonal asociada a una isometría de otro de los tipos. □

El teorema 6.22 nos da una *clasificación* de las isometrías del plano. Es posible dar una clasificación más "fina": podemos decir que dos isometrías σ_1 y σ_2 están en la misma clase si existe una isometría σ tal que $\sigma_2 = \sigma^{-1} \circ \sigma_1 \circ \sigma$. En ese caso:

– obviamente, la identidad constituye ella sola una clase;
– existen tantas clases de traslaciones como números reales positivos (que se corresponden con las posibles normas de vectores no nulos);
– existen tantas clases de giros como números reales en $(0, \pi]$ (que corresponden a los ángulos *no orientados* de los giros);
– existe una única clase de simetrías axiales;
– existen tantas clases de simetrías deslizantes como números reales positivos (que se corresponden a las posibles normas de vectores no nulos de la traslación asociada a la simetría deslizante).

Aún es posible dar una clasificación un poco más fina de las isometrías del plano: podemos decir que dos isometrías σ_1 y σ_2 están en la misma clase si existe una isometría *directa* σ tal que $\sigma_2 = \sigma^{-1} \circ \sigma_1 \circ \sigma$. En ese caso lo único que cambia con respecto a la lista anterior es que habrá tantas clases de giros como números reales en $(0, 2\pi)$ (que corresponden a los ángulos *orientados* de los giros).

Isometrías de un espacio afín euclídeo tridimensional

Vemos a continuación ejemplos de isometrías de un espacio afín euclídeo orientado tridimensional $(A, V, \varphi, <,>)$. Además de la identidad y las traslaciones de vector no nulo, tenemos estos otros ejemplos (para entenderlos mejor debes recordar la clasificación de las aplicaciones ortogonales de un espacio euclídeo tridimensional):

Ejemplo 6.23. *(giros en el espacio)* Sea l una recta afín de A. Diremos que f es un *giro* de ángulo $\theta \in (0, \pi]$ alrededor de l o con eje l si los puntos de l son puntos fijos de f y la aplicación lineal asociada a f es un giro (vectorial) de ángulo θ alrededor de la (recta vectorial que es la) dirección de l. Un giro es una isometría directa y de la demostración de la proposición 3.32 se deduce que sus únicos puntos fijos son los de l.

Observación 6.24. De la demostración de la proposición 3.32 se sigue también que una isometría f es un giro si y solo si su aplicación lineal asociada es un giro vectorial y f tiene algún punto fijo.

Ejemplo 6.25. *(movimiento helicoidal)* Sea l una recta afín de A, sea $\theta \in (0, \pi]$ y sea v un vector no nulo paralelo a l. Diremos que f es un movimiento helicoidal de eje l, ángulo $\theta \in (0, \pi]$ y vector de traslación v, si f es la composición de un giro g de ángulo θ alrededor de l seguido de una traslación t_v de vector v. Un movimiento helicoidal es una isometría directa (pues su aplicación lineal asociada es un giro vectorial).

Ejercicio 6.26. Demuestra que una isometría f de A es un movimiento helicoidal si y solo si su aplicación lineal asociada es un giro vectorial y f no tiene ningún punto fijo.

Ejercicio 6.27. Sea f un movimiento helicoidal.
(1) Demuestra que f no tiene puntos fijos.
(2) Demuestra que la descomposición $f = t_v \circ g$ con giro g y traslación t_v como los que aparecen en el ejemplo 6.25 es única respecto de f.
(3) Demuestra para la descomposición del apartado anterior conmuta, es decir, que $t_v \circ g = g \circ t_v$.

Ejemplo 6.28. *(simetrías especulares euclídeas)* Las simetrías euclídeas respecto a un plano de A son isometrías (inversas) de A (véase la proposición 6.13).

Ejemplo 6.29. *(simetrías especulares deslizantes euclídeas)* Las simetrías euclídeas respecto a un plano Π de A seguidas de una traslación de vector no nulo y paralelo a Π son isometrías (inversas) de A sin puntos fijos (recuerda la observación 6.20).

Ejemplo 6.30. *(simetrías especulares euclídeas compuestas con un giro de eje pependicular)* La composición f de una simetría euclídea σ respecto a un plano Π de A seguida de un giro g alrededor de una recta l perpendicular a Π es una isometría (inversa) de A.

