Tema 2
Algoritmos de ordenación

2.1 Algoritmos locales de ordenación

InsertSort

- La idea de InsertSort consiste en tener los i-1 primeros elementos de la tabla ordenados entre sí al inicio de la iteración i.

1	2		i-1	**i**	i+1		N
σ(1)	σ(2)	….	σ(i-1)	**σ(i)**	σ(i+1)	…..	σ(N)

Ordenados

Elemento a insertar

- En la iteración **i** se coloca el elemento σ(i) en la posición correspondiente entre 1 e i de tal forma que pasan a estar ordenados entre sí los i primeros elementos de la tabla.

Elemento a insertar

1	3	6	7	2	5	4

Ordenados

Posición de inserción

1	3	3	6	7	5	4

Elemento insertado

1	2	3	6	7	5	4

Ordenados

InsertSort

```
InsertSort(Tabla T, ind P, ind U)
    para i de P+1 a U;
        A=T[i];
        j=i-1;
        mientras (j ≥ P && T[j]>A);
            T[j+1]=T[j];
            j--;
        T[j+1]=A;
```

Operación Básica (CDC)

- Observaciones:
  - El trabajo de bucle interno depende de la entrada
  - El trabajo sobre una entrada σ será:

$$n_{IS}(\sigma) = \sum_{i=2}^{N} n_{IS}(\sigma, i)$$

  - Además $1 \leq n_{IS}(\sigma,i) \leq i-1$

InsertSort: casos mejor y peor

- Tenemos que $1 \le n_{IS}(\sigma,i) \le i-1$; por tanto se tiene que $\forall \sigma \in \Sigma_N$:

$$\sum_{i=2}^{N} 1 \le \sum_{i=2}^{N} n_{IS}(\sigma,i) \le \sum_{i=2}^{N} (i-1) \Rightarrow N-1 \le n_{IS}(\sigma) \le \frac{N(N-1)}{2}$$

- Caso peor
  - Paso 1: Por lo anterior $\forall \sigma \in \Sigma_N$, $n_{IS}(\sigma) \le N(N-1)/2$
  - Paso 2: $\boldsymbol{n_{IS}([N,N-1,N-2,\ldots\ldots,1]) = N(N-1)/2}$

  $\Rightarrow W_{IS}(N)=N(N-1)/2$

- Caso mejor
  - Paso 1: Por lo anterior $\forall \sigma \in \Sigma_N$, $n_{IS}(\sigma) \ge N-1$
  - Paso 2: $\boldsymbol{n_{IS}([1,2,3,\ldots\ldots,N]) = N-1}$

  $\Rightarrow B_{IS}(N)=N-1$

InsertSort: caso medio I

- Empezamos con la definición

$$A_{IS}(N) = \sum_{\sigma\in\Sigma_N} p(\sigma) n_{IS}(\sigma) = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N} n_{IS}(\sigma) = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N}\sum_{i=2}^{N} n_{IS}(\sigma,i) =$$

$$= \sum_{i=2}^{N}\frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N} n_{IS}(\sigma,i) = \sum_{i=2}^{N}\boxed{A_{IS}(N,i)}$$

Nº medio de operaciones que realiza IS en la iteración **i**

- Estado de la tabla en la iteración i

1	2		i-1	**i**	i+1		N
σ(1)	σ(2)	….	σ(i-1)	**σ(i)**	σ(i+1)	…..	σ(N)

Ordenados

Elemento a insertar

InsertSort: caso medio II

- Observación: al abordar IS la entrada σ(i), ésta puede acabar en las posiciones

  i, i-1, i-2, …, j, …, 2, 1

  haciendo respectivamente

  1, 2, 3, …, i-j+1, …, i-1 e i-1

  cdcs respectivamente

Posición Final	CDC perdidas (σ(**i**)<σ(j))	CDC ganadas (σ(**i**)>σ(j))	Total CDC
i	0	1 (σ(**i**)>σ(i-1))	1=i–i+1
i-1	1 (σ(**i**)<σ(i-1))	1 (σ(**i**)>σ(i-2))	2=i–(i-1)+1
i-2	2 (σ(**i**)<σ(i-1), σ(**i**)<σ(i-2))	1 (σ(**i**)>σ(i-3))	3=i–(i-2)+1
…j…	i-j	1 (σ(**i**)>σ(j-1)	i–j+1
3	i-3 (σ(**i**)<σ(i-1),…, σ(**i**)<σ(3))	1 (σ(**i**)>σ(2))	i-2=i–3+1
2	i-2 (σ(**i**)<σ(i-1),…, σ(**i**)<σ(2))	1 (σ(**i**)>σ(1))	i-1=i–2+1
1	i-1 (σ(**i**)<σ(i-1),…, σ(**i**)<σ(1))	0	i-1

InsertSort: caso medio III

- Esto es, $n_{IS}(i \rightarrow j) = i-j+1$ si $1<j\leq i$ y $n_{IS}(i \rightarrow 1) = i-1$, donde $n_{IS}(i \rightarrow j)$ en el numero de CDC necesarias para insertar el elemento $\sigma(i)$ en la posición j.

- Una expresión alternativa del caso medio en la iteración i

$$A_{IS}(N,i) = \sum_{j=1}^{i} p(j) n_{IS}(i \rightarrow j)$$

- Q: con qué probabilidad acabará $\sigma(i)$ en la posición j?

InsertSort: caso medio IV

- Si las σ son equiprobables, es razonable pensar que también lo sean las P(σ(i) acabe en j)
- Esto es P(σ(i) acabe en j) = 1/i para todo j entre 1 e i
- De aquí se deduce que ***el trabajo medio A_{IS} (N, i) de IS sobre la entrada i-ésima de una tabla de N elementos será i/2 + O(1)***
- Y por tanto ***A_{IS} (N) = N^2/4 + O(N)***
- En más detalle …

InsertSort: caso medio V

- Recordamos que $A_{IS}(N,i) = \sum_{j=1}^{i} p(j) n_{IS}(i \rightarrow j)$, donde p(j) es la probabilidad de que el elemento σ(i) termine en la posición j.
- Asumimos por **equiprobabilidad** que p(j) = 1/i (j=1,2,…i) , con lo que se tiene:

$$A_{IS}(N,i) = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} n_{IS}(i \rightarrow j) = \frac{1}{i}\left[\left(\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)\right) + (i-1)\right] = \frac{i-1}{2} + \frac{i-1}{i}$$

- Dado que $A_{IS}(N) = \sum_{i=2}^{N} A_{IS}(N,i)$, sustituyendo lo anterior resulta:

$$A_{IS}(N) = \sum_{i=2}^{N}\left(\frac{i-1}{2} + \frac{i-1}{i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} i + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{i-1}{i} = \frac{N^2}{4} + O(N)$$

Resumiendo InsertSort

- Sabemos que

  $$W_{IS}(N) = N^2/2 + O(N)$$

  $$A_{IS}(N) = N^2/4 + O(N)$$

- Conclusión: IS es algo mejor que SS y que BS, pero no mucho más en el caso medio e igual en el caso peor
- **Q: ¿hemos llegado al límite de eficacia en ordenación?**

Cotas inferiores

- ¿Cuánto podemos mejorar un algoritmo de ordenacion por cdcs?
- Obviamente se tiene que $n_A(\sigma) \geq N$, por tanto $n_A(\sigma) = \Omega(N)$.
- Pero:¿existe una f(N) universal tal que $n_A(\sigma) \geq f(N)$ para cualquier A?
- ¿Existe algún algoritmo que alcance esa cota mínima?
- Si existe ¿cómo es ese algoritmo y en que condiciones la alcanza ?
- Herramienta: medida del desorden de una tabla

¿Cómo medir el desorden de una tabla?

