TEMA 1: **REPASO DE GEOMETRÍA AFÍN**

1. El espacio afín

¿Qué es un espacio afín? Antes de dar una definición formal, damos una idea intuitiva. El plano afín es... la pizarra (que se prolonga hacia el infinito en dos direcciones). ¿Qué es el espacio afín (tridimensional)? El aula (que se prolonga hacia el infinito en tres direcciones). La pizarra o el aula están formadas por *puntos*. Dada una pareja ordenada de puntos podemos trazar el segmento orientado limitado por dichos puntos. Es lo que llamamos un *vector libre*, que tiene un principio y un fin. Si consideramos todos los vectores libres que se "originan" a partir de los puntos del plano (la pizarra) o del espacio (el aula) e identificamos entre sí todos aquellos que tienen la misma *dirección* (es decir, son *paralelos*), *longitud* y *sentido* (de forma "práctica" esto se puede hacer así: identificamos los vectores $\overrightarrow{p_1p_2}$ y $\overrightarrow{q_1q_2}$ si y solo si al trasladar paralelamente a sí mismo $\overrightarrow{q_1q_2}$ de forma que q_1 coincida con p_1, q_2 coincide con p_2), obtenemos un espacio vectorial (de dimensión 2 en el caso del plano y de dimensión 3 en el caso del espacio tridimensional). Por ejemplo, la suma de dos vectores representados respectivamente por los vectores libres $\overrightarrow{p_1p_2}$ y $\overrightarrow{q_1q_2}$ sería un vector representado por el vector libre $\overrightarrow{p_1q_2'}$ donde q_2' es el fin del vector libre que se obtiene al trasladar paralelamente el vector $\overrightarrow{q_1q_2}$ a un vector que comience en p_2.

Por tanto, cuando defininamos de forma rigurosa lo que es un espacio afín parece claro que tendremos que hablar por una parte de un conjunto de puntos, por otra parte de un espacio vectorial asociado a ese conjunto de puntos y por último de cómo se relaciona el conjunto de puntos y el espacio vectorial.

Definición 1.1. *(Definición formal de espacio afín).* Un *espacio afín* sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ es una terna (A, V, φ) donde A es un conjunto no vacío, V es un espacio vectorial sobre $\mathbf{k}$ y φ es una aplicación

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & A \times A & \longrightarrow & V \\ & (p,q) & \mapsto & \varphi(p,q) := \vec{pq} \end{array}$$

tal que,

(1) para cada $p \in A$, la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \varphi_p: & A & \longrightarrow & V \\ & q & \mapsto & \vec{pq} \end{array}$$

es una biyección, y

(2) para cualesquiera $p, q, r \in A$, se tiene $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$.

A los elementos de A les llamaremos *puntos* del espacio afín y a V lo llamaremos *espacio vectorial asociado* al espacio afín. A veces abreviaremos y hablaremos solo de A al referirnos al espacio afín, pero siempre entendiendo que el espacio afín no es solamente A sino la terna (A, V, φ). Decimos que (A, V, φ) (o simplemente A) tiene dimensión n si $n = \dim V$. A los espacios afines de dimensión 1 les llamaremos *rectas* afines y a los espacios afines de dimensión 2 les llamaremos *planos* afines.

Observación 1.2. *(sobre el cuerpo base):* En la definición anterior hemos hablado de espacios afines sobre un cuerpo $\mathbf{k}$. Desde un punto de vista geométrico, el cuerpo "natural" sobre el que modelar nuestros espacios afines es desde luego el cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales (piensa por ejemplo que $\mathbf{R}$ se suele representar como la "recta real"). A lo largo del curso veremos que otro cuerpo interesante con el que trabajar es el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos. Al trabajar sobre $\mathbf{C}$ perderemos intuición geométrica pero obtendremos ventajas que de momento resumimos diciendo que los resultados tendrán enunciados más simples y homogéneos. Aun así, casi todos los resultados y nociones que iremos viendo tienen sentido sobre cualquier cuerpo (incluso cuando el cuerpo sea un cuerpo finito; otra cosa es que dar en esta situación el calificativo de geométrico a estos resultados lo tengamos que justificar usando una analogía). Por eso, aunque en el fondo estemos pensando que el cuerpo sobre el que trabajamos es $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, siempre que nos sea posible enunciaremos los resultados para un cuerpo arbitrario $\mathbf{k}$ (y, cuando no sea posible, especificaremos qué propiedades debe satisfacer $\mathbf{k}$ en cada caso).

Observación 1.3. La propiedad (1) de la definición anterior nos dice que si tenemos un espacio afín y fijamos un punto, lo "convertimos" en un espacio vectorial (ese punto se convierte en nuestro cero, en nuestro origen; ¡piensa en cómo se representa un plano vectorial en la pizarra!). Por otra parte, la propiedad (2) captura la forma en que se define la suma de vectores libres.

Notación 1.4. A veces usaremos la siguiente notación: dado un espacio afín (A, V, φ), dos puntos $p, q \in A$ y un vector $v \in V$, escribimos $q = p + v$ si y solo si $\overrightarrow{pq} = v$. *¡Cuidado!* Hay que tener claro que esto es una notación y que el signo $+$ no representa ninguna operación (en otras palabras, no tiene sentido hablar de una operación, en el sentido algebraico, que nos permita sumar puntos y vectores), aunque en ciertos ejemplos (véase el ejercicio 1.7 y el ejemplo 1.8) de espacios afines sí podríamos entender el signo $+$ como una operación desde un punto de vista algebraico.

Ejercicio 1.5.
(1) Sean $p, q \in A$. Demuestra que $p = q$ si y solo si $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{0}$.
(2) Demuestra que dados $p \in A$ y $v \in V$ existe un único $q \in A$ tal que $q = p + v$.
(3) Demuestra que dados $p, q \in A$, $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$.
(4) Demuestra que dados $p, q \in A$ y $v, w \in V$, $\overrightarrow{(p+v)(q+w)} = \overrightarrow{pq} + w - v$.
(5) Demuestra la *ley del paralelogramo*: dados $p, q, p', q' \in A$, $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'}$ es equivalente a $\overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{qq'}$.

Ejercicio 1.6. Demuestra que A tiene dimensión 0 si y solo si A está formando por un solo punto.

Ejercicio 1.7. Demuestra que a $\mathbf{k}^n$ se le puede dotar de estructura de espacio afín de dimensión n de la forma obvia. Lo llamamos *espacio afín estándar de dimensión n* y lo denotaremos por $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ (reservando en general la notación $\mathbf{k}^n$ para el espacio vectorial estándar de dimensión n). Indicación: si $p = (x_1, \ldots, x_n)$ y $q = (y_1, \ldots, y_n)$ definimos $\overrightarrow{pq}$ como $(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$.

Contemplar $\mathbf{k}^n$ de esta forma como espacio afín es relativamente sencillo e intuitivo. La única dificultad reside en que tenemos que pensar un mismo conjunto $\mathbf{k}^n$ a la vez como el conjunto de puntos del espacio afín estándar y como el espacio vectorial asociado al espacio afín estándar. Es decir, dependiendo de la situación, un elemento de $\mathbf{k}^n$ será un punto o será un vector y conviene tener claro cómo lo estamos considerando en cada caso.

El ejercicio 1.7 puede generalizarse como sigue:

Ejemplo 1.8. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbf{k}$. Se puede dotar a V de estructura de espacio afín considerando (V, V, φ), donde

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (v_1, v_2) & \mapsto & v_2 - v_1 \end{array}.$$

2. Subespacios afines

En la asignatura de Álgebra Lineal, casi desde el comienzo, ya os habéis encontrado con espacios afines. En efecto, imaginemos en el espacio vectorial estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ el conjunto de soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = b_m \end{array} . \tag{2.0.1}$$

Si el sistema de ecuaciones (2.0.1) es homogéneo, su conjunto de soluciones tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbf{k}$ (es un subespacio vectorial de $\mathbf{k}^n$). En cambio, si el sistema no es homogéneo, el conjunto de soluciones no es un subespacio vectorial (por ejemplo, no contiene al vector $(0, \ldots, 0)$, que es una condición necesaria para que sea subespacio vectorial). Entonces cabe preguntarse qué estructura tiene el espacio de soluciones de un sistema no homogéneo, ya que parece claro que algún tipo de estructura tiene. Por ejemplo parece bastante intuitivo hablar de su dimensión, que de manera informal podríamos definir como el número mínimo de parámetros que nos hacen falta para expresar de manera explícita dicho conjunto (el número mínimo de parámetros que aparecen cuando resolvemos el sistema). La respuesta a nuestra pregunta de qué estructura tiene el conjunto de soluciones $\mathscr{S}$ de (2.0.1) es, como vemos en el ejercicio siguiente, que $\mathscr{S}$ es un espacio afín cuyo espacio vectorial asociado es el espacio de soluciones de su sistema homogéneo asociado, que es

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} . \tag{2.0.2}$$

Ejercicio 2.1. Demuestra usando la definición de espacio afín que, si (2.0.1) es un sistema compatible, el conjunto de soluciones de (2.0.1) es en efecto un espacio afín. Indicación: usa la aplicación φ del espacio afín estándar $(\mathbf{k}^n, \mathbf{k}^n, \varphi)$.

Recordemos que $\mathbf{k}^n$ no es solo un espacio vectorial, sino que también se le puede dotar de estructura de espacio afín. Si nos paramos a pensarlo un poco nos daremos cuenta de que la estructura de espacio afín que hemos dado al conjunto de soluciones de (2.0.1) es la "heredada" de la estructura de espacio afín de $\mathbf{k}^n$. Es decir, el conjunto de soluciones de (2.0.1) es un subconjunto del espacio afín $\mathbf{k}^n$ que tiene a su vez una estructura de espacio afín, compatible con la estructura de espacio afín de $\mathbf{k}^n$. Por otra parte, recuerda que, dada una solución particular $p = (x_1, \ldots, x_n)$ de (2.0.1), un elemento q de $\mathbf{k}^n$ es una solución de (2.0.1) si y solo si existe una solución w de (2.0.2) tal que $q = p + w$. Por tanto, una manera de describir geométricamente el conjunto de soluciones de (2.0.1) es la siguiente: si W es el conjunto de soluciones de (2.0.2) y p es una solución particular de (2.0.1), el conjunto de soluciones de (2.0.1) es $p + W := \{p + w \mid w \in W\}$, es decir, el subconjunto de

$\mathbf{k}^n$ que obtenemos al "trasladar paralelamente a sí mismo" el subespacio vectorial W de $(0,\dots,0)$ (que pertenece a W) a p (como al hacer esto $(0,\dots,0)$ se convierte en p, $p+W$ no tiene por qué contener a $(0,\dots,0)$). Todo esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.2. Sea (A,V,φ) un espacio afín, sea p un punto de A y sea W un subespacio vectorial de V. Llamamos *subespacio afín paralelo o con dirección W que pasa por p* y lo denotamos como $p+W$ al subconjunto de puntos q de A para los que existe algún $w \in W$ tal que $q = p + w$, o lo que es lo mismo, para los que existe algún $w \in W$ tal que $\overrightarrow{pq} = w$.

Ejercicio 2.3. Sea (A,V,φ) un espacio afín. Consideramos un punto $p \in A$ y un subespacio vectorial W de V.