Ejercicio 6.31. Sean f, g, σ, l y Π como en el ejemplo 6.30.
(1) Demuestra que g tiene un único punto fijo, que es la intersección de l y Π.
(2) Demuestra que, excepto en el caso en que f sea una simetría central, la descomposición $f = g \circ \sigma$ es única con respecto a f.
(3) Demuestra que la descomposición del apartado anterior conmuta, es decir, $g \circ \sigma = \sigma \circ g$.

Al igual que en el caso de las simetrías del plano, los ejemplos que hemos visto nos dan todos los tipos de isometrías del espacio:

Teorema 6.32. *(Clasificación de las isometrías del espacio) Una isometría de un espacio afín euclídeo orientado tridimensional* $(A, V, \varphi, <,>)$ *es de uno (y solo uno) de los siete tipos siguientes, cada uno con las propiedades que se indican en estos cuadros:*

Isometrías directas

Tipo de isometría	Conjunto de puntos fijos	Aplicación lineal asociada
Identidad	A	Id_V
Traslación (de vector no nulo)	$\emptyset$	Id_V
Giro (de áng. $\theta \in (0,\pi]$) alrededor de una recta$^{(1)}$	una recta$^{(1)}$	giro vectorial (de áng. $\theta \in (0,\pi]$) alrededor de una recta$^{(2)}$
Movimiento helicoidal	$\emptyset$	giro vectorial alrededor de una recta

((1) el eje del giro; (2) la dirección del eje del giro).

Isometrías inversas

Tipo de isometría	Conjunto de puntos fijos	Aplicación lineal asociada
Simetría especular euclídea	un plano$^{(3)}$	simetría especular vectorial ortogonal
Simetría especular deslizante euclídea	$\emptyset$	simetría especular vectorial ortogonal
Compos. de una simetría especular eucl. y un giro de eje perp. al plano de la simetría	un punto$^{(4)}$	compos. de una simetría vect. especular ortog. y un giro vect. de eje ortog. al plano de la simetría

((3) el plano de la simetría; (4) la intersección del plano de la simetría con el eje del giro).
Además, cada uno de los tipos anteriores está caracterizado por las propiedades de la aplicación ortogonal asociada y del conjunto de puntos fijos.

Demostración. La demostración se puede hacer usando la clasificación de las aplicaciones ortogonales de un espacio afín euclídeo tridimensional e imitando los pasos de la demostración del teorema 6.22. También puedes encontrar una demostración completa en la sección XIII.7 de “Álgebra Lineal y Geometría”, de M. Castellet e I. Llerena. □

Semejanzas

En un espacio afín euclídeo $(A, V, \varphi, <,>)$, si relajamos un poco los requisitos que le pedimos a los isomorfismos afines (para ser isometrías) y solo exigimos que conserven las formas pero no los tamaños, obtenemos una clase más general de isomorfismos afines (que engloba a las isometrías): las *semejanzas*. Las semejanzas son aquellos isomorfismos afines cuya aplicación lineal asociada es una semejanza vectorial. Una semejanza vectorial es un isomorfismo de V en V que no conserva necesariamente el producto escalar sino que lo multiplica por una constante positiva, i.e., ϕ es una semejanza si existe un número real $\lambda \neq 0$ tal que para todo $v_1, v_2 \in V$, $< \phi(v_1), \phi(v_2) >= \lambda^2 < v_1, v_2 >$. Por eso, si $\lambda^2 \neq 1$, la semejanza vectorial correspondiente conserva los ángulos no orientados pero no conserva las distancias, sino que las multiplica por $|\lambda|$ (recuerda las definiciones 5.3 y 5.8). No es difícil demostrar que una semejanza vectorial es la composición de una aplicación ortogonal y una homotecia vectorial de razón λ (donde permitimos que $\lambda \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$).

Una semejanza (afín) puede verse como la composición de una semejanza que deja fijo un punto o (que podemos interpretar como una semejanza vectorial, por la identificación entre A y V vía φ_o) seguida de una traslación. Como una semejanza vectorial es la composición de una aplicación ortogonal seguida de una homotecia vectorial, tenemos que una semejanza (afín) es la composición de una isometría seguida de una homotecia. Las semejanzas volverán a aparecer en el estudio de la geometría proyectiva.