- Las operaciones que realiza un algoritmo dependen del orden de la tabla.
- ¿Como medir el orden o desorden que hay en una tabla?
- **Definición:**
  - Decimos que dos índices $i<j$ están en inversión si $\sigma(i) > \sigma(j)$
- Ejemplo: $\sigma=(3\ 2\ 1\ 5\ 4)$

  1 2 3 4 5

  - Inversiones de σ=((1,2),(1,3),(2,3),(4,5)) => 4 inversiones.
  - $Inv(\sigma)=4$
- En la práctica decimos que "3 está en inversión con 2" en vez de que "los índices 1 y 2 están en inversión"
- Esto es, $\sigma(i)$ está en inversión con $\sigma(j)$ si $\sigma(i) > \sigma(j)$ pero $i<j$

¿Cómo medir el desorden de una tabla?

- Observaciones
  1. inv([1,2,3,…..,N-1,N])=0
  2. inv([5,4,3,2,1])=10
  3. inv([N,N-1,N-2,….,2,1])=(N-1)+….+2+1=N^2/2-N/2

Obs: No puede haber ninguna permutación **con más inversiones** que σ= [N,N-1,N-2,….,2,1] ya que

inv([σ(1), σ(2),…., σ(N)])= inv(σ(1))+inv(σ(2))+ …+inv(σ(N-1))+inv(σ(N))≤

ΛI ΛI ΛI

N-1 N-2 1

≤(N-1)+(N-2)+…..+1=N^2/2-N/2

Cotas inferiores para algoritmos locales

- **Definición**: Un algoritmo de ordenación por comparación de clave (CDC) es **local** si **por cada CDC** que realiza el algoritmo **se deshace a lo sumo una inversión**.
- InsertSort, BurbujaSort y (moralmente) SelectSort son locales
- **Obs:** Si A es un algoritmo local, el número mínimo de CDC que realizará A será el número de inversiones que tenga la tabla a ordenar σ, es decir $n_A(\sigma) \geq inv(\sigma)$.
- **Caso peor: *Si A es local, $W_A(N) \geq N^2/2-N/2$***

$$W_A(N) \geq n_A([N,N-1,N-2,\ldots,2,1]) \geq inv\ ([N,N-1,N-2,\ldots,2,1]) = N^2/2-N/2$$

- **Consecuencia:** IS, BS y SS **son óptimos** en el caso **peor** entre los algoritmos locales

Cotas inferiores en el caso medio

- **Definición:** Si $\sigma \in \Sigma_N$ definimos su traspuesta, σ^t como $\sigma^t(i) = \sigma(N-i+1)$.
- Ejemplo $\sigma=[3,2,1,5,4]$ entonces $\sigma^t=[4,5,1,2,3]$
- Observaciones:
  - $(\sigma^t)^t = \sigma$
  - inv([3,2,1,5,4])+inv([4,5,1,2,3])=4+6=10=(5*4)/2
  - inv([5,4,3,2,1])+inv([1,2,3,4,5])=10+0=10=(5*4)/2
- **Proposición**: Si $\sigma \in \Sigma_N$

  $inv(\sigma)+ inv(\sigma^t)=N(N-1)/2$

Demo: Si $1 \leq i < j \leq N$, o bien (i,j) es inversión de σ o (N-j+1, N-i+1) lo es de σ^t => cada pareja (i,j) suma 1 a $inv(\sigma)+ inv(\sigma^t)$ y hay N(N-1)/2 tales parejas

Cotas inferiores en el caso medio

- ***Si A es local $A_A(N) \geq N^2/4+O(N)$***

A local

$$A_A(N) = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N} n_A(\sigma) \geq \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N} inv(\sigma) = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma,\sigma^t}\left(inv(\sigma)+inv(\sigma^t)\right) =$$

$$= \frac{1}{N!}\frac{N(N-1)}{2}\sum_{\sigma,\sigma^t} 1 = \frac{1}{N!}\frac{N(N-1)}{2}\frac{N!}{2} = \frac{N^2}{4}+O(N)$$

- InsertSort es **óptimo** para el caso medio entre los algoritmos locales.

Los algoritmos locales de ordenación son poco eficaces.

En esta sección hemos aprendido…

- El algoritmo de ordenación InsertSort, así como el cálculo de sus casos mejor, peor y medio.
- El concepto de algoritmo de ordenación local, así como sus cotas inferiores para los casos peor y medio.

Herramientas y técnicas a trabajar …

- Funcionamiento de InsertSort
- Evolución de algoritmos locales
- Casos peor, medio y mejor de InsertSort y algoritmos similares y variantes
- Detección y cuenta de inversiones en permutaciones
- Rendimiento de algoritmos locales en permutaciones concretas
- Problemas a resolver (al menos!!) :los recomendados de las secciones 3, 4 y 5

2.2 Algoritmos recursivos de ordenación

Métodos divide y vencerás (DyV)

- La idea de los algoritmos divide y vencerás es la siguiente:
  - Partir la tabla T en dos subtablas T_1 y T_2
  - Ordenar T_1 y T_2 recursivamente.
  - Combinar T_1 y T_2 ya ordenados en T también ordenada.
- Pseudocódigo general de algoritmos DyV

```
DyVSort(tabla T)
  si dim(T)≤dimMin :
     directSort(T);
  else :
     Partir(T,T1,T2);
     DyVSort(T1);
     DyVSort(T2);
     Combinar(T,T1,T2);
```

- Una primera opción es implementar una función **Partir** sencilla y una función **Combinar** complicada.
- Resultado: **MergeSort.**

