# Tema 3.2: Eficiencia de algoritmos recursivos

Diseño y Análisis de Algoritmos

Universidad Rey Juan Carlos

# Contenidos

# Análisis de algoritmos recursivos

- La matemática necesaria para analizar algoritmos recursivos son las **relaciones de recurrencia**, también llamadas **ecuaciones en diferencias** o simplemente **recurrencias**
- Las recurrencias son expresiones matemáticas recursivas

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ 5 + T(n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- La resolución de recurrencias consiste en proporcionar fórmulas no recursivas equivalentes

$$T(n) = 5n + 3$$

- Veremos dos formas de resolverlas:
  - Expansión de recurrencias
  - Resolución de relaciones de recurrencia

# Función potencia - versión 1

```
int pot1(int b, int e)
{
  if(e==0)
    return 1;
  else
    return b*pot1(b,e-1);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ 5 + T(n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- $n$ está relacionado con el tamaño del problema, que en este caso es el exponente $e$ de la función
- Podemos pensar en el caso base se realizan 3 operaciones, y 5 en el recursivo (además del tiempo que llevaría realizar otra llamada con parámetro $n-1$)

# Resolución por expansión de recurrencias

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 5 + T(n-1) \\
&= 5 + 5 + T(n-2) = 5 \cdot 2 + T(n-2) \\
&= 5 + 5 + 5 + T(n-3) = 5 \cdot 3 + T(n-3) \\
&\vdots \\
&= 5i + T(n-i)
\end{aligned}
$$

- ¿Cuándo se llega al caso base $T(0)$?
  - Cuando $i = n$
- Sustituyendo:

$$T(n) = 5n + T(0) = 5n + 3 \quad \in \quad \Theta(n)$$

- Tiene sentido, ya que decrementamos $n$ en cada llamada recursiva

# Función potencia - versión 2

```
int pot2(int b, int e)
{
  if(e==0)
    return 1;
  else if (e%2==0)
    return pot2(b*b,e/2);
  else
    return b*pot2(b*b,e/2);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ 8 + T(n/2) & \text{si } n > 0 \text{ y } n \text{ es par} \\ 9 + T((n-1)/2) & \text{si } n > 0 \text{ y } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- La función es difícil de analizar
- Pero podemos suponer que $n = 2^x$ es una potencia de dos
- Esto es válido ya que estamos analizando complejidad asintótica

# Resolución por expansión de recurrencias

- Asumimos que $n = 2^x$ es una potencia de dos (por tanto, par):

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 8 + T(n/2) \\
&= 8 + 8 + T(n/4) = 8 \cdot 2 + T(n/2^2) \\
&= 8 + 8 + 8 + T(n/8) = 8 \cdot 3 + T(n/2^3) \\
&\vdots \\
&= 8i + T(n/2^i)
\end{aligned}
$$

- ¿Cuándo se llega al caso base $T(0)$?
  - $i \to \infty$
  - Pero eso no tiene sentido
  - El parámetro de la función $T$ es entero

# Resolución por expansión de recurrencias

- ¿Cuándo se llega al caso $T(1)$?
  - Cuando $n/2^i = 1$, es decir, cuando $i = \log_2 n$
- Sustituyendo:

$$T(n) = 8\log_2 n + T(1) = 8\log_2 n + 9 + T(0) = 8\log_2 n + 9 + 3 =$$

$$= 8\log_2 n + 12 \quad \in \quad \Theta(\log n)$$

- Tiene sentido, ya que dividimos $n$ por 2 en cada llamada recursiva

# Soluciones generales a relaciones de recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ b + T(n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$T(n) = bn + a \quad \in \quad \Theta(n)$$

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ b + T(n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = b(n-1) + a \quad \in \quad \Theta(n)$$

# Soluciones generales a relaciones de recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ b + T(n/2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = b \log_2 n + a \quad \in \quad \Theta(\log n)$$

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ b + T(n/2) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$T(n) = b \log_2 n + b + a \quad \in \quad \Theta(\log n)$$

