TEMA 1: Matrices y Determinantes

1. Matrices. Primeras definiciones

Definición 1 *Llamamos **matriz** de orden o dimensión $m \times n$ sobre el cuerpo conmutativo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a un conjunto de $m \times n$ elementos de $\mathbb{R}$ dispuestos en m filas y n columnas.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

donde a_{ij} es el elemento de la fila i y de la columna j. Denotaremos el conjunto de las matrices $m \times n$ por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Diremos que una matriz es **rectangular** si $n \neq m$ y diremos que es **cuadrada** si tiene el mismo número de filas que de columnas.

Diremos que es una **matriz fila** si $m = 1$, y una **matriz columna** si $n = 1$.

Dada una matriz cuadrada su **diagonal principal** es el conjunto de los elementos de la forma (a_{ii}) donde $i = 1, 2, ..., n$.

Llamaremos **traza** de una matriz a la suma de los elementos de la diagonal principal:

$$Traza\,(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -9 \\ 3 & 8 & 4 & 5 \\ -5 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Traza\,(A) = 12$$

Diremos que las **matrices** A y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ son **iguales** si

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \text{para todo } i = 1, 2, ..., m\ , j = 1, 2, ..., n$$

1.1. Matrices Cuadradas

Diremos que una matriz cuadrada es:

- **Diagonal** cuando los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Triangular superior** (respectivamente **triangular inferior**) cuando todos los elementos situados por debajo (respectivamente por encima) de la diagonal principal son todos nulos:

$$T_{superior} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad T_{inferior} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$T_S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad T_I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

- **Simétrica** cuando coinciden los elementos situados simétricamente respecto a la diagonal principal:

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ para todo } i, j = 1, 2, ..., n$$

Ejemplo:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Antisimétrica** cuando los elementos situados simétricamente respecto a la diagonal principal son opuestos:

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad \text{para todo } i, j = 1, 2, ..., n$$

en consecuencia, los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son todos nulos, ya que $a_{ii} = -a_{ii}$ implica que $a_{ii} = 0$

EJEMPLO:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matriz compuesta por unos en su diagonal principal la denominaremos **matriz unidad o matriz identidad**:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Suma de matrices y producto por un escalar

Dadas dos matrices A y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, definimos la **suma** de $A+B$ como aquella matriz C cuyos elementos son de la forma

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{para todo } i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$$

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 9 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -9 \\ 9 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definimos el **producto de una matriz** $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ **por un escalar** $\lambda \in \mathbb{R}$ como la matriz resultante de multiplicar cada elemento de A por el escalar λ

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{m,n}$$

EJEMPLO:

$$3\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 0 & -6 & 9 \\ -12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $k, l \in \mathbb{R}$.

Suma	Producto
$A + B = B + A$	$k(A+B) = kA + kB$
$(A+B)+C = A+(B+C)$	$(k+l)A = kA + lA$
$A + 0 = A$	$(kl)A = k(lA)$
$A + (-A) = 0$	$1A = A$ y $0A = 0$

3. Producto de matrices

Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, definimos el **producto** de $A \cdot B$ como la matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, de manera que el elemento c_{ij} de C es la suma del producto de los elementos de la fila i de A con los elementos de la columna j de B.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bD & aB + bE & aC + bF \\ cA + dD & cB + dE & cC + dF \\ eA + fD & eB + fE & eC + fF \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -3 & -4 \\ 14 & 20 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}\right)$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
&A(BC) = (AB)C \\
&A(B+C) = AB + AC \\
&(B+C)A = BA + CA \\
&k(AB) = (kA)B = A(kB)
\end{aligned}$$

¡Ojo! El producto de matrices no es conmutativo.

4. Matriz transpuesta

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ definimos la **matriz transpuesta** como aquella que se obtiene intercambiando las filas de la matriz por columnas. La denotamos por $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 8 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Sean A, B matrices y $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
&\left(A^t\right)^t = A \\
&(A+B)^t = A^t + B^t \\
&(\lambda A)^t = \lambda A^t \\
&(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t
\end{aligned}$$

Además se cumple que:

- Si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^t$ y $A \cdot A^t$ son simétricas y $A - A^t$ es antisimétrica.
- Toda matriz simétrica se puede descomponer de forma única como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^t + A - A^t\right) = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$$

5. Matrices elementales

En cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ podemos realizar una serie de operaciones llamadas **transformaciones elementales**. Estas transformaciones nos permitirán, por ejemplo, triangularizar una matriz, obtener su rango, calcular su determinante,etc. Las transformaciones elementales son:

1. La multiplicación de todos los números de una fila o de una columna por un número diferente de cero.
2. La suma de un múltiplo de una fila (o columna) con otra fila o columna.
3. El intercambio entre filas o columnas.