MergeSort

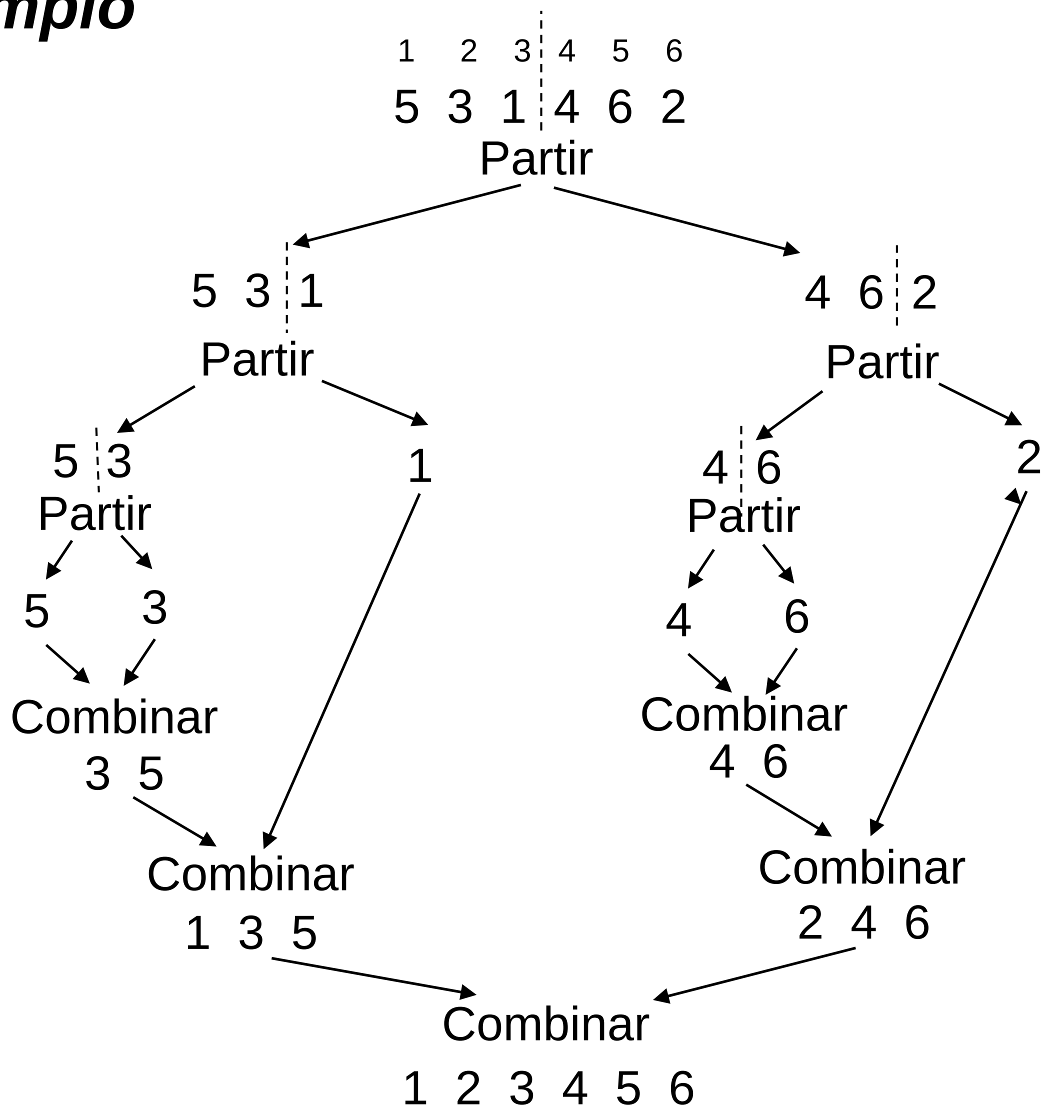
```
status MergeSort(tabla T, ind P, ind U)
  si P>U:
     devolver ERROR;
  si P==U:     //tabla con un elemento
     devolver OK;
  else:
     M=⌊(P+U)/2⌋;          // ”partir”
     MergeSort(T,P,M);
     MergeSort(T,M+1,U);
     devolver Combinar(T,P,M,U)
```

Va a requerir memoria dinámica

Se trata de una primera versión, a retocar antes de programar;

MergeSort

- ***Ejemplo***



MergeSort: Combinar

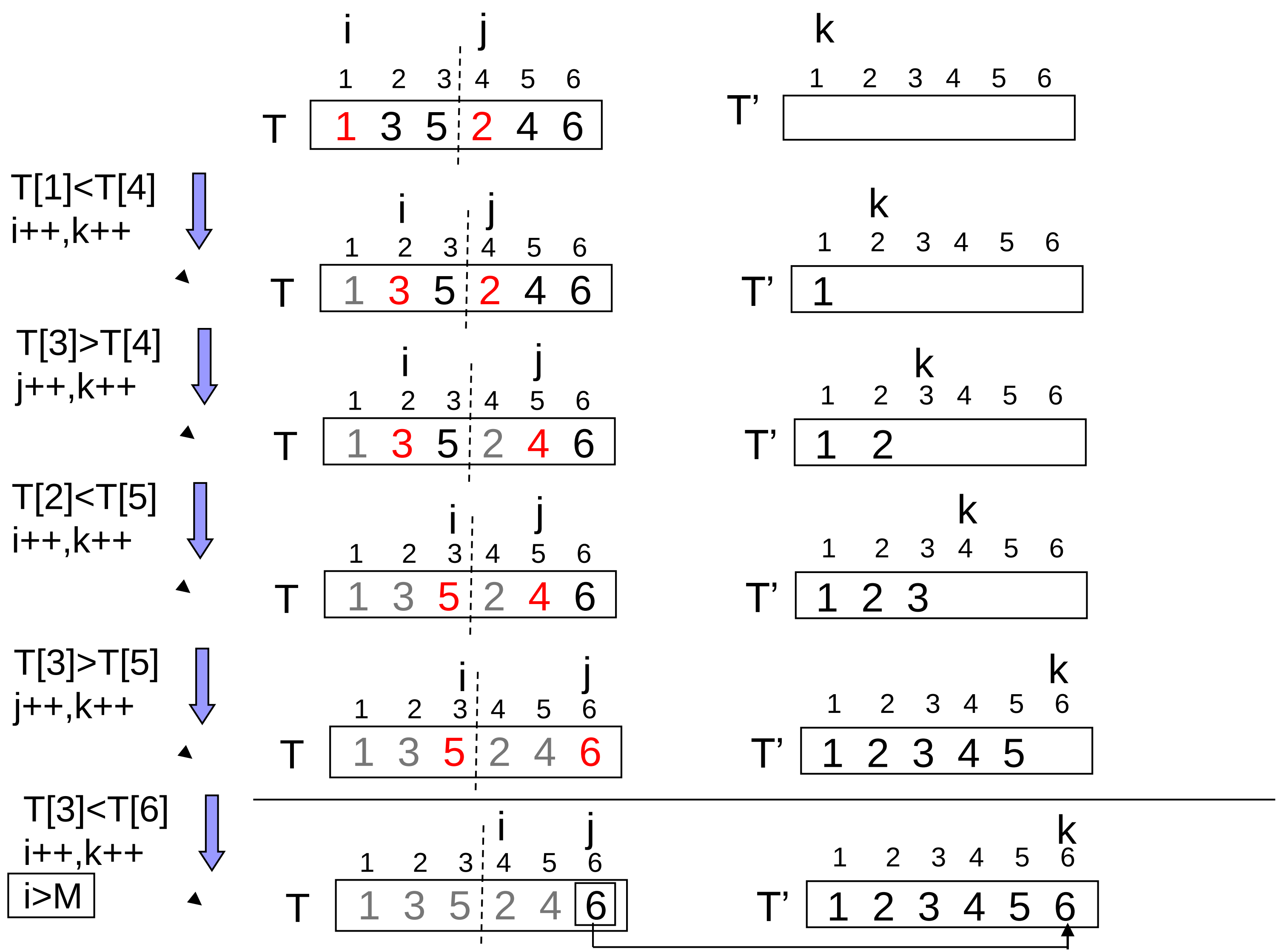
```
status Combinar(Tabla T,ind P, ind M, ind U)
        T'=TablaAux(P,U);
        Si T'==NULL: devolver Error;
        i=P;j=M+1;k=P;
        mientras i≤M y j≤U:
            si T[i]<T[j]: T'[k]=T[i];i++;
            else: T'[k]=T[j];j++;
            k++;
        si i>M:      // copiar resto de tabla derecha
            mientras j≤U:
                T'[k]=T[j];j++;k++;
        else si: j>U: // copiar resto de tabla izquierda
            mientras i≤M:
                T'[k]=T[i];i++;k++;
        Copiar(T',T,P,U);
        Free(T');
        devolver T;
```