(1) Demuestra que existe un único subespacio afín por p paralelo a W.
(2) Si $q \in p+W$, entonces $q+W = p+W$.
(3) Si $q, r \in p+W$, entonces $\overrightarrow{qr} \in W$ (indicación: comprueba que $\overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr} - \overrightarrow{pq}$.)

Ejercicio 2.4. (1) Demuestra que un subespacio afín $p+W$ de un espacio afín (A,V,φ) tiene a su vez estructura de espacio afín (indicación: considera $(p+W, W, \varphi')$, donde φ' es la restricción de φ a $(p+W)\times(p+W)$).
(2) Demuestra que el conjunto de soluciones de (2.0.1) es un subespacio afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ cuya dirección es el subespacio vectorial de $\mathbf{k}^n$ formado por las soluciones de su sistema homogéneo asociado (2.0.2).

Teniendo en cuenta el ejercicio 2.4, definimos la *dimensión* de una subvariedad afín como su dimensión como espacio afín. Es fácil ver que los subespacios afines de A de dimensión 0 son los puntos de A. Los subespacios afines de A de dimensión 1 y 2 son, como dijimos antes, rectas y planos (de A). Si A tiene dimensión n, sus subespacios afines de dimensión $n-1$ se llaman *hiperplanos afines de A*.

Ejercicio 2.5. Sean $A_1 \subseteq A_2$ dos subespacios afines.

(1) Demuestra que $\dim A_1 \le \dim A_2$.
(2) Demuestra que $A_1 = A_2$ si y solo si $\dim A_1 = \dim A_2$.

Definición 2.6. Decimos que dos subespacios afines $p+W$ y $p'+W'$ de un espacio afín son *paralelos* si $W \subset W'$ o $W' \subset W$.

Proposición 2.7. *Sean A_1 y A_2 dos subespacios afines paralelos de A. Entonces ocurre una de las tres cosas siguientes:*

(1) $A_1 \subseteq A_2$;
(2) $A_2 \subseteq A_1$;
(3) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Demostración. Si se da (1) o (2) ya hemos terminado. Supongamos que no se da ni (1) ni (2) y que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ para llegar a una contradicción. Sean W_1 y W_2 las direcciones de A_1 y A_2 y sea $p \in A_1 \cap A_2$. Supongamos que $W_1 \subseteq W_2$ (si $W_2 \subseteq W_1$ el argumento es análogo). Entonces $A_1 = p + W_1 \subset p + W_2 = A_2$ y en efecto llegamos a una contradicción. □

Vemos a continuación qué "operaciones" podemos realizar con subespacios afines.

Proposición 2.8. *La intersección de (una colección arbitraria de) subespacios afines, si no es vacía, es un subespacio afín.*

Demostración. Hacemos la demostración en el caso de dos subespacios y dejamos como ejercicio el caso general. Sean A_1 y A_2 dos subespacios afines no disjuntos de un espacio afín A y sea $p \in A_1 \cap A_2$. Podemos escribir $A_1 = p + V_1$ y $A_2 = p + V_2$. En ese caso $A_1 \cap A_2 = p + (V_1 \cap V_2)$. En efecto, sea $q \in A_1 \cap A_2$ y sea $v = \overrightarrow{pq}$. Entonces $v = \overrightarrow{pq} \in V_1$ y $v = \overrightarrow{pq} \in V_2$, por lo que $v \in V_1 \cap V_2$ y $q = p + v$. Por otra parte, si $q \in p + (V_1 \cap V_2)$, entonces $q \in (p + V_1) \cap (p + V_2) = A_1 \cap A_2$. □

La unión de dos subespacios afines no es en general un subespacio afín, como se puede ver después de resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2.9.
(1) Demuestra, por medio de algún ejemplo, que la unión de dos subespacios afines no es en general un subespacio afín.
(2) Sea A un espacio afín sobre un cuerpo $\mathbf{k} \neq \mathbf{Z}_2$. Demuestra, que la condición necesaria y suficiente para que la unión de dos subespacios afines A_1 y A_2 sea un subespacio afín es que $A_1 \subseteq A_2$ o $A_2 \subseteq A_1$.

Como acabamos de ver en el ejercicio anterior la unión de dos subespacios afines A_1 y A_2 no es en general un subespacio afín. Lo que sí tiene sentido es considerar el subespacio afín "más pequeño" que contiene a A_1 y a A_2 (o lo que es lo mismo, a la unión de ambos):

Proposición 2.10. *Sean $A_1 = p_1 + W_1$ y $A_2 = p_2 + W_2$ dos subespacios afines de un espacio afín A. El subespacio afín $A' = p_1 + (W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{p_1p_2}))$ es el subespacio afín "más pequeño" que contiene a $A_1 \cup A_2$, en el sentido de que si A'' es otro subespacio afín que contiene a $A_1 \cup A_2$, se tiene que $A' \subseteq A''$.*

Demostración. Vemos que $A_1 \cup A_2 \subseteq A'$. En efecto, es claro que $A_1 \subset A'$. Por otra parte, si $q \in A_2$, q se puede escribir como $q = p_2 + w_2$, para algún $w_2 \in W_2$. En ese caso $q = p_1 + \overrightarrow{p_1p_2} + w_2 \in p_1 + (W_2 + L(\overrightarrow{p_1p_2})) \subseteq A'$. Vemos ahora que si $A_1 \cup A_2 \subseteq A''$, entonces $A' \subseteq A''$. Es claro que $p_1, p_2 \in A''$, por lo que podemos escribir $A'' = p_1 + W'' = p_2 + W''$, donde W'' es la dirección de A''. Como $A_1 \subseteq A''$, $W_1 \subseteq W''$ y como $A_2 \subseteq A''$, $W_2 \subseteq W''$. Además, como $p_1, p_2 \in A''$, $\overrightarrow{p_1p_2} \in W''$. Por ello $A' = p_1 + (W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{p_1p_2})) \subseteq p_1 + W'' = A''$. □

La proposición anterior motiva la siguiente definición:

Definición 2.11. Sean $A_1 = p_1 + W_1$ y $A_2 = p_2 + W_2$ dos subespacios afines de un espacio afín A. Entonces $A' = p_1 + (W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{p_1p_2}))$ se llama el *subespacio afín generado por A_1 y A_2* y se denota $< A_1, A_2 >$. En general, si S es un subconjunto no vacío de A, $< S >$ es el subespacio afín más pequeño entre los que contienen a S, que llamamos el *subespacio afín generado por S*.

Ejercicio 2.12. Demuestra que el subespacio afín más pequeño entre los que contienen a un subconjunto S de A existe y es único (indicación: considera la intersección de todos los subespacios afines de A que contienen a S.)

Observación 2.13. Consideramos dos subespacios afines $A_1 = p_1 + W_1$ y $A_2 = p_2 + W_2$.
(1) Del ejercicio 2.3 se sigue que $< A_1, A_2 >= p + (W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{p_1p_2}))$ para cualquier $p \in A_1 \cup A_2$.
(2) Es claro que $< A_1, A_2 >=< A_1 \cup A_2 >$.

Ejercicio 2.14. Sean $p_1, \cdots, p_k$ puntos de un espacio afín A.
(1) Demuestra que si p_1 y p_2 son puntos distintos, entonces $< p_1, p_2 >$ es una recta afín de A.
(2) Demuestra que si p_1, p_2 y p_3 son puntos *no alineados* (es decir, no contenidos en nunguna recta), $< p_1, p_2, p_3 >$ es un plano afín de A.

(3) Demuestra que el subespacio generado por $p_1, p_2, \ldots, p_k$ es $< p_1, p_2, \ldots, p_k >= p_1 + L(\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_k})$.

Definición 2.15. Decimos que los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de un espacio afín A son puntos *afínmente independientes* si el subespacio afín $< p_1, p_2, \ldots, p_k >$ generado por ellos tiene dimensión $k-1$.

Ejercicio 2.16. Sea (A, V, φ) un espacio afín.

(1) Sean $p_1, p_2, \ldots, p_k \in A$. Demuestra que $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son afínmente independientes si y solo si los vectores $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_k}$ de V son linealmente independientes.
(2) Si (A, V, φ) tiene dimensión n, demuestra que existen conjuntos $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ de puntos (distintos) afínmente independientes si y solo si $1 \leq k \leq n+1$.

Para finalizar esta sección vemos cómo podemos describir usando ecuaciones los subespacios afines de $\mathbf{A}^n_\mathbf{k}$. En realidad, todo subespacio afín A' de $\mathbf{A}^n_\mathbf{k}$ es el conjunto de soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales como (2.0.1). Decimos que las ecuaciones de dicho sistema son unas *ecuaciones implícitas* de A'. Por otra parte, si describimos de forma explícita los puntos de A' como el conjunto de soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales como (2.0.1), expresado de forma *paramétrica*, diremos que esas ecuaciones son unas *ecuaciones paramétricas* de A'. La descripción de los subespacios afines por medio de ecuaciones facilita su manejo; nos permite por ejemplo ver más fácilmente si un punto pertenece a un subespacio o expresar más fácilmente la intersección de subespacios o describir el subespacio generado por un subconjunto. En el siguiente ejercicio vemos con un ejemplo concreto cómo se obtienen ecuaciones implícitas y paramétricas de un subespacio afín. También vemos que las ecuaciones de un subespacio afín no son únicas.

Ejercicio 2.17. Consideramos en el espacio afín estándar $\mathbf{A}^4_\mathbf{k}$ el subespacio afín generado por los puntos $(1,0,1,0)$, $(1,-1,2,0)$ y $(0,1,1,1)$.

(1) ¿Cuál es la dimensión de A'?
(2) Encuentra al menos dos conjuntos de ecuaciones paramétricas de A'.
(3) Encuentra al menos dos conjuntos de ecuaciones implícitas de A'.

3. Aplicaciones afines

Al igual que se hace en álgebra lineal, en geometría afín estudiaremos aquellas aplicaciones entre espacios afines que *preserven la estructura afín.* ¿Qué queremos decir con eso? Son aplicaciones que conservan las propiedades geométricas de las que hemos estado hablando en los temas anteriores: la "linearidad" (es decir, la propiedad de ser subespacio afín), el paralelismo y, si es posible, la dimensión de un subespacio afín. Para esto parece sensato que, dada una aplicación entre los conjuntos de puntos A_1 y A_2 de dos espacios afines, consideremos también qué pasa con las direcciones V_1 y V_2 de dichos espacios y con las aplicaciones φ_1 y φ_2.

Definición, primeras propiedades y ejemplos

Definición 3.1. Una *aplicación afín* entre dos espacios afines (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2) es una aplicación

$$f : A_1 \longrightarrow A_2$$

junto con una aplicación lineal

$$\vec{f} : V_1 \longrightarrow V_2$$

tal que para cualesquiera $p, q \in A_1$, $\vec{f}(\vec{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$. A $\vec{f}$ la llamamos *aplicación lineal asociada* a f.

Observación 3.2. Otra forma de expresar la definición 3.1 es la siguiente: una aplicación $f : A_1 \longrightarrow A_2$ es una aplicación afín si y solo si existe una aplicación lineal $\vec{f} : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_1 \times A_1 \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \times A_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\ V_1 \arrow[r, "\vec{f}"] & V_2 \end{tikzcd}$$

es *conmutativo* (i.e, $\varphi_2 \circ (f \times f) = \vec{f} \circ \varphi_1$), donde, para todo $p, q \in A_1$, $(f \times f)(p, q) := (f(p), f(q))$.