# Soluciones generales a relaciones de recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ bn + c + T(n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= bn + c + T(n-1) \\
&= bn + c + b(n-1) + c + T(n-2) = 2bn - b + 2c + T(n-2) \\
&= 2bn - b + 2c + b(n-2) + c + T(n-3) = \\
&= 3bn - b(1+2) + 3c + T(n-3) = \\
&= 3bn - b(1+2) + 3c + b(n-3) + c + T(n-4) = \\
&= 4bn - b(1+2+3) + 4c + T(n-4) = \\
&\vdots \\
&= ibn - b\sum_{j=1}^{i-1} j + ic + T(n-i) = ibn + ic - b\frac{i(i-1)}{2} + T(n-i)
\end{aligned}$$

# Soluciones generales a relaciones de recurrencia

- Se alcanza $T(0)$ para $i = n$
- Sustituyendo:

$$T(n) = bn^2 - \frac{b}{2}n(n-1) + cn + a$$

$$T(n) = \frac{b}{2}n^2 + \left(c + \frac{b}{2}\right)n + a \quad \in \quad \Theta(n^2)$$

- Tiene sentido, ya que hacemos $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$ operaciones

# Soluciones generales a relaciones de recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ bn + c + 2T(n/2) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= bn + c + 2T(n/2) \\
&= bn + c + 2\left(b\frac{n}{2} + c + 2T(n/4)\right) \\
&= bn + c + 2\left[b\frac{n}{2} + c + 2\left(b\frac{n}{4} + c + 2T(n/8)\right)\right] \\
&= 3bn + c(1+2+4) + 2^3T(n/2^3) = 3bn + c(2^3-1) + 2^3T(n/2^3) \\
&\vdots \\
&= ibn + c(2^i - 1) + 2^iT(n/2^i)
\end{aligned}$$

# Soluciones generales a relaciones de recurrencia

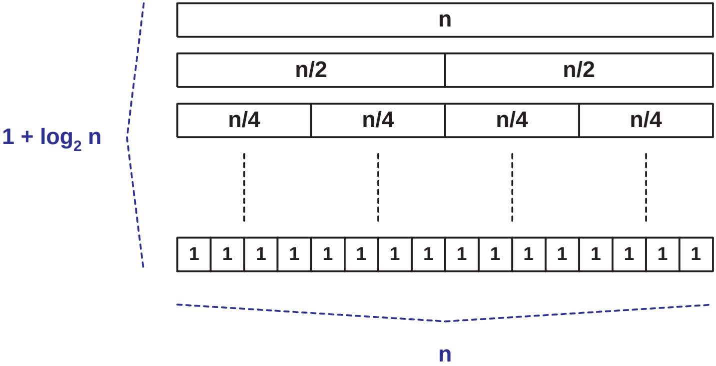
- Se alcanza $T(1)$ para $n/2^i = 1$, es decir, cuando $i = \log_2 n$
- Sustituyendo:

$$\begin{aligned} T(n) &= bn\log_2 n + c(n-1) + nT(1) \\ &= bn\log_2 n + c(n-1) + n(b + c + 2T(0)) \\ &= bn\log_2 n + cn - c + nb + nc + 2na \end{aligned}$$

$$T(n) = bn\log_2 n + (2c + b + 2a)n - c \quad \in \quad \Theta(n \log n)$$

# Soluciones generales a relaciones de recurrencia

- Tiene sentido, ya que hacemos $n$ operaciones $1 + \log_2 n$ veces



# Teorema maestro - versión simple

- Fórmula útil para algoritmos "divide y vencerás":

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{si } n = 1 \\ aT(n/b) + cn^k & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad T(n) = \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } \frac{a}{b^k} < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{si } \frac{a}{b^k} = 1 \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{si } \frac{a}{b^k} > 1 \end{cases}$$