Tabla auxiliar con índices de P a U

Operación Básica de Combinar y de MS

Copia T' en T entre los indices P y U

Combinar: Ejemplo



Finalmente copiamos T' en T y liberamos T'

MergeSort: Rendimiento

- Observaciones
  1. OB: en Combinar T[i]<T[j]
  2. $n_{MS}(\sigma)= n_{MS}(\sigma_i)+ n_{MS}(\sigma_d)+ n_{Combinar}(\sigma, \sigma_i , \sigma_d)$
  3. $tamaño\ (\sigma_i)=\lceil N/2 \rceil$; $tamaño\ (\sigma_d)=\lfloor N/2 \rfloor$
  4. $\lfloor N/2 \rfloor \leq n_{Combinar}(\sigma, \sigma_i , \sigma_d) \leq N-1$
- **Con estas observaciones se tiene:**

$$W_{MS}(N) \leq W_{MS}(\lceil N/2 \rceil) + W_{MS}(\lfloor N/2 \rfloor) +N-1;$$

$$W_{MS}(1)=0.$$

- Primer ejemplo de ***desigualdad recurrente***.

CG: $T(N) \leq T(N_1) + T(N_2) + \ldots + T(N_k) +f(N)$, con $N_i<N$

CB: $T(1)=X$ (X constante).

Escuela Politécnica Superior

MergeSort: Rendimiento, caso peor

- ¿ Cómo se resuelve una desigualdad recurrente ?
  - **Paso 1**: Se obtiene una solución particular, por ejemplo sobre un caso particular fácil de calcular.
  - Por ejemplo en el caso de MS, se toma $N=2^k$
    - ***En el caso de MS, tomando $N=2^k$ se tiene la desigualdad recurrente***

      $$\boxed{W_{MS}(N) \leq 2W_{MS}(N/2)+N-1 \text{ y } W_{MS}(1)=0}$$

    - ***Desarrollando en cadena la expresión anterior se obtiene***

      $W_{MS}(N) \leq N\lg(N)+O(N)$.
  - **Paso 2**: Se demuestra que la expresión obtenida en el paso 1 es válida para todo N mediante el método de ***demostración por inducción***.

Nota importante: Se recomienda ver el desarrollo anterior para ambos pasos en clase o en los apuntes de la asignatura.

MergeSort: Rendimiento, casos peor y medio

- Por un razonamiento similar al del caso peor se tiene que $B_{MS}(N) \geq B_{MS}(\lceil N/2 \rceil) + B_{MS}(\lfloor N/2 \rfloor) + \lfloor N/2 \rfloor$ y
  $B_{MS}(1)=0$
- **Tomando, de nuevo $N=2^k$ se obtiene la ecuación recurrente $B_{MS}(N) \geq 2B_{MS}(N/2)+N/2$ y $B_{MS}(1)=0$**
- ***Resolviendo la desigualdad anterior se obtiene: $B_{MS}(N) \geq (1/2)N\lg(N)$***
- Para estimar el caso medio observamos que:

$(1/2)N\lg(N) \leq B_{MS}(N) \leq A_{MS}(N) \leq W_{MS}(N) \leq N\lg(N)+O(N)$, con lo cual se tiene que: $\boxed{A_{MS}(N)=\Theta(N\lg(N))}$

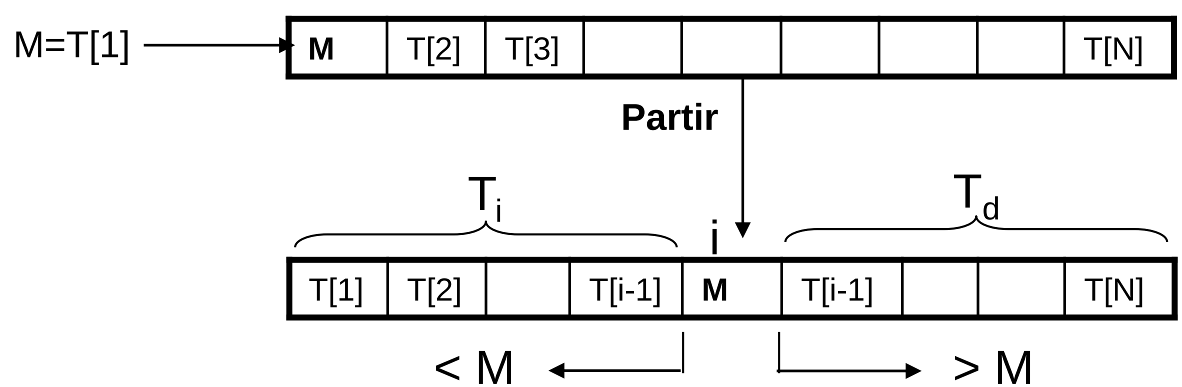
- El rendimiento es bueno, pero el algoritmo necesita **memoria dinámica** y además tiene **costes ocultos en la recursión**

QuickSort

- En Quicksort (QS), se parte de una función **Partir** complicada que hace innecesaria una función **Combinar.**
- La idea de **Partir** en QS consiste en elegir una elemento M=T[m] de la tabla a ordenar (pivote).
- Tras **Partir** los elementos de la tabla quedan ordenados respecto a M

  =>no hace falta Combinar.