Ejemplo 3.3. Vemos unos primeros ejemplos triviales de aplicaciones afines:

(1) Una aplicación constante entre dos espacios afines es una aplicación afín; su aplicación lineal asociada es la aplicación lineal nula.
(2) Sea (A, V, φ) un espacio afín. La aplicación id_A es una aplicación afín de A en A cuya aplicación lineal asociada es id_V.

Ejemplo 3.4. La aplicación de $\mathbf{A}^3_\mathbf{k}$ a $\mathbf{A}^4_\mathbf{k}$ dada por

$$f(x, y, z) = (y + z, -1 + 2x + 2y, 2 + x - z, 1 + x - y + 3z)$$

es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada $\vec{f}$ (que va del espacio vectorial $\mathbf{k}^3$ al espacio vectorial $\mathbf{k}^4$) viene dada por

$$\vec{f}(x, y, z) = (y + z, 2x + 2y, x - z, x - y + 3z).$$

Proposición 3.5. *Sean (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2) dos espacios afines.*

(1) *Sea f una aplicación entre A_1 y A_2. Si existe $o \in A_1$ tal que la aplicación*

$$\begin{array}{cccc} f' : & V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ & \vec{op} & \mapsto & \overrightarrow{f(o)f(p)} \end{array}$$

es lineal, entonces f es una aplicación afín y f' es su aplicación lineal asociada.
(2) *Sea f una aplicación afín entre A_1 y A_2, sea $\vec{f}$ su aplicación lineal asociada y sea $o \in A_1$. Para todo $p \in A_1$ se tiene que $f(p) = f(o) + \vec{f}(\vec{op})$. De igual forma, para todo $v \in V_1$, $f(o + v) = f(o) + \vec{f}(v)$. Por tanto, f queda determinada de forma única si se conoce $\vec{f}$ y la imagen por f de un punto de A_1.*
(3) *Sea $p_1 \in A_1$, $p_2 \in A_2$ y sea $f' : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicación lineal. Existe una única aplicación afín $f : A_1 \longrightarrow A_2$ tal que*
   (i) *$f(p_1) = p_2$; y*
   (ii) *la aplicación lineal asociada de f sea $\vec{f} = f'$.*
(4) *Sea $p_1 + W_1$ un subespacio afín de (A_1, V_1, φ_1), sea f una aplicación afín entre A_1 y A_2 y sea $\vec{f}$ su aplicación lineal asociada. Entonces $f(p_1 + W_1) = f(p_1) + \vec{f}(W_1)$. Por ello,*
   (a) *las aplicaciones afines transforman subespacios afines en subespacios afines;*

(b) *las aplicaciones afines transforman subespacios afines paralelos en subespacios afines paralelos;*
(c) *las aplicaciones afines transforman puntos alineados en puntos alineados.*

Demostración. Dejamos la demostración de (1) como un ejercicio teórico sencillo. (2) es simplemente la igualdad $\vec{f}(\vec{op}) = \overrightarrow{f(o)f(p)}$ expresada de otro modo. En (3), para demostrar la existencia consideramos la aplicación $f : A_1 \longrightarrow A_2$ definida así: para cualquier $p \in A_1$, $f(p) := p_2 + f'(\overrightarrow{p_1p})$. En ese caso, si $p, q \in A_1$, $\overrightarrow{f(p)f(q)}$ es el vector que comienza en $p_2 + f'(\overrightarrow{p_1p})$ y termina en $p_2 + f'(\overrightarrow{p_1q})$, es decir, el vector $\overrightarrow{p_2p_2} + f'(\overrightarrow{p_1q}) - f'(\overrightarrow{p_1p})$ y, como f' es lineal, este último es igual a $f'(\overrightarrow{p_1q} - \overrightarrow{p_1p}) = f'(\overrightarrow{pp_1} + \overrightarrow{p_1q}) = f'(\overrightarrow{pq})$. Por tanto f es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada es f'. Además $f(p_1) = p_2 + f'(\overrightarrow{p_1p_1}) = p_2 + f'(\vec{0}) = p_2$. La unicidad se sigue de (2). (4) se sigue de manera inmediata de (2). En cuanto a (a), (b) y (c), son corolarios inmediatos de (4). $\square$

Ejemplos 3.6. En $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ consideramos los puntos $p_1 = (0,0), p_2 = (1,0), p_3 = (1,1)$ y $p_4 = (2,1)$, los puntos $p'_1 = (0,0), p'_2 = (1,0), p'_3 = (0,-1)$ y $p'_4 = (2,-1)$ y los puntos $q = (2,0)$ y $q' = (2,4)$.

(1) La aplicación f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tal que $f(p_i) = p'_i$ para todo $i = 1, \ldots, 4$ no es una aplicación afín porque si lo fuera transformaría la recta $< p_1, p_3 >$ en la recta $< p'_1, p'_3 >$ y la recta $< p_2, p_4 >$ en la recta $< p'_2, p'_4 >$, pero las rectas $< p_2, p_4 >$ y $< p'_2, p'_4 >$ no son paralelas.
(2) La aplicación g de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que cumple $f((x,y)) = (x, x^2)$ no es una aplicación afín pues transforma los puntos p_1, p_2 y q, que están alineados, en los puntos p_1, p_3 y q', que no lo están.

Investigamos ahora cómo se comporta la composición de aplicaciones afines:

Proposición 3.7. *Sean A_1, A_2 y A_3 tres espacios afines, sean $g : A_1 \longrightarrow A_2$ y $h : A_2 \longrightarrow A_3$ dos aplicaciones afines y sean $\vec{g}$ y $\vec{h}$ sus aplicaciones lineales asociadas respectivas. La composición $h \circ g : A_1 \longrightarrow A_3$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es $\vec{h} \circ \vec{g}$.*

Demostración. Se sigue de forma directa de la definición de aplicación afín, aplicación lineal asociada y del hecho de que g y h sean aplicaciones afines. $\square$

Traslaciones

Vemos a continuación un ejemplo importante de aplicaciones afines de un espacio en sí mismo, las *traslaciones*:

Ejemplo 3.8. *(traslación)* Sea (A, V, φ) un espacio afín y sea $v \in V$. La aplicación

$$\begin{array}{cccc} t_v : & A & \longrightarrow & A \\ & p & \mapsto & p+v \end{array}$$

es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada es la identidad. A t_v la llamamos la *traslación* de vector v.

Observación 3.9. Se tiene $t_v \circ t_w = t_{v+w}$. En particular una traslación t_v es una aplicación biyectiva (de forma más precisa, un *isomorfismo afín*; véase la definición 3.15) y $t_v^{-1} = t_{-v}$. Esto implica que el conjunto formado por las traslaciones de un espacio afín (A, V, φ) es un grupo abeliano isomorfo a $(V, +)$

La proposición 3.5 sugiere que la aplicación lineal asociada proporciona mucha información sobre la aplicación afín. Un ejemplo de esto es el siguiente resultado, donde se caracteriza a las traslaciones a partir de su aplicación lineal asociada.

Proposición 3.10. *Una aplicación afín de un espacio en sí mismo es una traslación si y solo si su aplicación lineal asociada es la identidad.*

Demostración. Que la aplicación lineal asociada a una traslación es la identidad es claro (y además es necesario comprobarlo para demostrar que una traslación es una aplicación afín). En efecto, basta comprobar que, para todo $p, q \in A$, el vector que comienza en $t_v(p)$ y termina en $t_v(q)$ es $\overrightarrow{pq}$. Por la definición de t_v, el vector que comienza en $t_v(p)$ y termina en $t_v(q)$ es $\overrightarrow{(p+v)(q+v)}$ y este último es, según el ejercicio 1.5 (4), igual a $\overrightarrow{pq}+v-v=\overrightarrow{pq}$. Para ver el recíproco, consideremos un espacio afín (A, V, φ) y una aplicación afín f de A en A, tal que su aplicación lineal asociada sea $\overrightarrow{f} = id_V$. Sea $p \in A$ y sea $v = \overrightarrow{pf(p)}$. Entonces la proposición 3.5 (2) implica que para todo $q \in A$, $f(q) = f(p) + \overrightarrow{pq}$. La ley del paralelogramo implica que $f(q) = q + v$. $\square$

Observación 3.11. *(estructura de una aplicación afín)* Sean (A, V, φ) y (A', V', φ') dos espacios afines y sea $f : A \longrightarrow A'$ una aplicación afín. El objetivo de esta observación es mostrar cómo podemos "interpretar" f como la composición de una aplicación lineal de V a V' y una traslación de A' (hemos puesto interpretar entre comillas porque realmente *no es correcto* o, más bien, no tiene sentido, componer una aplicación lineal de V a V' con una aplicación afín de A' en A').

Para ello, fijamos un punto $o \in A$ y un punto $o' \in A'$. Esto nos permite "ver" A y A' como espacios vectoriales, ya que φ_o y $\varphi'_{o'}$ nos proporcionan sendas biyecciones de A y A' a V y V' respectivamente (recuerda la observación 1.3). Definimos el vector $v = \overrightarrow{o'f(o)}$. Definimos $g = t_{-v} \circ f$, que es una aplicación afín por la proposición 3.7. En ese caso $f = t_v \circ g$. Estudiamos ahora cómo es g. Usando las identificaciones de A con V y de A' con V' que nos proporcionan φ_o y $\varphi'_{o'}$, podemos interpretar g como una aplicación lineal. De hecho podemos identificar g con la aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ de f. En efecto, si denotamos por $\overrightarrow{g}$ a la aplicación lineal asociada de g, es fácil ver que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_o"] & A' \arrow[d, "\varphi'_{o'}"] \\
V \arrow[r, "\overrightarrow{g}"] & V'
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, ya que $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{g(o)g(p)} = \overrightarrow{o'g(p)}$. Por tanto, vía las identificaciones de A y A' con V y V' respectivamente, dadas por φ_o y $\varphi'_{o'}$, podemos identificar g con la aplicación lineal $\overrightarrow{g}$. Finalmente las proposiciones 3.7 y 3.10 nos permiten identificar g con la aplicación lineal asociada a f. Esto nos permite "ver" f como la composición de $\overrightarrow{f}$ seguida de t_v.

Vemos qué nos dice la construcción anterior en el caso en que $A = \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, $A' = \mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$, $o = (0, \dots, 0) \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $o' = (0, \dots, 0) \in \mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$. En este caso las aplicaciones φ_o y $\varphi'_{o'}$ se convierten en la identidad en $\mathbf{k}^n$ y la identidad en $\mathbf{k}^m$. En este sentido, recuerda que, en la definición de espacio afín estándar de dimensión n, $\mathbf{k}^n$ juega a la vez el papel de conjunto de puntos del espacio afín y el papel de espacio vectorial asociado, por lo que la biyección $\varphi_o = \mathrm{id} : \mathbf{k}^n \longrightarrow \mathbf{k}^n$ (y análogamente $\varphi'_{o'} = \mathrm{id} : \mathbf{k}^m \longrightarrow \mathbf{k}^m$) es otra forma de decir que los elementos del conjunto $\mathbf{k}^n$ de la izquierda los vamos a ver como puntos del espacio afín estándar mientras que los elementos del conjunto $\mathbf{k}^n$ de la derecha los vamos a ver como vectores del espacio vectorial estándar. En esta situación, el diagrama conmutativo del párrafo anterior es entonces

$$\begin{tikzcd} \mathbf{k}^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id"] & \mathbf{k}^m \arrow[d, "id"] \\ \mathbf{k}^n \arrow[r, "\overrightarrow{g}"] & \mathbf{k}^m \end{tikzcd}$$

y una aplicación afín f de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ se puede entender como la composición de una aplicación lineal de $\mathbf{k}^n$ a $\mathbf{k}^m$ (la aplicación lineal asociada a f) seguida de una traslación de $\mathbf{k}^m$ (de vector $v = \overrightarrow{o'f(o)}$). Así, para cualquier punto $p = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, el punto $f(p) = (y_1, \ldots, y_m)$ cumple

$$M \cdot X + B = Y,$$

donde M es la matriz de $\overrightarrow{f}$ respecto de las bases canónicas de $\mathbf{k}^n$ y $\mathbf{k}^m$, $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $B = (b_1, \ldots, b_m)^t$, $f(o) = (b_1, \ldots, b_m)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_m)^t$. Así pues, las aplicaciones afines entre $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ tienen el aspecto de la aplicación afín del ejemplo 3.4 en el sentido de que cada coordenada de una aplicación afín es una combinación lineal de las coordenadas de $\mathbf{k}^n$ más una constante.