Definición 2 *Una* ***matriz*** *cuadrada* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *se llama* ***elemental*** *si se puede obtener a partir de la matriz identidad,* I_n *mediante una sola transformación elemental.*

EJEMPLOS:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightleftarrows 3F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Determinantes

Definición 3 *Dada una matriz cuadrada* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *se denomina* ***matriz adjunta del elemento*** *que ocupa el lugar (i,j), es decir, que se encuentra en la fila i y columna j, a la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de la matriz dada. Se denota por* A_{ij}*.*

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \\ A_{31} &= \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definición 4 (Determinante de una matriz de orden 2) *Dada una matriz cuadrada* $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *definimos su determinante y lo denotaremos mediante* $|A| = Det(A)$ *como:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ |A| &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \end{aligned}$$

Definición 5 (Determinante de una matriz de orden 3) *Dada una matriz cuadrada* $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

definimos su determinante mediante la fórmula:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{23}$$

Esta expresión se puede recordar con el diagrama conocido como regla de Sarrus*.*

Definición 6 (Determinante de una matriz de orden n) *Dada una matriz cuadrada* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

definimos su determinante mediante la fórmula:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}|A_{1n}|$$

Observación: Aunque, en esta definición, hemos calculado el determinante a través de los elementos de la primera fila, se puede desarrollar a través de los elementos de cualquier fila o columna de la matriz dada.

6.1. Propiedades de los determinantes

1. Si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, su determinante es nulo.

2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+b_{j1} & a_{j2}+b_{j2} & \cdots & a_{jn}+b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   para $j = 1, 2, ..., n$.

3. Si B es una matriz que se obtiene a partir de otra matriz A multiplicando por un número real λ una de sus filas o columnas se tiene que

   $$|B| = \lambda |A|$$

4. Si B es una matriz que se obtiene intercambiando dos filas o columnas de una matriz A se tiene que

   $$|B| = -|A|$$

5. Si una matriz tiene dos filas (o dos columnas) iguales o proporcionales su determinantes es nulo.

6. Si B es una matriz que se obtiene a partir de una matriz A sumando un múltiplo de una fila (o columna) a otra fila de A (o columna) se tiene

$$|B| = |A|$$

7. El determinante de una matriz triangular superior o inferior es el producto de los elementos de su diagonal.

8. El determinante de toda matriz cuadrada coincide con el de su transpuesta

$$|A| = \left|A^t\right|$$

9. El determinante de un producto de matrices cuadradas del mismo orden es el producto de los determinantes

$$|AB| = |A|\,|B|$$

El cálculo de un determinante se simplifica si lo desarrollamos a través de una fila (o columna) que contenga el mayor número de ceros. Si la matriz no posee ningún elemento nulo, realizaremos transformaciones elementales sin que cambie su determinante, hasta obtener una matriz equivalente que posea varios ceros en alguna de sus filas (o columnas).

7. Matriz inversa de un matriz cuadrada

Definición 7 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cuadrada se dice* **invertible**, **regular** *o* **no singular**, *si existe una matriz $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ que verifica*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Si A no es invertible, se dice **singular** *o* **no regular**. *A la matriz A^{-1} se le llama* **matriz inversa** *de A.*

Teorema 1 *Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible si y sólo si su determinante no es nulo*

$$|A| \neq 0$$

Definición 8 *El determinante $|A_{ij}|$, de la matriz adjunta A_{ij} asociada al elemento a_{ij} es conocido como el* **menor complementario** *del elemento a_{ij}, para cada i,j=1,2,...,n. El* **adjunto** *o* **cofactor** *del elemento a_{ij} para cada i,j=1,2,...,n se define como*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$$

Definición 9 *Definimos la* ***matriz adjunta*** *de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a la matriz que obtenemos de sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto o cofactor*

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Cuando calculamos el producto $A \cdot (Adj(A))^t$ obtenemos

$$A\cdot = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|\, I_n$$

Podemos calcular la inversa de una matriz mediante la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

7.1. Propiedades de la matriz inversa

Sean A, B dos matrices cuadradas invertibles:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

8. Rango de una matriz

Definición 10 *Definimos el* ***rango de una matriz*** $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *como el máximo orden de los menores no nulos de la matriz.*

8.1. Propiedades del rango de una matriz

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ entonces $rang(A) \leqslant \text{mín}\,(n, m)$.
2. $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tiene rango máximo si $rang(A) = \text{mín}\,(n, m)$.
3. $rang(A) = rang\left(A^t\right)$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y es invertible entonces $rang(A) = n$.
5. Si intercambiamos dos filas (respectivamente dos columnas) de $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, o multiplicamos una fila (respectivamente dos columnas) por un escalar no nulo, o, le sumamos una fila a una fila (respectivamente con columnas) multiplicada por un escalar, entonces el rango de la matriz resultante no varía. Es decir, el rango de una matriz no varía mediante transformaciones elementales.

9. Dependencia e independencia lineal

Sean, por ejemplo, las filas de una matriz,

$$e_1 = (3, 2, 1, 2) \quad e_2 = (2, 0, -1, 1); \quad e_3 = (0, 4, 5, 1)$$

Observemos que se cumple la relación $e_3 = 2e_1 - 3e_2$.

En general si podemos escribir linealmente una fila en función de otras, es decir, si existen unos números no todos nulos tales que

$$e_m = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_{m-1} e_{m-1}$$

decimos que e_m es **combinación lineal** de las filas $e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}$.

Definición 11 *Diremos que las filas de una matriz son* ***linealmente dependientes*** *si podemos encontrar unos números no todos nulos de forma que*

$$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_m e_m = 0$$

Si esos números no existen, diremos que las filas son ***linealmente independientes****.*

Observaciones:

- *El número máximo de columnas linealmente independientes en una matriz es igual al número máximo de filas linealmente independientes.*
- *Para que un determinante sea igual a cero, es necesario y suficiente que sus filas (columnas) sean linealmente dependientes. Por lo tanto el rango de una matriz será el número de columnas (filas) linealmente independientes.*