Ejemplo:



QuickSort: pseudocódigos

```
status QS(tabla T, ind P, ind U)
  si P>U:
     devolver ERROR;
  si P==U:
     devolver OK;
  else:
     M=Partir(T,P,U);
     si P<M-1:
        QS(T,P,M-1);
     si M+1 < U:
        QS(T,M+1,U);
  devolver OK;
```

```
ind Partir(tabla T, ind P, ind U)
  M=Medio(T,P,U);   ← Pivote
  k=T[M];
  swap(T[P],T[M]);
  M=P;
  para i de P+1 a U:
    si T[i]<k:
       M++;
       swap(T[i],T[M]);
  swap(T[P],T[M]);
  devolver M;
```

QuickSort: Elección del pivote

- El pivote se puede elegir de varias maneras:
  - El primer elemento (devolver P).
  - El último elemento (devolver U).
  - La posición que está en mitad de la tabla (devolver (P+U)/2).
  - Una posición aleatoria entre el primer y ultimo elemento de la tabla (devolver aleat(P,U)).
- **No se garantiza** que el valor del pivote sea aproximadamente el valor medio de la tabla

Ejemplo

	1	2	3	4	5	6	
	4	5	3	1	6	2	M=1,k=4 swap(T[1],T[1])
i=2	**4**	5	3	1	6	2	T[2]>k
i=3	**4**	5	3	1	6	2	T[3]<k, M=2 swap(T[2],T[3])
i=4	**4**	3	5	1	6	2	T[4]<k, M=3 swap(T[3],T[4])
i=5	**4**	3	1	5	6	2	T[5]>k
i=6	**4**	3	1	5	6	2	T[6]<k, M=4 swap(T[4],T[6])
	4	3	1	2	6	5	swap(T[1],T[4])
	2	3	1	**4**	6	5	devolver 4
		<				>	

QS: Rendimiento en el caso peor

- Observaciones
  1. OB: en Partir "si T[i]<k"
  2. $n_{QS}(\sigma)= n_{QS}(\sigma_i)+ n_{QS}(\sigma_d)+ n_{Partir}(\sigma)$
  3. $n_{Partir}(\sigma)$=N-1 (Si Medio devuelve P, $n_{Medio}(\sigma)=0$)
- Entonces, si σ_i tiene k elementos, σ_d tiene N-1-k elementos y por tanto

  $n_{QS}(\sigma) \leq N-1+ W(k) + W(N-1-k)$

  $\leq N-1+ \max_{k = 1,\ldots, N-1} \{ W(k) + W(N-1-k) \}$
- Esto es,

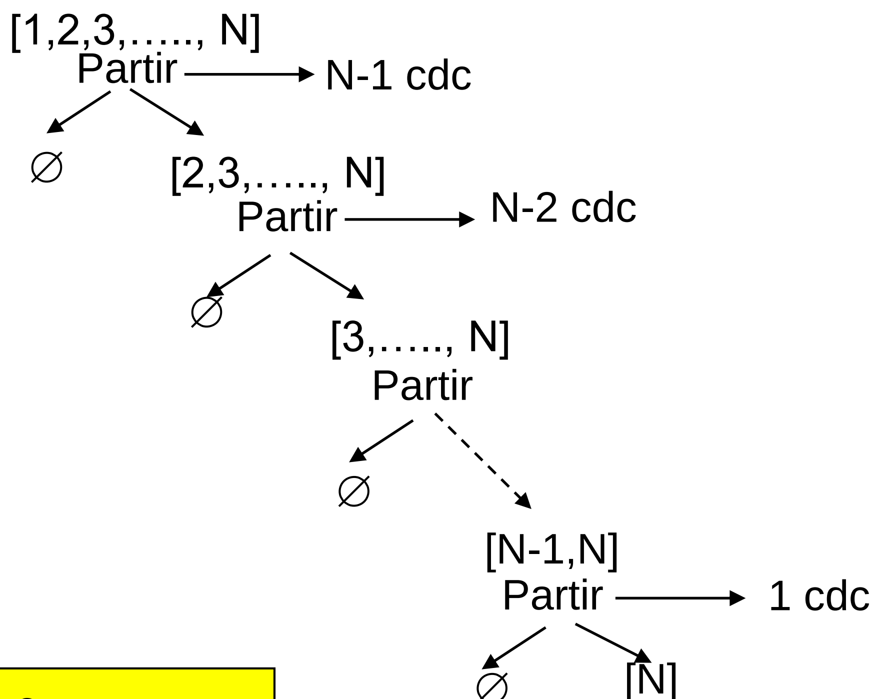
  $\boldsymbol{W(N) \leq N-1+ \max_{k = 1, \ldots, N-1} \{ W(k) + W(N-1-k) \}}$
- Y se puede demostrar por inducción que

  $$\boldsymbol{W(N) \leq N^2/2-N/2}$$

QS: Rendimiento en el caso peor

- Pero además $W_{QS}(N) \geq N^2/2-N/2$.

  Consideramos T=[1,2,3,….., N]



- Por tanto se tiene:

  $n_{QS}([1,2,3,\ldots,N])=$
  $(N-1)+(N-2)+\ldots..+1=$
  $N^2/2-N/2$

Luego $\boxed{W_{QS}(N) = N^2/2-N/2}$

QS: Rendimiento en el caso medio

- De nuevo tenemos $n_{QS}(\sigma)= n_{QS}(\sigma_i)+ n_{QS}(\sigma_d)+ N-1$.
- Aproximamos $n_{QS}(\sigma_i)\cong A_{QS}(i-1)$ y $n_{QS}(\sigma_d)\cong A_{QS}(N-i)$ con lo que obtenemos $n_{QS}(\sigma) \cong A_{QS}(i-1) + A_{QS}(N-i) + N-1$.
- Y obtenemos la igualdad recurrente aproximada

$$A_{QS}(N) = (N-1) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[A_{QS}(i-1) + A_{QS}(N-i)]$$

$$A(1) = 0$$

- Se puede demostrar

$$\boxed{A_{QS}(N) = 2N\log(N) + O(N)}$$

Nota: Se recomienda seguir la demostración de lo anterior en la pizarra o en los apuntes de la asignatura.

En esta sección hemos aprendido…

- Los algoritmos Quick y MergeSort
- Sus ecuaciones de rendimiento en los casos peor y medio
- Cómo resolverlas
- Cómo escribir la ecuación de rendimiento de un algoritmo recursivos
- Cómo efectuar estimaciones de ecs. recurrentes
  - Intuyendo soluciones particulares en algunos casos
  - Desplegando para estimar una solución general o particular
  - Estimando el caso general por inducción

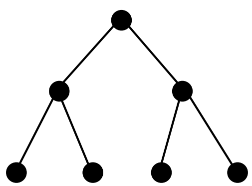
Herramientas y técnicas a trabajar …

- Funcionamiento de MergeSort y QuickSort
- Casos peor, medio y mejor de MS y QS y variantes
- Estimación del crecimiento de funciones en desigualdades recurrentes
- Determinación de ecuaciones de rendimiento de algoritmos recurrentes y su resolución
- Problemas a resolver (al menos!!): los recomendados de las secciones 6, 7 y 8

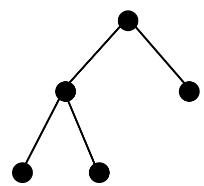
2.3 HeapSort

HeapSort

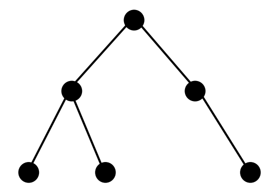
- **Definición:** Un heap (montón) es un árbol binario quasicompleto (es decir, solo tiene huecos en los elementos más a la derecha del último nivel).