Observación 3.12. Tanto la observación 3.11 como la proposición 3.5 nos dicen que, entre todas las aplicaciones que existen entre dos espacios afines, las aplicaciones afines forman una clase muy especial. Por ejemplo una aplicación que transforme un paralelogramo en un cuadrilátero que no lo sea (tal y como ocurre en el ejemplo 3.6 (1)) no podría ser una aplicación afín (¡piensa por qué!). De igual forma, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} \\ (x,y) & \mapsto & (x^2 - y^2 + 1, x - 3) \end{array}$$

tampoco es una aplicación afín (¡piensa por qué!). En general, si se nos da una aplicación entre dos espacios afines lo más probable es que esta no sea una aplicación afín.

Isomorfismos afines

Una aplicación afín *no* conserva necesariamente la dimensión de los subespacios afines. El ejemplo más sencillo de esto es si consideramos una aplicación constante desde un espacio afín de dimensión positiva. De la proposición 3.5 (3) se deduce que una condición necesaria y suficiente para que una aplicación afín conserve la dimensión de los subespacios afines es que $\overrightarrow{f}$ sea inyectiva (piénsalo, es solo álgebra lineal). Como comentamos antes, la aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ de una aplicación afín f nos dice mucho sobre f. Veremos ahora que $\overrightarrow{f}$ es inyectiva si y solo si f es inyectiva; no solo eso, se da también el resultado análogo para aplicaciones sobreyectivas y biyectivas:

Proposición 3.13. *Sea f una aplicación afín entre dos espacios afines (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2) y sea $\overrightarrow{f}$ su aplicación lineal asociada.*

(1) *f es inyectiva si y solo si $\overrightarrow{f}$ es inyectiva;*
(2) *f es sobreyectiva si y solo si $\overrightarrow{f}$ es sobreyectiva;*
(3) *f es biyectiva si y solo si $\overrightarrow{f}$ es biyectiva;*

(4) *si A_1 y A_2 tienen la misma dimensión (por ejemplo, si $A_1 = A_2$), f es inyectiva si y solo si f es biyectiva si y solo si f es sobreyectiva.*

Demostración. Demostramos primero (1). Supongamos primero que f es inyectiva y probemos que en ese caso $\overrightarrow{f}$ también lo es. Sean v_1 y v_1' dos vectores de V_1, sea $p \in A_1$ y sean $p_1 = p + v_1$ y $p_1' = p + v_1'$. Supongamos que $\overrightarrow{f}(v_1) = \overrightarrow{f}(v_1')$. Entonces $f(p_1) = f(p) + \overrightarrow{f}(v_1) = f(p) + \overrightarrow{f}(v_1') = f(p_1')$ y como f es inyectiva, $p_1 = p_1'$. Como $(\varphi_1)_p$ es una biyección entre A_1 y V_1, se sigue que $v_1 = v_1'$. Ahora suponemos que $\overrightarrow{f}$ es inyectiva. Sean $q_1, q_1' \in A$ tales que $f(q_1) = f(q_1')$. Entonces $\overrightarrow{0}_{V_2} = \overrightarrow{f(q_1)f(q_1')} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{q_1q_1'})$, por lo que, al ser $\overrightarrow{f}$ inyectiva, $\overrightarrow{q_1q_1'} = \overrightarrow{0}_{V_1}$. Entonces, se sigue del ejercicio 1.5 (1) que $q_1 = q_1'$.
La afirmación (2) se sigue de la proposición 3.5 (4).
La afirmación (3) se sigue de (1) y (2).
La afirmación (4) se sigue de (1), (2) y (3) y del resultado análogo de álgebra lineal. □

Corolario 3.14. *Una aplicación afín inyectiva transforma puntos afínmente independientes en puntos afínmente independientes.*

Demostración. Sea f una aplicación afín entre dos espacios afines (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2). Sean $p_1, \dots, p_k$ puntos de A_1 afínmente independientes. En ese caso se sigue del ejercicio 2.16, (1) que los vectores $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_k}$ de V_1 son linealmente independientes. Si f es inyectiva, se sigue de la proposición 3.13, (1) que $\overrightarrow{f}$ es inyectiva, por lo que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1p_2}), \dots, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1p_k})$, o lo que es lo mismo, $\overrightarrow{f(p_1)f(p_2)}, \dots, \overrightarrow{f(p_1)f(p_k)}$, son linealmente independientes. De nuevo el ejercicio 2.16, (1) implica que $f(p_1), \dots, f(p_k)$ son puntos afínmente independientes de A_2. □

Definición 3.15. (1) A una aplicación afín biyectiva la llamamos *isomorfismo afín*.
(2) Si existe un isomorfismo afín entre dos espacios afines A_1 y A_2, decimos que A_1 y A_2 son isomorfos.

Observación 3.16. Es un resultado conocido de álgebra lineal que dos espacios vectoriales son isomorfos (es decir, existe un isomorfismo de espacios vectoriales entre ellos) si y solo si tienen la misma dimensión. Esto y las proposiciones 3.5, (3) y 3.13 nos dicen que dos espacios afines son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión.

Investigamos ahora cómo se comportan las inversas de las aplicaciones afines biyectivas:

Proposición 3.17. (1) *El inverso de un isomorfismo afín es una aplicación afín, de hecho, es de nuevo un isomorfismo afín. En particular, la inversa de una isomorfismo afín es de nuevo una isomorfismo afín.*
(2) *El conjunto de los isomorfismos afines de un espacio afín en sí mismo es un grupo, en general no abeliano, con respecto a la composición de aplicaciones.*

Demostración. La dejamos como un (sencillo) ejercicio teórico. □

Más ejemplos

De los ejemplos que hemos visto hasta ahora, es claro que la identidad y las traslaciones son ejemplos de isomorfismos afines de un espacio afín en sí mismo. Obviamente, una aplicación constante no es inyectiva salvo que el espacio de partida sea un punto (ya lo vimos antes cuando observamos que en general las aplicaciones afines no conservaban las dimensiones). Vemos a continuación más ejemplos de aplicaciones afines y de isomorfismos afines.

Ejemplo 3.18. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales y sea f una aplicación lineal de V_1 a V_2. Entonces f da lugar de manera obvia a una aplicación afín entre los espacios afines que asociamos a V_1 y V_2 (véase el ejemplo 1.8).

Ejemplo 3.19. *(homotecia)* Sea (A, V, φ) un espacio afín, sea $\lambda \in \mathbf{k} \setminus \{0, 1\}$ y sea $o \in A$. La aplicación f de A en A que deja o fijo (es decir, $f(o) = o$) y que tiene por aplicación lineal asociada una *homotecia vectorial de razón* λ es un isomorfismo afín de A en sí mismo que llamamos *homotecia afín de razón* λ *y centro* o. Equivalentemente, h es una homotecia de de razón λ y centro o si, para todo $p \in A$, $h(p) = o + \lambda \cdot \overrightarrow{op}$.

Proposición 3.20. (1) *Una homotecia tiene un único punto fijo (el punto al que hemos llamado centro).*
(2) *Una aplicación afín de un espacio afín en sí mismo es una homotecia afín si y solo si su aplicación lineal asociada es una homotecia vectorial.*

Demostración. (1) Sea h una homotecia de razón λ, sea $o \in A$ tal que $h(o) = o$ y sea $p \in A$. Supongamos que $h(p) = p$. Entonces $p = h(p) = h(o) + \lambda \cdot \overrightarrow{op} = o + \lambda \cdot \overrightarrow{op}$, de donde $(1 - \lambda) \cdot \overrightarrow{op} = \vec{0}$. Como $\lambda \neq 1$, $\overrightarrow{op} = \vec{0}$, que equivale a $o = p$.
(2) La aplicación lineal asociada de una homotecia es una homotecia vectorial por la definición de homotecia. Recíprocamente, si la aplicación lineal asociada $\vec{h}$ de una aplicación afín h es una homotecia vectorial (de razón $\lambda \neq 0, 1$) solo nos falta comprobar que h tiene algún punto fijo (que, por (1), a posteriori será único y el centro de h). Esto lo veremos en el ejercicio 4.15 (2), cuando hayamos ya hablado de la matriz asociada a una aplicación afín. □

Observación 3.21. Una homotecia h de centro o de razón λ es un isomorfismo afín. Esto se sigue de la proposición 3.13 (3), ya que $\vec{h}$ es una homotecia vectorial, que es un isomorfismo vectorial. Concretamente, la proposición 3.20 implica que h^{-1} es una homotecia de centro 0 y razón λ^{-1}.

Corolario 3.22. *El conjunto formado por las homotecias y las traslaciones de un espacio afín A forma un grupo respecto de la composición. Dicho grupo no es abeliano si A tiene dimensión positiva.*

Demostración. El conjunto formado por las homotecias y las traslaciones de A es un subgrupo del grupo de isomorfismos afines de A (recuerda la proposición 3.17 (2)). Esto se sigue de las proposiciones 3.7, 3.10 y 3.20 (2) y la observaciones 3.9 y 3.21. Para demostrar la segunda afirmación del enunciado, observa que una homotecia y una traslación de vector no nulo no conmutan. □

Antes de ver el siguiente ejemplo demostramos un lema sobre intersecciones de subespacios afines con direcciones complementarias:

Lema 3.23. *Dos subespacios afines de un espacio afín (A, V, φ) cuyas direcciones son subespacios vectoriales complementarios de V se cortan en un solo punto.*

Demostración. Sean $L_1 = p + W_1$ y $L_2 = q + W_2$ dos subespacios afines de (A, V, φ) tales que $W_1 \oplus W_2 = V$. Vemos primero que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Sean $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que

$\overrightarrow{pq} = w_1+w_2$. Sea $p_1 = p+w_1$ (por tanto, p_1 está en L_1). Entonces $\overrightarrow{pq} = w_1+w_2 = \overrightarrow{pp_1}+\overrightarrow{p_1q}$, por lo que $\overrightarrow{p_1q} = w_2 \in W_2$. Por ello, $\overrightarrow{qp_1} \in W_2$, por lo que $p_1 \in L_2$ y $p_1 \in L_1 \cap L_2$. Vemos ahora que $L_1 \cap L_2$ contiene un solo punto. Como $p_1 \in L_1 \cap L_2$, sabemos que $L_1 \cap L_2 = p_1 + (W_1 \cap W_2) = p_1 + \{\vec{0}\} = \{p_1\}$. □