# Teorema maestro - demostración

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/b) + cn^k \\
&= a\left[aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + c\left(\frac{n}{b}\right)^k\right] + cn^k = a^2T\left(\frac{n}{b^2}\right) + cn^k\left(1+\frac{a}{b^k}\right) \\
&= a^2\left[aT\left(\frac{n}{b^3}\right) + c\left(\frac{n}{b^2}\right)^k\right] + cn^k\left(\frac{n}{b^2}\right) = a^3T\left(\frac{n}{b^3}\right) + cn^k\left(1+\frac{a}{b^k}+\frac{a^2}{b^{2k}}\right) \\
&\vdots \\
&= a^iT\left(\frac{n}{b^i}\right) + cn^k\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{a}{b^k}\right)^j \qquad \text{Se alcanza } T(1)=c \text{ cuando: } i=\log_b n \\
&= ca^{\log_b n} + cn^k\sum_{j=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^k}\right)^j = cn^k\left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b n} + cn^k\sum_{j=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^k}\right)^j
\end{aligned}
$$

# Teorema maestro - demostración (logaritmos)

- La última igualdad se debe a:

$$cn^k\left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b n} = cn^k\frac{a^{\log_b n}}{b^{k\log_b n}} = cn^k\frac{a^{\log_b n}}{n^k} = ca^{\log_b n}$$

- Más adelante también necesitaremos:

$$n^{log_b a} = a^{log_b n}$$

Ya que:

$$\log_b n^{log_b a} = \log_b a^{log_b n} \quad = \quad \log_b a \cdot \log_b n$$

- Finalmente:

$$T(n) = cn^k\sum_{j=0}^{\log_b n}\left(\frac{a}{b^k}\right)^j$$

Y tendremos $3$ casos según los valores de $a$, $b$ y $k$

# Teorema maestro - demostración

$$T(n) = cn^k \sum_{j=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^k}\right)^j$$

1. $a < b^k \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^k)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r} = \text{constante (no diverge), para } r < 1$$

2. $a = b^k \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^k \log n)$

$$T(n) = cn^k(\log_b n + 1)$$

# Teorema maestro - demostración

$$T(n) = cn^k \sum_{j=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^k}\right)^j$$

3. $a > b^k \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

$$\begin{aligned} T(n) &= cn^k \frac{\left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b n+1} - 1}{\left(\frac{a}{b^k}\right) - 1} = \frac{cn^k \left(\frac{a}{b^k}\right) \frac{a^{\log_b n}}{n^k} - cn^k}{K_1} \\ &= \frac{K_2 a^{\log_b n} - cn^k}{K_1} = \frac{K_2 n^{\log_b a} - cn^k}{K_1} \end{aligned}$$

Como $a > b^k \Rightarrow \log_b a > k \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

# Teorema maestro - versión completa

- Dada una recurrencia del tipo:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

donde $a > 0$, $b > 0$, y $f(n)$ es una función asintóticamente positiva, entonces se puede aplicar el **teorema maestro** en estos tres casos:

# Teorema maestro - versión completa

1. Si $f(n) = \mathcal{O}(n^{log_b a - \epsilon})$ para alguna constante $\epsilon > 0$, entonces:

$$T(n) \in \Theta(n^{log_b a})$$

2. Si $f(n) = \Theta(n^{log_b a} log^k n)$ con[1] $k \geq 0$, entonces:

$$T(n) \in \Theta(n^{log_b a} log^{k+1} n)$$

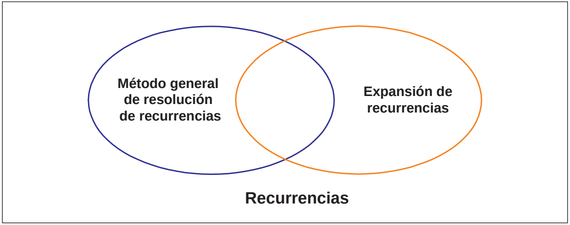
3. Si $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ con $\epsilon > 0$, y $f(n)$ satisface la condición de regularidad ($af(n/b) \leq cf(n)$ para alguna constante $c < 1$ y para todo $n$ lo suficientemente grande), entonces:

$$T(n) \in \Theta(f(n))$$

[1] $k$ suele ser 0

# Método general para resolución de relaciones de recurrencia

- No siempre se puede aplicar la expansión de recurrencias
- Para muchas recurrencias no se conoce la forma de resolverlas
  - Sucede como con las integrales o ecuaciones diferenciales: sabemos como resolver un subconjunto de éstas, pero no todas
- Ahora veremos un método general con el que vamos a ampliar el conjunto de recurrencias que podemos resolver