Árbol binario completo



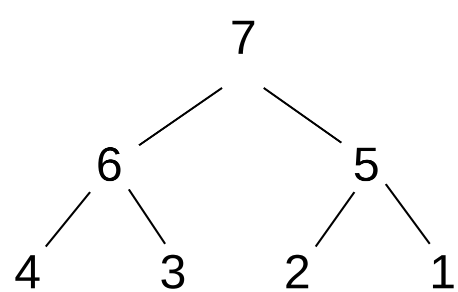
Árbol binario quasicompleto (heap)



Árbol binario (no heap)

- **Definición:** Un Max-heap es un heap tal que ∀ subárbol T' de T se tiene info(T')>info(T'_i), info(T'_d)

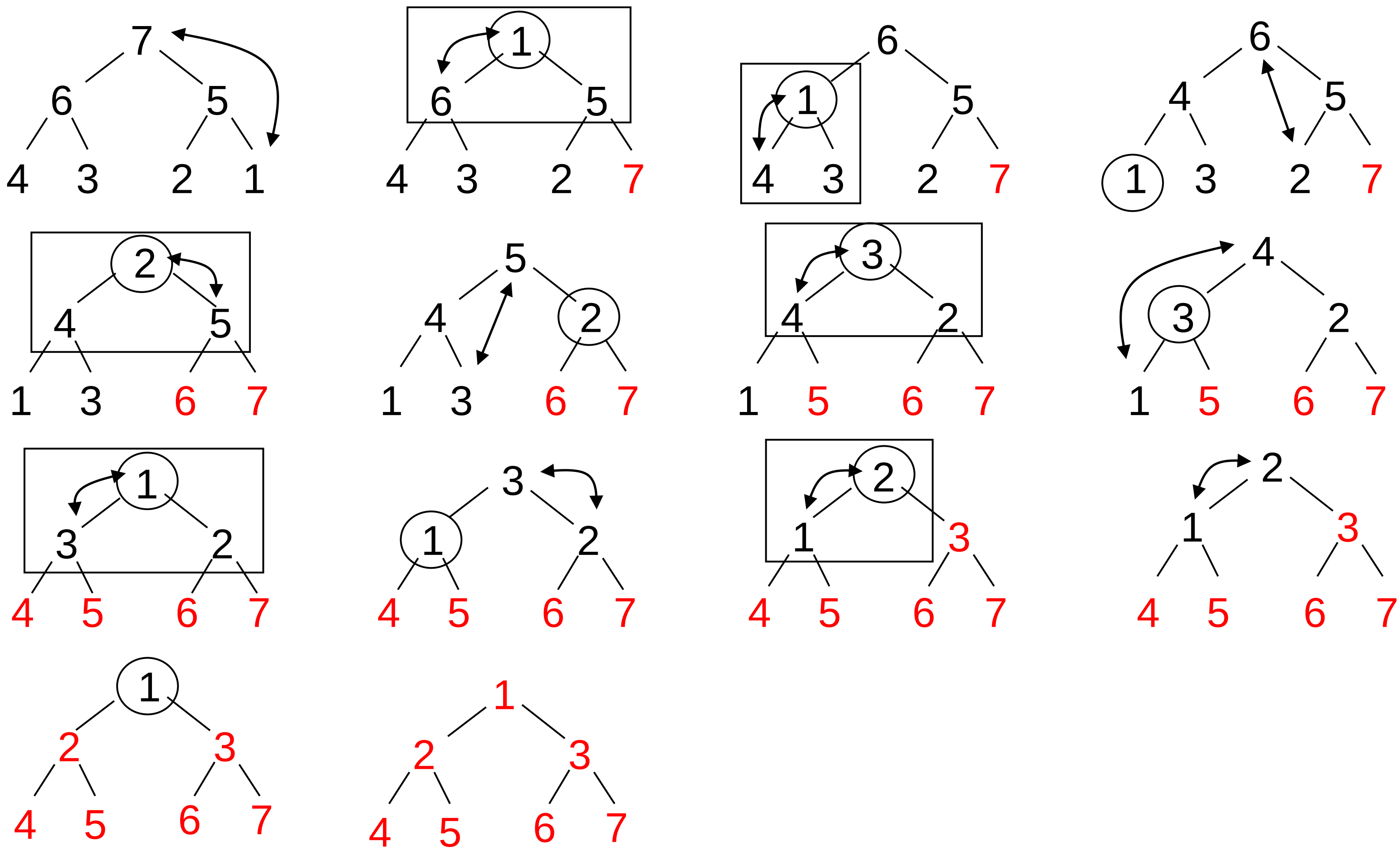
Ejemplo:



- **Observación:** Un max-heap es fácil de ordenar.

Ordenación de max-heap.

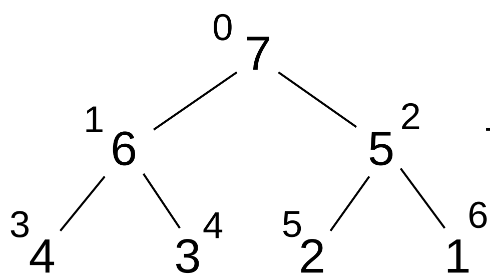
1. Se intercambia el nodo de la raiz con el nodo inferior derecho
2. Se mantiene la condición de max-heap con el nodo recién colocado en la raiz.



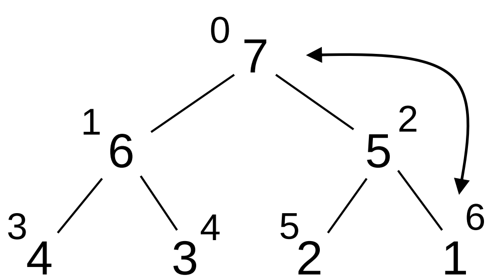
HeapSort: Ordenación en tablas

- Observaciones:
  1. Si recorremos el árbol resultante al final de arriba a abajo y de izquierda a derecha se tiene una tabla ordenada
  2. Los nodos de un heap se pueden colocar en una tabla de tal forma que el método sea in-place.

Ejemplo:



0	1	2	3	4	5	6
7	6	5	4	3	2	1



0	1	2	3	4	5	6
7	6	5	4	3	2	1

swap(T[0],T[6])

0	1	2	3	4	5	6
1	6	5	4	3	2	7

HeapSort: Posiciones en tablas que contienen max-heaps

- Padre →Hijo izquierdo y Padre →Hijo derecho

P	H_I	H_D
0	1	2
1	3	4
2	5	6
…	…	…

→

Padre	Hijo Izq	Hijo der
j	2j+1	2j+2

- Hijo →Padre

H	P
1	0
2	0
3	1
4	1
5	2
6	2
…	…

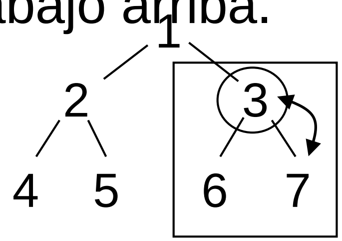
→

Hijo	Padre
j	$\lfloor (j-1)/2 \rfloor$

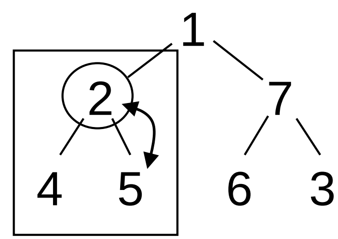
HeapSort: Creación del max heap

- El proceso anterior permite ordenar un max heap
- ¿Cómo podemos crear un max heap a partir de una tabla dada?
    - Se mantiene la condición de heap en todos los nodos internos (nodos que tienen al menos un hijo), de derecha a izquierda y de abajo arriba.