Proposición 3.24. *En un espacio afín (A, V, φ) consideramos un subespacio afín L con dirección W y un subespacio U de V, complementario de W. Consideramos la aplicación π que envía cada $p \in A$ al único punto en $(p + U) \cap L$. La aplicación π es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada es la proyección vectorial sobre W con dirección U (o paralelamente a U).*

Demostración. Sea $o \in L$. Dado $v \in V$, sea $p = o + v$ y sea $p' = \pi(p)$ (que está en $(p + U) \cap L$). Entonces $v = \overrightarrow{op} = \overrightarrow{op'} + \overrightarrow{p'p}$. Como $p' \in L$, $\overrightarrow{op'} \in W$. Como $p' \in p + U$, $\overrightarrow{p'p} = -\overrightarrow{pp'} \in U$. Entonces $v = \overrightarrow{op'} + \overrightarrow{p'p}$ es la descomposición (la única que existe) de v como suma de un vector de W y otro de U. Por tanto, $\overrightarrow{op'}$ es la proyección vectorial de v sobre W paralelamente a U. Por último, para que π sea una aplicación afín basta ver que para todo $v \in V$, la aplicación que manda v a $\overrightarrow{\pi(o)\pi(p)}$, donde $p = o + v$, es una aplicación lineal (que a posteriori concidirá con la aplicación lineal asociada de π). Como $o \in L$, $\pi(o) = o$ y $\overrightarrow{\pi(o)\pi(p)} = \overrightarrow{op'}$, por lo que la aplicación

$$v = \overrightarrow{op} \mapsto \overrightarrow{\pi(o)\pi(p)}$$

es la proyección vectorial sobre W paralelamente a U, que es una aplicación lineal. Por tanto, π es en efecto una aplicación afín y la aplicación lineal asociada a π es la proyección vectorial sobre W paralelamente a U. □

Definición 3.25. *(proyección)* A la aplicación π de la proposición 3.24 la llamamos *proyección (afín) sobre L con dirección U (o paralelamente a U).*

Proposición 3.26. *Una aplicación afín π de un espacio afín en sí mismo es una proyección si y solo si $\pi^2 = \pi$.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 3.27. *Sea (A, V, φ) un espacio afín sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ de característica distinta de 2. Consideramos un subespacio afín L de A con dirección W y un subespacio U de V complementario de W. Consideramos la aplicación σ*

$$\sigma : p \mapsto \pi(p) + \overrightarrow{p\pi(p)}$$

donde π es la proyección sobre L paralelamente a U (observa que $\pi(p)+\overrightarrow{p\pi(p)} = p+2\overrightarrow{p\pi(p)}$). La aplicación σ es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada es la simetría vectorial respecto de W con dirección U (o paralelamente a U).

Demostración. Damos un esbozo del argumento. Fijamos $o \in L$. Razonando como en el caso de las proyecciones, vemos que dado $p \in A$, el vector $\overrightarrow{op}$ se escribe como

$$\overrightarrow{op} = \overrightarrow{o\pi(p)} + \overrightarrow{\pi(p)p}.$$

Como $\overrightarrow{o\pi(p)} \in W$ y $\overrightarrow{\pi(p)p} \in U$, la imagen de $\overrightarrow{op}$ por la simetría vectorial respecto de W con dirección U es $\overrightarrow{o\pi(p)} - \overrightarrow{\pi(p)p}$. Por otra parte, $\overrightarrow{\sigma(o)\sigma(p)}$ se escribe como

$$\overrightarrow{\sigma(o)\sigma(p)} = \overrightarrow{o\sigma(p)} = \overrightarrow{o\pi(p)} + \overrightarrow{p\pi(p)} = \overrightarrow{o\pi(p)} - \overrightarrow{\pi(p)p},$$

es decir, la aplicación

$$\overrightarrow{op} \mapsto \overrightarrow{\sigma(o)\sigma(p)}$$

es la simetría vectorial respecto de W con dirección U. □

Definición 3.28. *(simetría)* A la aplicación σ de la proposición 3.27 la llamamos *simetría (afín) respecto de L con dirección U (o paralelamente a U)*. A L lo llamamos *base* de σ.

Si la base de σ es un punto decimos que σ es una *simetría central*.
Si la base de σ es una recta decimos que σ es una *simetría axial*.
Si la base de σ es un plano decimos que σ es una *simetría especular*.

Proposición 3.29. *Una aplicación afín σ de un espacio afín en sí mismo es una simetría si y solo si $\sigma^2 = \sigma$.*

Demostración. Ejercicio. □

Asociada a una proyección y generalizando a una simetría (y también a las homotecias) tenemos otro ejemplo interesante de aplicación afín:

Ejercicio 3.30. *(dilatación)* Sea $f : A \longrightarrow A$ una proyección de base L y dirección W y sea $\lambda \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$. Definimos la aplicación $g : A \longrightarrow A$ como $g(p) = f(p) - \lambda\overrightarrow{pf(p)}$.

(1) Demuestra que g es una aplicación afín y halla su aplicación lineal asociada.
Decimos que g es una dilatación de base L, dirección W y razón λ (el nombre es autoexplicativo desde un punto de vista geométrico, ya que si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ y $\lambda > 1$, g "dilata" el espacio afín desde L en la dirección W.
(2) Demuestra que toda simetría es una dilatación. ¿De qué razón?
(3) Demuestra que toda homotecia es una dilatación. ¿De qué razón?

En los últimos ejemplos hemos visto que, para varios tipos de aplicaciones afines f de un espacio afín A en sí mismo, existen puntos $p \in A$ que cumplen $f(p) = p$. También es fácil ver en dichos ejemplos la existencia de subespacios afines L tales que $f(L) \subseteq L$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 3.31. (1) Decimos que un punto p de un espacio afín A es un *punto fijo* por una aplicación afín f de A en A si $f(p) = p$.
(2) Decimos que un subespacio afín L de A es *invariante* por una aplicación afín de A en A si $f(L) \subseteq L$.

Proposición 3.32. *Sea (A, V, φ) un espacio afín y sea f una aplicación afín de A en A.*
(1) *Si el conjunto de puntos fijos de f no es vacío, es un subespacio afín de A.*
(2) *Un subespacio afín $p + W$ de A es invariante por f si y solo si W es invariante por $\overrightarrow{f}$ (es decir, $\overrightarrow{f}(W) \subseteq W$) y $\overrightarrow{pf(p)} \in W$.*
(3) *Una recta afín $p + L(v)$ de A es invariante por f si y solo si v es un vector propio de $\overrightarrow{f}$ y $\overrightarrow{pf(p)}$ es un múltiplo de v.*

Demostración. Ejercicio (indicación para (1): demuestra que si p es un punto fijo de f, el conjunto de puntos fijos de f es $p + \ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$, donde $\vec{f}$ es la aplicación lineal asociada a f). □

Observación 3.33. Ya vimos que el único punto fijo de una homotecia es su centro. Una traslación de vector v no tiene puntos fijos salvo si $v = \vec{0}$, en cuyo caso la traslación es la aplicación identidad y el conjunto de puntos fijos es todo es espacio afín. El subespacio de puntos fijos de una proyección sobre L es L (¡demuéstralo!). El subespacio de puntos fijos de una simetría y, en general, de una dilatación, de base L es L (¡demuéstralo!).

Los subespacios que contienen al centro de una homotecia h son invariantes por h. Los subespacios cuya dirección contiene al vector de una traslación t son invariantes por t. Los subespacios contenidos en la base de una proyección π (respectivamente de una simetría σ; respectivamente de una dilatación g) son, obviamente, invariantes por π (respectivamente por σ; respectivamente por g).

Ejercicio 3.34. Demuestra que si la dirección de un subespacio L' contiene la dirección de una proyección π (idem de una simetría σ; idem de una dilatación g), L' es invariante por σ.

Observación 3.35. ¡Cuidado! En general existen otros espacios invariantes por las proyecciones, simetrías y dilataciones además de la base de las mismas y los que se describen en el ejercicio 3.34. ¿Puedes dar algún ejemplo más?

Definimos otro ejemplo interesante de isomorfismo afín especificando entre otras cosas su conjunto de puntos fijos:

Definición 3.36. Sea f un isomorfismo afín de un espacio afín (A, V, φ) en sí mismo. Decimos que f es una *transvección de eje* L si su conjunto de puntos fijos es un hiperplano afín L de A y $\vec{f}$ no tiene más vectores propios que los vectores de la dirección de L.

Ejercicio 3.37. Sea f un isomorfismo afín de un espacio afín (A, V, φ) en sí mismo que tiene un hiperplano afín L de A como conjunto de puntos fijos. Demuestra que f es una transvección de eje L o una dilatación con base L.

Observación 3.38. Los ejemplos de aplicaciones afines de un espacio en sí mismo que hemos visto hasta ahora (traslaciones, homotecias, proyecciones, simetrías, dilataciones y transvecciones) son muy interesantes desde el punto de vista geométrico pero no son representativos, en el sentido de que son ejemplos de aplicaciones afines *especiales* (en contraposición a aplicaciones afines *generales*). Salvo las homotecias (que incluyen a las simetrías centrales) y las proyecciones sobre un punto (que no son sino las aplicaciones constantes), el conjunto de puntos fijos en los demás ejemplos mencionados es vacío o tiene dimensión positiva. Sin embargo, una aplicación afín general tiene un único punto fijo (dicho de forma intuitiva, esto quiere decir que la gran "mayoría" de las aplicaciones afines tienen un único punto fijo o que si elegimos "al azar" una aplicación afín, es muy, muy "probable" que esta tenga un único punto fijo). Aunque no disponemos de los conocimientos necesarios para definir de manera rigurosa lo que quiere decir general ni para demostrar la afirmación anterior, esta se basa en el análisis de los polinomios característicos de las aplicaciones lineales asociadas a las aplicaciones afines. Un polinomio general no tiene a 1 como raíz. Esto se traduce en que una aplicación lineal general no tiene vectores fijos no nulos. Como veremos un poco más adelante (en el ejercicio 4.15, (1)) si la aplicación lineal asociada $\vec{f}$ de una aplicación afín f tiene al vector $\vec{0}$ como único vector fijo, entonces f

tiene un único punto fijo. Esto tiene como consecuencia que una aplicación afín general tenga un y solo un punto fijo.

No debemos creer tampoco que las aplicaciones constantes y las homotecias, al tener un único punto fijo, son aplicaciones afines generales. Las primeras son obviamente aplicaciones muy particulares. En cuanto a las homotecias, estas también son especiales porque sus aplicaciones lineales asociadas, que son las homotecias vectoriales, lo son.

Tampoco cabe pensar que las traslaciones son generales entre las aplicaciones afines sin puntos fijos, ya que la aplicación lineal asociada a una traslación es muy especial: es la aplicación identidad.

Si quieres hacerte una idea de la variedad de aplicaciones afines existentes, por ejemplo en un plano afín, puedes consultar la sección X.9 de "Álgebra Lineal y Geometría", de M. Castellet e I. Llerena, donde puedes encontrar su clasificación (ten cuidado con la nomenclatura usada allí que es diferente a la de estas notas; así, lo que allí se llaman *homologías generales* son para nosotros dilataciones y lo que allí se llaman *homologías especiales* son para nosotros transvecciones).