# Recurrencias homogéneas

- Dada la siguiente recurrencia homogénea (aparece un 0 en la parte derecha):

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + \cdots + a_k T(n-k) = 0$$

- Buscamos soluciones del tipo:

$$T(n) = C_1 P_1(n) r_1^n + \cdots + C_k P_k(n) r_k^n = \sum_{i=1}^{k} C_i P_i(n) r_i^n$$

- Realizando el cambio $x^{z-n+k} = T(z)$ obtenemos la ecuación característica asociada:

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k = 0$$

# Primer caso: raíces distintas

- Si todas las raíces del polinomio de la ecuación característica son distintas:

$$T(n) = C_1 r_1^n + \cdots + C_k r_k^n = \sum_{i=1}^{k} C_i r_i^n$$

  - Las constantes $r_i$ van a ser las raíces de la ecuación característica
  - $P_i(n) = 1$, para todo $i$
  - Las constantes $C_i$ se hallan a partir de las condiciones iniciales, resolviendo un sistema de ecuaciones

# Ejemplo: Números de Fibonacci

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ T(n-1) + T(n-2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- La ecuación característica es $x^2 - x - 1 = 0$, cuyas raíces son:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- Por tanto, al ser distintas, la solución tiene la forma:

$$T(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

# Ejemplo: Números de Fibonacci

- El siguiente paso consiste en hallar las constantes, a partir de las condiciones iniciales (casos base de la recurrencia):

$$\left.\begin{array}{rcccc} C_1 + C_2 & = & 0 & = & T(0) \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = & 1 & = & T(1) \end{array}\right\}$$

- Resolviendo el sistema obtenemos:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

- Finalmente:

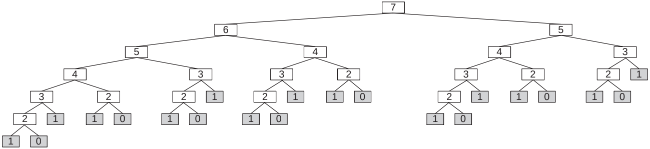
$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

# Ejemplo: Números de Fibonacci

- El segundo término tiende a $0$ según $n \to \infty$, por tanto:

$$T(n) \quad \in \quad \Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

- El orden es exponencial
- El árbol de recursión es binario, pero está podado
- Para un árbol de recursión binario completo el orden es $2^n$
- En este caso la base del exponente es $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618 < 2$



# Segundo caso: raíces con multiplicidad mayor que 1

- En general, el polinomio asociado a la ecuación característica puede tener raíces con multiplicidad 1 o mayor que 1

$$(x - r_1)^{m_1} \cdot (x - r_2)^{m_2} \cdots (x - r_k)^{m_k} = 0$$

- En este caso general, la solución tiene la forma:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m_1} C_{1i} n^{i-1} r_1^n + \sum_{i=1}^{m_2} C_{2i} n^{i-1} r_2^n + \cdots + \sum_{i=1}^{m_k} C_{ki} n^{i-1} r_k^n$$

# Segundo caso: raíces con multiplicidad mayor que 1

- Ejemplo:

$$T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-3)$$

- Ecuación característica:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \quad = \quad (x-2)^2(x-1) \quad = \quad 0$$

- El 2 es una raíz doble, por tanto:

$$T(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 1^n$$

# Recurrencias no homogéneas - una primera idea

- La parte de la derecha ya no es 0

$$T(n) - 2T(n-1) = 3^n \qquad (a)$$

- La convertimos en homogénea:

$$\begin{array}{rcll} T(n+1) - 2T(n) & = & 3^{n+1} & (1) \\ 3T(n) - 6T(n-1) & = & 3^{n+1} & (2) \\ \hline T(n+1) - 5T(n) + 6T(n-1) & = & 0 & (1) - (2) \end{array}$$