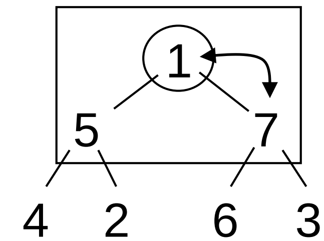
Ejemplo:



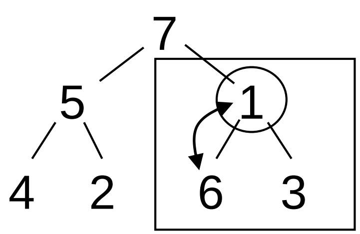
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7



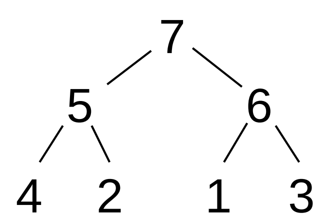
0	1	2	3	4	5	6
1	2	7	4	5	6	3



0	1	2	3	4	5	6
1	5	7	4	2	6	3



0	1	2	3	4	5	6
7	5	1	4	2	6	3



ya es un heap

0	1	2	3	4	5	6
7	5	6	4	2	1	3

HeapSort: Pseudocódigo

HeapSort

```
HeapSort(tabla T, int N)
  CrearHeap(T,N);
  OrdenarHeap(T,N);
```

CrearHeap

```
CrearHeap(tabla T, int N)
  si N==1:
    volver ;
  para i de ⌊N/2⌋ -1 a 0 :
    heapify(T,N,i);
```

OrdenarHeap

```
OrdenarHeap(tabla T, int N)
  para i de N-1 a 1 :
    swap(T[0],T[i]);
    heapify(T,i,0);
```

heapify

```
heapify(tabla T, int N, ind i)
  mientras ( 2*i+2 ≤ N) :
    ind=max(T, N, i, 2*i+1, 2*i+2);
    if (ind ≠ i) :
      swap( T[i], T[ind] ) ;
      i = ind ;
    else :
      return;
```

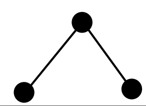
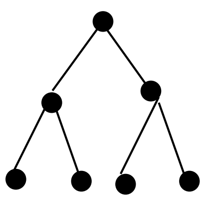
Donde la función

max(T, N, i, 2*i+1,2*i+2)

devuelve el índice del elemento de la tabla T que contiene el valor mayor entre i, 2*i+1,2*i+2 (padre e hijos izq y der)

Profundidad de Heaps

- **Observación:** Si T es un heap con N nodos, prof(T)= $\lfloor \log(N) \rfloor$

Nº de nodos N	Ejemplo de Heap	Prof.
1		0
2, 3		1
4, 5, 6, 7		2
…		…

HeapSort: Rendimiento

- Observaciones:
  - $n_{HeapSort}(T)=n_{CrearHeap}(T)+n_{OrdenarHeap}(T)$
  - El número máximo de cdc que CrearHeap y OrdenarHeap realizan sobre un nodo es prof(T)
  - prof(T)= $\lfloor \log(N) \rfloor$ pues T es quasi-completo
- $n_{CrearHeap}(T) \leq N \lfloor \log(N) \rfloor$ y $n_{OrdenarHeap}(T) \leq N \lfloor \log(N) \rfloor$
- $W_{HS}(N)=O(N\log(N))$
- $n_{CrearHeap}([1,2,\dots,N])=N\log(N)$
- El método seguido no es recursivo

$\left.\right\} W_{HS}(N)=\Theta(N\log(N))$

- Es el método de ordenación más eficaz hasta ahora!

En esta sección hemos aprendido…

- El concepto de Maxheap y su construcción
- El algoritmo HeapSort y su rendimiento

Herramientas y técnicas a trabajar

- La construcción de Maxheaps
- La aplicación del algoritmo HeapSort
- Problemas a resolver (al menos!!): los recomendados de la sección 9

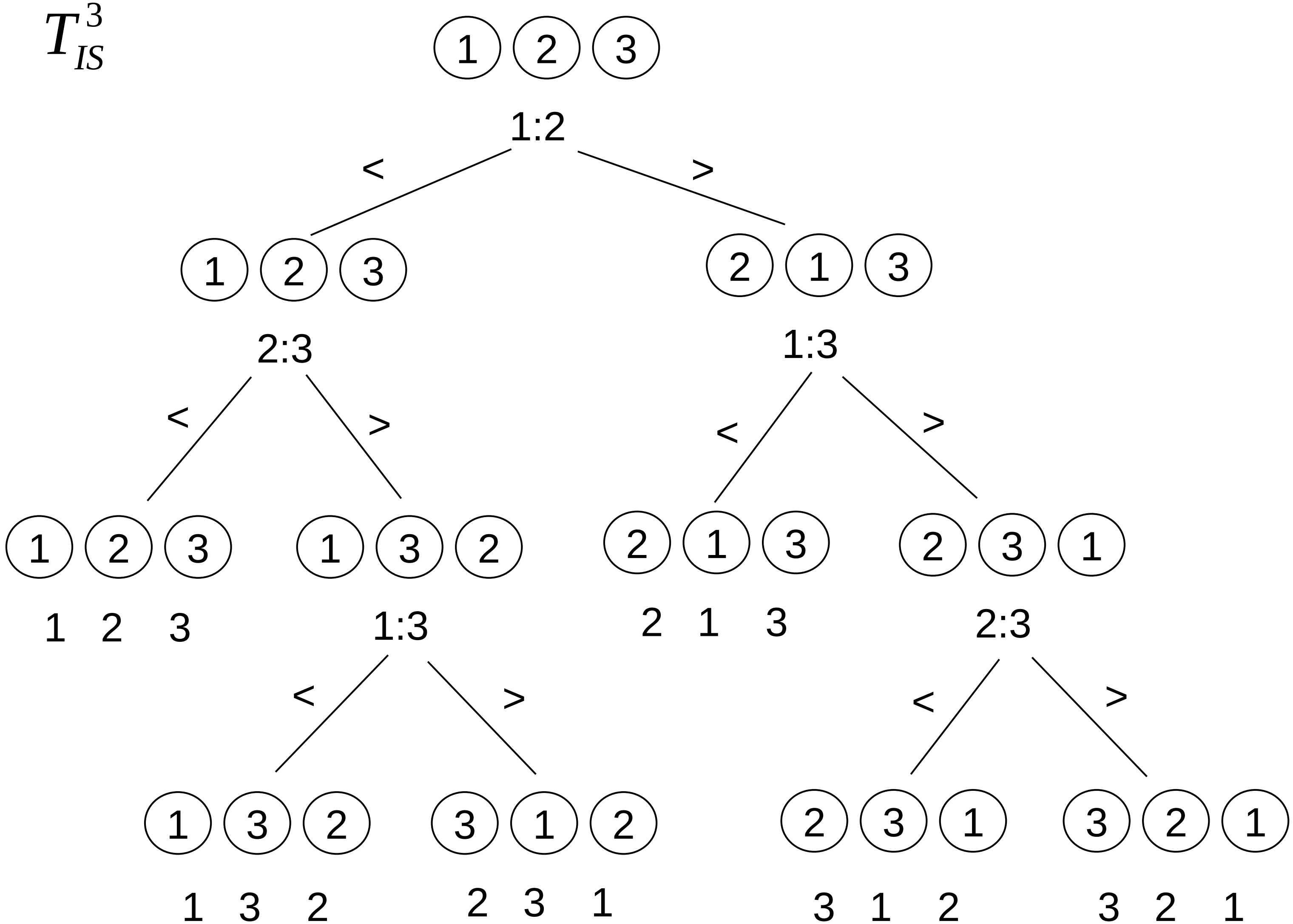
2.4 Árboles de decisión para algoritmos de ordenación