Aplicaciones afines y razón simple

Definimos la razón simple de tres puntos alineados:

Definición 3.39. Sea A un espacio afín sobre $\mathbf{k}$. Dados tres puntos alineados p_1, p_2 y p_3 de A tales que $p_1 \neq p_2$, definimos su razón simple $(p_1\, p_2\, p_3)$ como el elemento $\lambda \in \mathbf{k}$ tal que $\overrightarrow{p_1p_3} = \lambda \overrightarrow{p_1p_2}$.

Observación 3.40. Sean p_1, p_2 y p_3 tres puntos alineados tales que $p_1 \neq p_2$.

(1) $(p_1\, p_2\, p_3) = 0$ si y solo si $p_3 = p_1$ y $(p_1\, p_2\, p_3) = 1$ si y solo si $p_3 = p_2$.
(2) Si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, la razón simple nos dice la posición del punto p_3 respecto de p_1 y p_2:
   (a) $(p_1\, p_2\, p_3) < 0$ si y solo si p_3 está fuera del segmento $\overline{p_1p_2}$ y "más cerca" de p_1 que de p_2.
   (b) $(p_1p_2p_3) = 0$ si y solo si $p_3 = p_1$.
   (c) $0 < (p_1\, p_2\, p_3) < 1$ si y solo si p_3 está en el interior del segmento $\overline{p_1p_2}$.
   (d) $(p_1p_2p_3) = 1$ si y solo si $p_3 = p_2$.
   (e) $(p_1\, p_2\, p_3) > 1$ si y solo si p_3 está fuera del segmento $\overline{p_1p_2}$ y "más cerca" de p_2 que de p_1.

Las aplicaciones afines conservan la razón simple como veremos en la siguiente proposición. De hecho, aunque no veremos la demostración, las aplicaciones afines se caracterizan, cuando la característica de $\mathbf{k}$ no es 2, por llevar puntos alineados a puntos alineados y conservar la razón simple (veáse, por ejemplo, la proposición X.3.7 de "Álgebra Lineal y Geometría", de M. Castellet e I. Llerena o el teorema 1.41 de "Geometría", de S. Xambó). Si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, algo más fuerte (y más sorprendente) es cierto: una biyección entre dos espacios afines de dimensión mayor que 1 que transforma rectas en rectas es una aplicación afín (es decir, en el caso real no hace falta comprobar que se conserva la razón simple, aunque así ocurra a posteriori). Este resultado recibe a veces el nombre de *teorema fundamental de la geometría afín* (véase por ejemplo el teorema 1.42 y el corolario 1.43 de "Geometría", de S. Xambó).

Proposición 3.41. *Sea $f : A \longrightarrow A'$ una aplicación afín y sean p_1, p_2, p_3 tres puntos alineados de A tales que $p_1 \neq p_2$. Entonces, cuando $(f(p_1)\, f(p_2)\, f(p_3))$ tenga sentido, $(p_1\, p_2\, p_3) = (f(p_1)\, f(p_2)\, f(p_3))$ (recuerda que, según la proposición 3.5 (4c), f lleva puntos* *alineados a puntos alineados, por lo que* $(f(p_1)\, f(p_2)\, f(p_3))$ *tiene sentido salvo cuando* $f(p_1) = f(p_2)$*).*

Demostración. Sea $(p_1\, p_2\, p_3) = \lambda$. Entonces $\overrightarrow{p_1p_3} = \lambda\overrightarrow{p_1p_2}$. Por otra parte $\overrightarrow{f(p_1)f(p_3)} = \vec{f}(\overrightarrow{p_1p_3}) = \lambda\vec{f}(\overrightarrow{p_1p_2})$, por ser $\vec{f}$ una aplicación lineal. Como $\vec{f}(\overrightarrow{p_1p_2}) = \overrightarrow{f(p_1)f(p_2)}$, se tiene el resultado. □

Como aplicación de la proposición 3.41 demostramos la siguiente formulación del teorema de Tales:

Proposición 3.42. *Sea* A *un plano afín sobre* $\mathbf{k}$*. Sean* r_1, r_2 *y* r_3 *tres rectas paralelas distintas de* A *y sean* l *y* l' *dos rectas no paralelas a* r_1, r_2 *y* r_3*. Sea* p_i *el punto de intersección de* r_i *y* l *y sea* p_i' *el punto de intersección de* r_i *y* l'*. Entonces* $(p_1\, p_2\, p_3) = (p_1'\, p_2'\, p_3')$*.*

Demostración. El resultado se sigue de aplicar la proposición 3.41 a la proyección sobre l' paralelamente a la dirección de r_1. □

4. Sistemas de referencia cartesianos y coordenadas

Aunque hemos estado hablando de espacios afines con toda generalidad, lo cierto es que, hasta ahora, en la mayoría de ejemplos y ejercicios solo hemos trabajado con el espacio afín estándar y con sus subespacios afines. Podemos justificar que estos ejemplos de espacios afines son los ejemplos más importantes y que no estamos perdiendo generalidad al referirnos casi exclusivamente a ellos por el hecho de que cualquier espacio afín sobre $\mathbf{k}$ de dimensión n es isomorfo al espacio afín estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, como se sigue de la observación 3.16. Sin embargo, para problemas concretos necesitamos dar isomorfismos explícitos entre un espacio afín y $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. ¿Cómo lo haremos? Inspirándonos en la cuestión análoga para espacios vectoriales. En ese caso, dado un espacio vectorial V de dimensión n sobre $\mathbf{k}$, podemos dar isomorfismos explícitos entre V y el espacio vectorial estándar $\mathbf{k}^n$ gracias a la existencia de bases en V. En efecto, una vez fijada una base B de V, podemos asignar a cada vector $v \in V$, de forma única, una n–upla de $\mathbf{k}^n$: las coordenadas de v con respecto a B. Esa asignación es un isomorfismo (no canónico) entre V y $\mathbf{k}^n$. Vía ese isomorfismo, podemos tratar los vectores de V "como si fueran" n–uplas del espacio vectorial $\mathbf{k}^n$. En este tema vamos a realizar el proceso análogo para espacios afines. Nuestro objetivo será, dado un espacio afín A de dimensión n, encontrar una manera de asignar a cada punto $p \in A$ una n–upla de coordenadas, de manera que esa asignación sea un isomorfismo afín entre A y el espacio afín estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. Recordemos que en la observación 1.3 ya vimos que si fijábamos un punto o en A, A se "transformaba" en un espacio vectorial. Como en un espacio vectorial ya sabemos cómo asignar coordenadas a cada vector, a saber, mediante la elección de una base, lo que haremos en el espacio afín (A, V, φ) es fijar un punto de A (un *origen*) y una base de V. Esto motiva la definición que daremos a continuación.

Referencias cartesianas, coordenadas y cambios de coordenadas

Definición 4.1. Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n sobre $\mathbf{k}$. Un *sistema de referencia cartesiano* de (A, V, φ) o, simplemente, una *referencia cartesiana* es un conjunto $\mathscr{R} = \{o; B\}$ donde o es un punto de A y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V. Dado $p \in A$, sus *coordenadas cartesianas* respecto de $\mathscr{R}$ son las coordenadas del vector $\overrightarrow{op}$ respecto de B.

Proposición 4.2. *Sea (A, V, φ) un espacio afín sobre $\mathbf{k}$, de dimensión n y sea $\mathscr{R}$ una referencia cartesiana de A. La aplicación*

$$\psi_{\mathscr{R}} : A \longrightarrow \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}},$$

que envía cada punto $p \in A$ a las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}$ es un isomorfismo afín.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 4.3. *(referencia canónica)* La *referencia cartesiana canónica* del espacio afín estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ es $\mathscr{R}_c = \{(0, \dots, 0); B_c\}$, donde B_c es la base canónica del espacio vectorial estándar $\mathbf{k}^n$. Las coordenadas del punto $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ con respecto a la referencia cartesiana canónica son $(x_1, \dots, x_n)$.

Ejemplo 4.4.
(1) $\mathscr{R} = \{(1, 0); (1, 1), (1, -1)\}$ es una referencia cartesiana de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. El punto $(2, 3)$ tiene coordenadas $(2, -1)$ respecto de $\mathscr{R}$.
(2) $\mathscr{R}' = \{(1, 1, 1); (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ es una referencia cartesiana de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$. El punto $(0, 0, 0)$ tiene coordenadas $(0, 0, -1)$ respecto de $\mathscr{R}'$.
(3) $\mathscr{R} = \{(1, 0, 0); (1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ es una referencia cartesiana del plano afín L de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ de ecuación $x + y + z = 1$. Las coordenadas del punto $p = (1/3, 1/3, 1/3) \in L$ respecto de $\mathscr{R}$ son $(-1/3, -1/3)$ (quizá en un primer momento te sorprenda que asignemos a p, que es un punto de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$, solamente dos coordenadas, pero observa que estamos considerando a p como punto L, que es un espacio afín de dimensión 2).

Una vez introducidos los sistemas de referencia cartesianos y las coordenadas cartesianas surge la cuestión (que también surgía con las bases y las coordenadas en un espacio vectorial) de, cuando tenemos dos sistemas de referencia distintos $\mathscr{R} = \{o; B\}$ y $\mathscr{R}' = \{o'; B'\}$, cómo hallar las coordenadas de p respecto a $\mathscr{R}'$ a partir de las coordenadas de p respecto a $\mathscr{R}$.

Proposición 4.5. *(Cambio de coordenadas cartesianas) Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n y sean $\mathscr{R} = \{o; B\}$ y $\mathscr{R}' = \{o'; B'\}$ dos referencias cartesianas de A. Sea $p \in A$, sean $(x_1, \dots, x_n)$ las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}$, sean $(x'_1, \dots, x'_n)$ las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}'$, sean $(c_1, \dots, c_n)$ las coordenadas de o respecto de $\mathscr{R}'$, sea $X = (x_1, \dots, x_n)^t$, sea $X' = (x'_1, \dots, x'_n)^t$, sea $C = (c_1, \dots, c_n)^t$ y sea $M = M_{B,B'}$ la matriz de cambio de base de B a B'. Entonces se tiene*

$$M \cdot X + C = X'. \tag{4.5.1}$$

A las ecuaciones que resultan de (4.5.1) *las llamamos* ecuaciones de cambio de coordenadas *de $\mathscr{R}$ a $\mathscr{R}'$.*

Demostración. Como $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}$, el vector $\overrightarrow{op}$ tiene coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ respecto de la base B. Análogamente, como $(x'_1, \dots, x'_n)$ son las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}'$, el vector $\overrightarrow{o'p}$ tiene coordenadas $(x'_1, \dots, x'_n)$ respecto de la base B'. Asimismo, el vector $\overrightarrow{o'o}$ tiene coordenadas $(c_1, \dots, c_n)$ respecto de la base B'. Por otra parte $\overrightarrow{o'p} = \overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{op}$, por lo que las coordenadas de $\overrightarrow{o'p}$ en B' son la suma de las coordenadas de $\overrightarrow{o'o}$ en B' y las coordenadas de $\overrightarrow{op}$ en B' (recuerda que la asignación de coordenadas con respecto a una base es un isomorfismo, en particular una aplicación lineal). Finalmente las coordenadas de $\overrightarrow{op}$ en B' se obtienen de las coordenadas de $\overrightarrow{op}$ en B usando la matriz de cambio de base M. □

Observación 4.6. La ecuación (4.5.1) se puede escribir de forma más compacta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X' \end{pmatrix} \tag{4.6.1}$$

(en (4.6.1), 0 representa la matriz nula de tamaño $1 \times n$ $(0, \ldots, 0)$ y 1, la matriz 1×1 cuyo único elemento es 1). A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & M \end{pmatrix}$ la llamamos *matriz de cambio* del sistema de referencia $\mathscr{R}$ al sistema de referencia $\mathscr{R}'$ y la denotamos por $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$. La matriz $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ es una matriz $(n+1) \times (n+1)$.