  - En $(1)$ se incrementa $n$ en $(a)$, en $(2)$ se multiplica $(a)$ por $3$

- Con $T(0) = 0$ y $T(1) = 3$

$$T(n) = 3 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n \quad \in \quad \Theta(3^n)$$

# Recurrencias no homogéneas - caso simple

- Recurrencia, con **un solo** término a la derecha donde $d$ es el orden del polinomio $P(n)$

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + \cdots + a_k T(n-k) = b^n P^d(n)$$

- Ecuación característica:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x-b)^{d+1} = 0$$

- Ejemplo:

$$T(n) - 2T(n-1) = n \qquad b = 1 \quad P(n) = n \quad d = 1$$

$$(x-2)(x-1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad T(n) = C_1 2^n + C_2 1^n + C_3 n 1^n \quad \in \quad \Theta(2^n)$$

# Recurrencias no homogéneas - caso general

- Recurrencia general:

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + \cdots + a_k T(n-k) = b_1^n P_1^{d_1}(n) + \cdots + b_s^n P_s^{d_s}(n)$$

- Ecuación característica:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x - b_1)^{d_1+1} \cdots (x - b_s)^{d_s+1} = 0$$

# Recurrencias no homogéneas - caso general

- Ejemplo:

$$T(n) = 2T(n-1) + n + 2^n \qquad \text{con } T(0) = 1$$

- Ecuación característica:

$$(x-2)(x-1)^2(x-2) = (x-2)^2(x-1)^2 = 0$$

- Solución (sin hallar las constantes):

$$T(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 1^n + C_4 n 1^n$$

# Recurrencias no homogéneas - caso general

- Dado $T(0) = 1$, y usando $T(n) = 2T(n-1) + n + 2^n$ tenemos que hallar $T(1)$, $T(2)$ y $T(3)$, para formar un sistema de $4$ ecuaciones y $4$ incógnitas (las constantes):

$$T(1) = 5 \qquad T(2) = 16 \qquad T(3) = 43$$

$$\left.\begin{array}{rcrcl} C_1 + C_3 & = & 1 & = & T(0) \\ 2C_1 + 2C_2 + C_3 + C_4 & = & 5 & = & T(1) \\ 4C_1 + 8C_2 + C_3 + 2C_4 & = & 16 & = & T(2) \\ 8C_1 + 24C_2 + C_3 + 3C_4 & = & 43 & = & T(3) \end{array}\right\}$$

- Solución final ($C_1 = 3$, $C_2 = 1$, $C_3 = -2$ y $C_4 = -1$):

$$T(n) = 3 \cdot 2^n + n2^n - 2 - n \quad \in \quad \Theta(n2^n)$$

# Método de cambio de variable

Recurrencia: $T(n) = 4T(n/2) + n \qquad T(1) = 1 \qquad T(2) = 6$

Cambio: $n = 2^k \quad \Rightarrow \quad T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k$

$T(n) = T(2^k) = t(k) \quad \Rightarrow \quad \boxed{t(k) = 4t(k-1) + 2^k}$ Nueva recurrencia

Ecuación característica: $(x-4)(x-2) = 0$

$$t(k) = C_1(4^k) + C_2(2^k) = C_1(2^k)^2 + C_2(2^k)$$

Deshaciendo el cambio: $T(n) = C_1 n^2 + C_2 n$

Hallando las constantes: $T(n) = 2n^2 - n \quad \in \quad \theta(n^2)$

# Expansión de recurrencias (mismo ejemplo)

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n) = 4T(n/2) + n \\
&= 4\left[4T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right] + n = 4^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n + n \\
&= 4\left[4\left[4T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right] + \frac{n}{2}\right] + n = 4^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 4n + 2n + n \\
&= 4^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n\sum_{j=0}^{i-1} 2^j = 4^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n(2^i - 1)
\end{aligned}
$$

El caso base $T(1)$ se alcanza cuando $n = 2^i$, $n^2 = (2^i)^2 = (2^2)^i = 4^i$.
Sustituyendo:

$$T(n) = n^2 + n(n-1) = 2n^2 - n$$