Observación 4.7. Sea (A, V, φ) un espacio afín y sean $\mathscr{R} = \{o; B\}$ y $\mathscr{R}' = \{o'; B'\}$ dos referencias cartesianas de A. Si desarrollamos el determinante de $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ por la primera fila vemos que este es igual al determinante de $M_{B,B'}$, que es no nulo ya que $M_{B,B'}$ es una matriz invertible. Por tanto $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ es una matriz invertible. Aunque se puede ver también directamente, posponemos hasta el corolario 4.17, (4) ver que la inversa de $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ es la matriz $M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}}$.

Aplicaciones afines y sistemas de referencia

Al igual que pasa en álgebra lineal con las aplicaciones lineales, es posible "resumir" toda la información sobre una aplicación afín en un conjunto finito de datos, que podemos expresar mediante una matriz. Esto se basa en el siguiente resultado:

Proposición 4.8. *Sean (A, V, φ) y (A', V', φ') dos espacios afines, sea $\mathscr{R} = \{o; v_1, \ldots, v_n\}$ una referencia cartesiana de (A, V, φ), sea $\hat{o}$ un punto cualquiera de A' y sean $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ n vectores cualesquiera de V'. Existe una única aplicación afín f tal que $f(o) = \hat{o}$ y cuya aplicación lineal asociada cumple $\overrightarrow{f}(v_1) = v'_1, \ldots, \overrightarrow{f}(v_n) = v'_n$.*

Demostración. La El resultado se sigue del teorema análogo para espacios vectoriales y de la proposición 3.5 (3). En efecto, existe una única aplicación lineal $\overrightarrow{f}$ entre V y V' que cumple $\overrightarrow{f}(v_1) = v'_1, \ldots, \overrightarrow{f}(v_n) = v'_n$ (véase por ejemplo la proposición V.2.1 de "Álgebra lineal y geometría", de M. Castellet e I. Llerena) y por la proposición 3.5 (3) existe una única aplicación afín f tal que $f(o) = \hat{o}$ y cuya aplicación lineal asociada es $\overrightarrow{f}$. ☐

La proposición 4.8 tiene su análogo para conjuntos de puntos afínmente independientes:

Corolario 4.9. *Sean (A, V, φ) y (A', V', φ') dos espacios afines, sea $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ un conjunto de puntos de A afínmente independientes y sea $\{p'_0, p'_1, \ldots, p'_n\}$ un conjunto de puntos cualesquiera de A'. Existe una única aplicación afín f que cumple $f(p_0) = p'_0, f(p_1) = p'_1, \ldots, f(p_n) = p'_n$.*

Demostración. Definimos f como la (única) aplicación afín f de la proposición 4.8 cuando hacemos $o = p_0$, $\hat{o} = p'_0$, $v_1 = \overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, v_n = \overrightarrow{p_0p_n}$ y $v'_1 = \overrightarrow{p'_0p'_1}, \ldots, v'_n = \overrightarrow{p'_0p'_n}$. ☐

Observación 4.10. El corolario 4.9 nos da idea de lo "rígidas" y especiales que son las aplicaciones afines. En efecto, una aplicación afín f de un espacio afín A de dimensión n a un espacio afín A' viene determinada por la imagen de $n+1$ puntos afínmente independientes $p_0, p_1, \ldots, p_n$ de A, es decir, para cualquier otro punto $p \in A$, $f(p)$ viene determinada por $f(p_0), f(p_1), \ldots, f(p_n)$. Así pues, si alguien nos da una aplicación arbitraria g de A a A' tal que $g(p_0) = f(p_0), g(p_1) = f(p_1), \ldots, g(p_n) = f(p_n)$, lo más probable es que $g(p) \neq f(p)$, con lo cual g no será una aplicación afín (compara con el ejemplo 3.6 (1)).

Podemos caracterizar los isomorfismos afines por la forma en que actúan sobre los sistemas de referencia cartesianos y sobre los conjuntos de puntos afínmente independientes. Vemos esto en la siguiente proposición, cuya demostración, que no daremos, es una consecuencia sencilla del resultado análogo para isomorfismos entre espacios vectoriales y de la proposición 3.13 (3).

Proposición 4.11. *Sean (A,V,φ) y (A',V',φ) dos espacios afines de dimensión n y sea f una aplicación afín de A a A'. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *f es un isomorfismo afín;*
(2) *existe una referencia cartesiana $\{o;B\}$ de A que f transforma en una referencia cartesiana de A' (es decir, la aplicación lineal asociada de f transforma B en una base de V');*
(3) *f transforma cualquier referencia cartesiana de A en una referencia cartesiana de A';*
(4) *existe un conjunto de $n+1$ puntos afínmente independientes de A que f transforma en un conjunto de $n+1$ puntos afínmente independientes de A';*
(5) *f transforma cualquier conjunto de $n+1$ puntos afínmente independientes de A en un conjunto de $n+1$ puntos afínmente independientes de A'.*

De la proposición 4.8 se deduce que, para determinar una aplicación afín f, basta con conocer la imagen del origen o de un sistema de referencia cartesiano $\mathscr{R}=\{o;B\}$ y la imagen, por la aplicación lineal asociada a f, de los vectores de B. Esto nos va a permitir expresar f en forma matricial:

Proposición 4.12. *Sea (A,V,φ) un espacio afín de dimensión n y sea (A',V',φ') un espacio afín de dimensión m. Sea $\mathscr{R}=\{o;B\}$ una referencia cartesiana de A y sea $\mathscr{R}'=\{o';B'\}$ una referencia cartesiana de A'. Sea $f: A \longrightarrow A'$ una aplicación afín y sea $\vec{f}$ su aplicación lineal asociada. Sea $M=M_{B,B'}\vec{f}$ la matriz de $\vec{f}$ respecto de las bases B y B'. Sea p un punto de A. Si las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}$ son $(x_1,\dots,x_n)$ y las coordenadas de $f(p)$ respecto de A' son $(y_1,\dots,y_m)$, se tiene*

$$M\cdot X+D=Y, \tag{4.12.1}$$

donde $X=(x_1,\dots,x_n)^t$, $Y=(y_1,\dots,y_m)^t$ y D es la traspuesta de la matriz fila formada por las coordenadas de $f(o)$ respecto de $\mathscr{R}'$. A las ecuaciones que se obtienen de (4.12.1) las llamamos ecuaciones de f *respecto de $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$.*

Demostración. La demostración es similar a la demostración de la proposición 4.5. Basta darse cuenta de que

$$\overrightarrow{o'f(p)}=\overrightarrow{o'f(o)}+\overrightarrow{f(o)f(p)}=\overrightarrow{o'f(o)}+\vec{f}(\overrightarrow{op}),$$

de que las coordenadas de $\overrightarrow{o'f(p)}$ en B' son las coordenadas de $f(p)$ en $\mathscr{R}'$, de que las coordenadas de $\overrightarrow{o'f(o)}$ en B' son las coordenadas de $f(o)$ en $\mathscr{R}'$, de que las coordenadas de $\overrightarrow{op}$ en B son las coordenadas de p en $\mathscr{R}$ y de que las coordenadas de $\vec{f}(\overrightarrow{op})$ en B' se obtienen multiplicando las coordenadas de $\overrightarrow{op}$ en B por la matriz M. □

Observación 4.13. La ecuación (4.12.1) se puede escribir de manera más compacta, obteniendo

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ D & M\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ Y\end{pmatrix}, \tag{4.13.1}$$

donde 0 es la matriz nula $1 \times n$ y 1 es la matriz 1×1 cuyo único elemento es 1. A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & M \end{pmatrix}$ la llamamos $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$, la *matriz de la aplicación afín f* respecto de los sistemas de referencia $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$. La matriz $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$ es una matriz $(m+1) \times (n+1)$.

Si f es una aplicación afín de un espacio afín A en sí mismo es posible expresar la matriz de f con respecto a dos referencias cartesianas distintas de A o con respecto a una sola referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de A. En este último caso escribimos

$$M_{\mathscr{R}}(f) := M_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f)$$

y llamaremos a $M_{\mathscr{R}}(f)$ la matriz de f respecto de $\mathscr{R}$.

Ejemplo 4.14. Sea f la aplicación afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ que cumple

(i) $f((0,0)) = (1,3)$,
(ii) $f((1,0)) = (2,1)$, y
(iii) $f((0,1)) = (1,-1)$.

La matriz de f respecto de la referencia canónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Poder expresar una aplicación afín en forma matricial usando referencias cartesianas nos permite abordar muchas cuestiones reduciéndolas a argumentos de álgebra lineal. Por ejemplo, el cálculo de los puntos fijos de una aplicación afín de un espacio afín en sí mismo se traduce en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Como consecuencia vemos en el siguiente ejercicio una caracterización de las aplicaciones afines con un único punto fijo en términos de su aplicación lineal asociada.

Ejercicio 4.15. Sea f es una aplicación afín de un espacio afín (A, V, φ) de dimensión n en sí mismo y sea $\vec{f}$ su aplicación lineal asociada.

(1) Demuestra que si $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = \vec{0}$ (es decir, si $\vec{f}$ no tiene más vector fijo que el vector nulo), entonces f tiene un único punto fijo (indicación: traduce la igualdad $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = \vec{0}$ en un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, expresa el conjunto de puntos fijos de f como el conjunto de soluciones de otro sistema de ecuaciones lineales relacionado con el anterior y usa el teorema de Rouché–Frobenius).
(2) Concluye que, en particular, si $\vec{f}$ es una homotecia vectorial de razón $\lambda(\neq 0,1)$, entonces f es una homotecia de razón λ (esto completa la demostración de la proposición 3.20 (2)).
(3) Expresa la condición que han de cumplir los coeficientes de un polinomio mónico de grado n para que 1 sea raíz suya. Deduce que la "gran mayoría" de los polinomios mónicos de grado n no tienen a 1 como raíz (dicho de forma precisa, un polinomio mónico *general* de grado n no tiene a 1 como raíz). Eso implica (recuerda la observación 3.38) que la aplicación afín *general* de A en A tiene un único punto fijo.
(4) Observa que si $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) \neq \vec{0}$, entonces f puede no tener puntos fijos (de hecho, es lo más "probable"; es decir, si consideramos el conjunto de todas las aplicaciones afines que tienen como aplicación lineal asociada una misma aplicación

ψ que cumple $\ker(\psi - \mathrm{Id}_V) \neq \vec{0}$, la "gran mayoría" de esas aplicaciones afines no tendrían puntos fijos... ¿eres capaz de explicar por qué?).

Proposición 4.16. *Sean (A_1, V_1, φ_1), (A_2, V_2, φ_2) y (A_3, V_3, φ_3) tres espacios afines. Sea $\mathscr{R}_1$ una referencia cartesiana de A_1, sea $\mathscr{R}_2$ una referencia cartesiana de A_2 y sea $\mathscr{R}_3$ una referencia cartesiana de A_3. Sean $h : A_1 \longrightarrow A_2$ y $g : A_2 \longrightarrow A_3$ dos aplicaciones afines y sea $f = g \circ h$. Entonces*

$$M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_3}(f) = M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_3}(g) \cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}(h).$$

Demostración. Dado un punto p de A_1 sea X la matriz traspuesta de la matriz fila formada por sus coordenadas respecto a $\mathscr{R}_1$ y sea Z la matriz traspuesta de la matriz formada por las coordenadas de $f(p)$ respecto de $\mathscr{R}_3$. Observa que la matriz $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_3}(f)$ está caracterizada por ser la única matriz que cumple, para todo p de A_1,

$$M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_3}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ Z \end{pmatrix}$$

(¡piénsalo!). Así pues, basta comprobar usando la observación 4.13 que para todo $p \in A_1$ se cumple

$$\begin{pmatrix} 1 \\ Z \end{pmatrix} = M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_3}(g) \cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}(h) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix}.$$

□

Como consecuencia de la proposición 4.16 obtenemos las fórmulas siguientes:

Corolario 4.17. (1) *Sean (A, V, φ) y (A', V', φ') dos espacios afines, sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos referencias cartesianas de A y sean $\mathscr{R}'_1$ y $\mathscr{R}'_2$ dos referencias cartesianas de A'. Sea $f : A \longrightarrow A'$ una aplicación afín. Entonces*

$$M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}'_2}(f) = M_{\mathscr{R}'_1,\mathscr{R}'_2} \cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}'_1}(f) \cdot M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}.$$

(2) *Sean (A, V, φ) y (A', V', φ') dos espacios afines de la misma dimensión, sea $\mathscr{R}$ una referencia cartesiana de A y sea $\mathscr{R}'$ una referencia cartesiana de A'. Sea $f : A \longrightarrow A'$ un isomorfismo afín. Entonces $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$ es invertible y*

$$M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}}(f^{-1}) = (M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f))^{-1}.$$

(3) *Sea (A, V, φ) un espacio afín y sean $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ y $\mathscr{R}_3$ tres referencias cartesianas de A. Entonces*

$$M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_3} = M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_3} \cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}.$$

(4) *Sea (A, V, φ) un espacio afín y sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos referencias cartesianas de A. Entonces $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}$ es invertible y*

$$M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1} = (M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2})^{-1}.$$

Demostración. Para ver (1) aplicamos la proposición 4.16 a $f = id_{A'} \circ f \circ id_A$. Para ver (2) aplicamos la proposición 4.16 a $id_A = f^{-1} \circ f$. Para ver (3) aplicamos la proposición 4.16 a $id_A = id_A \circ id_A$. Para ver (4) aplicamos (3) a las referencias $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_1$ y a las referencias $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$. □

Observación 4.18. Una matriz cuadrada invertible $\mathscr{M}$ de orden $(n+1)$ tal que su primer elemento es 1 y el resto de los elementos de la primera fila son 0 se puede interpretar bien como la matriz de cambio de coordenadas entre dos referencias cartesianas de un espacio afín de dimensión n, bien como la matriz de un isomorfismo afín entre espacios afines de dimensión n. Recíprocamente, tanto la matriz de cambio de coordenadas entre dos referencias cartesianas de un espacio afín de dimensión n como la matriz de un isomorfismo afín entre espacios afines de dimensión n es una matriz cuadrada invertible $\mathscr{M}$ de orden $(n+1)$ tal que su primer elemento es 1 y el resto de los elementos de la primera fila son 0. También son ciertas las afirmaciones análogas referentes a las ecuaciones de cambio de coordenadas de dos referencias cartesianas y a las ecuaciones de un isomorfismo afín.

En efecto, dada una matriz cuadrada $\mathscr{M}$ de orden $(n+1)$, con su primer elemento 1 y el resto de los elementos de la primera fila 0 y dada una referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{o; B\}$ de un espacio afín (A, V, φ) de dimensión n, existe una (única) referencia cartesiana $\mathscr{R}'$ tal que $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'} = \mathscr{M}$. Para definir $\mathscr{R}' = \{o'; v'_1, \dots, v'_n\}$ consideramos $\mathscr{M}^{-1}$, que es también una matriz cuadrada $\mathscr{M}$ de orden $(n+1)$, con su primer elemento 1 y el resto de los elementos de la primera fila 0 (¡piénsalo!). Tomamos entonces como o' el punto de A que tiene por coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ los últimos n elementos de la primera columna de $\mathscr{M}^{-1}$ y como v'_i, el vector de V que tiene por coordenadas respecto de B los últimos n elementos de la columna $(i+1)$–ésima de $\mathscr{M}^{-1}$.

Por otra parte, dados dos espacios afines (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2) de dimensión n, dada una referencia cartesiana $\mathscr{R}_1 = \{o; v_1, \dots, v_n\}$ de (A_1, V_1, φ_1) y dada una referencia cartesiana $\mathscr{R}_2 = \{o'; B_2\}$ de (A_2, V_2, φ_2), existe un único isomorfismo afín de f tal que $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}(f) = \mathscr{M}$. En efecto, para construir f primero fijamos como imagen de o por f aquel punto de A_2 que tenga como coordenadas respecto de $\mathscr{R}_2$ los últimos n elementos de la primera columna de $\mathscr{M}$. Luego fijamos como imagen del vector v_i por la aplicación lineal asociada a f aquel vector de V_2 cuyas coordenadas respecto de B_2 sean los últimos n elementos de la columna $(i+1)$–ésima de $\mathscr{M}$. Finalmente definimos f usando la proposición 4.8.

Por otro lado, el hecho de que tanto la matriz de cambio de coordenadas entre dos referencias cartesianas de un espacio afín de dimensión n como la matriz de un isomorfismo afín entre espacios afines de dimensión n sean matrices cuadradas invertibles de orden $(n+1)$ con su primer elemento 1 y el resto de los elementos de la primera fila 0 se sigue de las observaciones 4.6, 4.7 y 4.13 y del corolario 4.17.

Acabamos esta sección usando coordenadas para revisar los distintos ejemplos de aplicaciones afines vistos en la sección 3.

Ejemplo 4.19. La matriz de la aplicación afín f del ejemplo 3.4 respecto de las bases canónicas de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^4_{\mathbf{k}}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo anterior hemos dado la matriz de una aplicación afín respecto de las referencias canónicas. Sin embargo en muchas situaciones será útil elegir sistemas referencia adecuados que nos permitan expresar una aplicación afín de forma que la podamos entender mejor. En los resultados siguientes vemos que las proyecciones, simetrías, traslaciones, homotecias y dilataciones se pueden caracterizar por tener una matriz de aspecto muy sencillo con respecto a una referencia cartesiana adecuada.

Proposición 4.20. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n. Una aplicación afín de A en A es una proyección sobre un subespacio afín de A de dimensión l si y solo si existe una referencia $\mathscr{R}$ de A tal que la matriz de f con respecto a $\mathscr{R}$ es una matriz con todos sus elementos nulos excepto los $l+1$ primeros de la diagonal, que son iguales a 1.*

Demostración. Si f es una proyección sobre un subespacio afín de A de dimensión l, elegimos $\mathscr{R} = \{o; v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots, v_n\}$ de forma que o sea un punto de la base de f, que $\{v_1, \ldots, v_l\}$ sea una base de la dirección de la base de f y que $\{v_{l+1}, \ldots, v_n\}$ sea una base de la dirección de f (con esta elección $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V; ¡piénsalo!). En ese caso $M_{\mathscr{R}}(f)$ es una matriz como la descrita en el enunciado.

Recíprocamente, si f es una aplicación afín cuya matriz respecto de cierta referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{o; v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots, v_n\}$ de (A, V, φ) es como la descrita en el enunciado, entonces f es una proyección sobre el subespacio afín $o + L(v_1, \ldots, v_l)$, que tiene dimensión l, con dirección $L(v_{l+1}, \ldots, v_n)$. □

Proposición 4.21. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n. Una aplicación afín f de A en A es una simetría respecto de un subespacio afín de A de dimensión l si y solo si existe una referencia $\mathscr{R}$ de A tal que la matriz de f con respecto a $\mathscr{R}$ es una matriz diagonal tal que los $l+1$ primeros elementos de la diagonal son iguales a 1 y los $n-l$ últimos elementos de la diagonal son iguales a -1.*

Demostración. Ejercicio (indicación: razona como en la demostración de la proposición anterior). □

Proposición 4.22. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n y sea f una aplicación afín de A en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *f es una homotecia de razón λ;*
(ii) *existe un punto o de A tal que para cualquier base B de V la matriz de f con respecto de la referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{o; B\}$ es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

(iii) *existe una referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de A tal que la matriz de f con respecto de $\mathscr{R}$ es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Demostración. Ejercicio (indicación: toma como o el centro de la homotecia). □

Proposición 4.23. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n y sea f una aplicación afín de A en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *f es una traslación (de vector no nulo);*

(ii) *existe una referencia cartesiana* $\mathscr{R}$ *de* A *tal que la matriz de* f *respecto de* $\mathscr{R}$ *es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Ejercicio (indicación: recuerda que una traslación está caracterizada por el hecho de que su aplicación lineal asociada es la identidad y elige el vector de la traslación como primer vector de la base de $\mathscr{R}$). □

Proposición 4.24. *Sea* (A, V, φ) *un espacio afín de dimensión* n *y sea* f *una aplicación afín de* A *en* A. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f *es una dilatación de razón* λ *y base un subespacio afín de* A *de dimensión* l;
(2) *existe una referencia cartesiana respecto de la cual la matriz de* f *es una matriz diagonal tal que los* $l+1$ *primeros elementos de la diagonal son iguales a* 1 *y los* $n-l$ *últimos elementos de la diagonal son iguales a* λ.

Demostración. Ejercicio (indicación: razona como para demostrar la proposición 4.21 y usa la descripción, pedida en el ejercicio 3.30 (1), de la aplicación lineal asociada a una dilatación). □

Ejercicio 4.25. Sea f un isomorfismo afín de un espacio afín (A, V, φ) en sí mismo que tiene un hiperplano afín L de A como conjunto de puntos fijos. Recuerda que, según el ejercicio 3.37, f es una transvección o una dilatación.

(1) Si f es una transvección demuestra que existe una referencia cartesiana de A respecto de la cual la matriz de f es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Si f es una dilatación de razón λ, demuestra que existe una referencia cartesiana de A respecto de la cual la matriz de f es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Concluye que existe un vector v de V no nulo tal que, para todo $p \in A \smallsetminus L$, $\overrightarrow{pf(p)}$ es múltiplo de v.
(4) Si f es una transvección, demuestra que v pertenece a la dirección de L y que si l es una recta afín de A con vector director v, entonces l es invariante por f y $f|_l$ es una traslación de l.

(5) Si f es una dilatación de razón λ, demuestra que v no pertenece a la dirección de L sino a la dirección de f y que si l es una recta afín de A con vector director v, entonces l es invariante por f y $f|_l$ es una homotecia de l de centro $l \cap L$ y razón λ.

Proposición 4.26. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n y sea f una aplicación afín de A en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *f es la identidad;*
(2) *para toda referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de A la matriz de f respecto de $\mathscr{R}$ es la matriz identidad.*
(3) *existe alguna referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de A tal que la matriz de f respecto de $\mathscr{R}$ es la matriz identidad.*

Demostración. Trivial. □