Cotas inferiores para algoritmos de ordenación por cdcs

- Hasta ahora el mejor algoritmo de ordenación por cdcs es HeapSort
- Ningún algoritmo de ordenación va a tener un coste mejor que $\Theta(N)$
- **Pregunta:** ¿hay algoritmos de ordenación de coste mejor que $\Theta(N\log(N))$?
- **Respuesta: NO** al menos si trabajamos sobre cdcs
- Herramienta: **árboles de decisión**

Árbol de decisión: Ejemplo InsertSort

T_{IS}^{3}

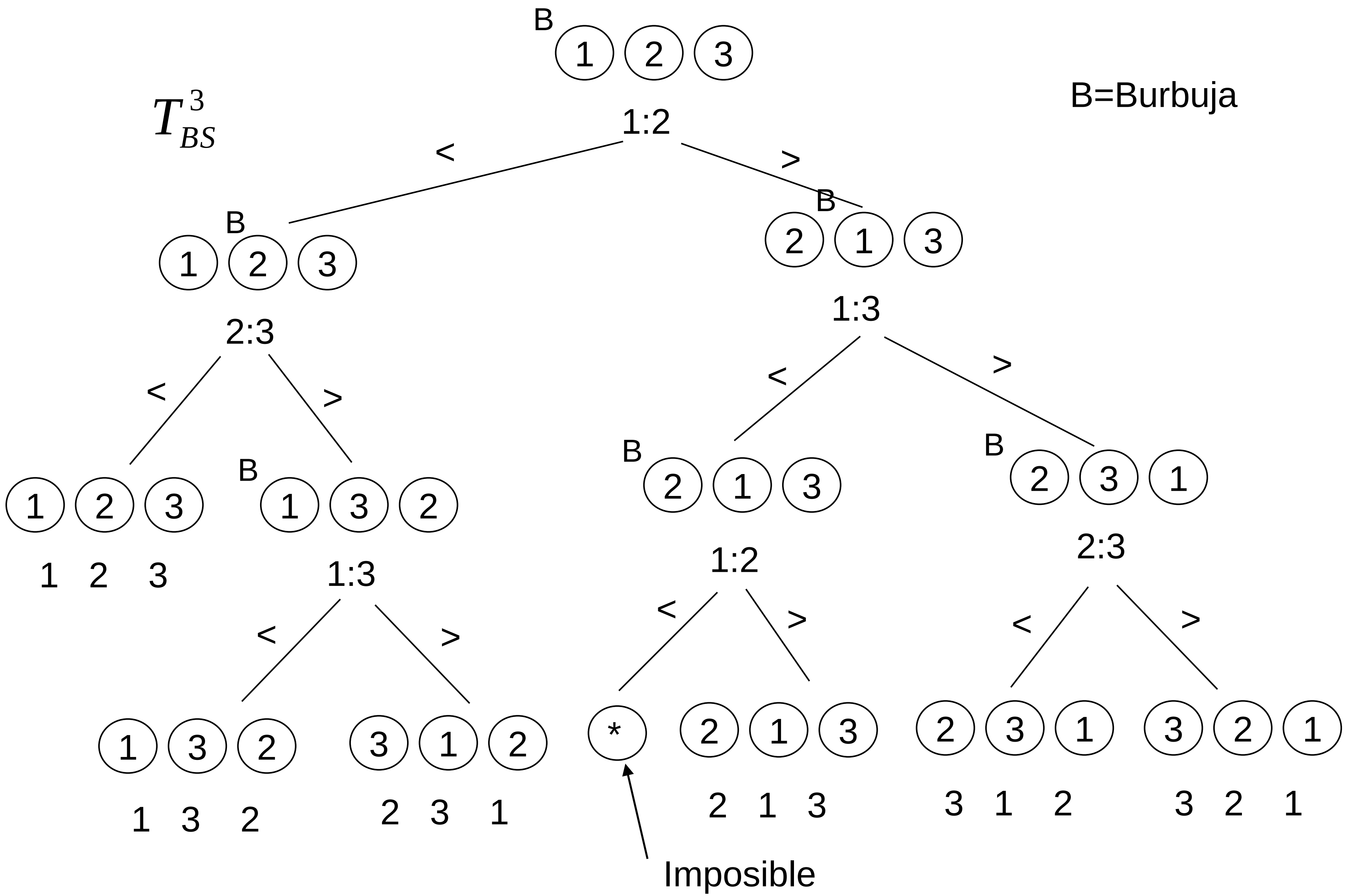


Árbol de decisión: definición

- Si **A** es un algoritmo de ordenación por comparación de clave y **N** es un tamaño de tabla, se puede construir su **árbol de decisión** $\mathbf{T_A^N}$ sobre Σ_N cumpliendo las siguientes 4 condiciones:

1. Contiene nodos de la forma $\boxed{\mathbf{i{:}j}}$ (i<j) que indica la cdc entre los elementos **inicialmente** en las posiciones **i** y **j**.
2. El subárbol izquierdo de **i:j** en $\boxed{\mathbf{T_A^N}}$ contiene el resto del trabajo (cdcs) que realiza el algoritmo A si **i** < **j**.
3. El subárbol derecho de **i:j** en $\boxed{\mathbf{T_A^N}}$ contiene el el resto del trabajo (cdcs) que realiza el algoritmo A si **i** > **j**.
4. A cada $\sigma \in \Sigma_N$ le corresponde una única **hoja** H_σ en $\mathbf{T_A^N}$ y los **nodos entre la raíz y la hoja** H_σ son las **sucesivas cdc** que realiza el algorimo **A** al recibir la permutación σ para ordenarla.

Ejemplo de árbol de decisión: BurbujaSort



Árbol de decisión: consecuencias

1. El número de hojas en $\mathbf{T_A^N}$ es N! =$|\Sigma_N|$.
2. $n_A(\sigma)$=nº de cdc=profundidad de la hoja H_σ en $\mathbf{T_A^N}$

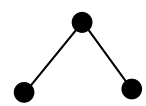
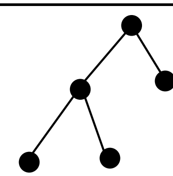
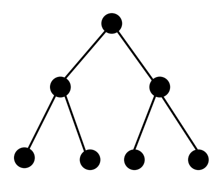
$$\boxed{n_A(\sigma) = prof_{T_A^N}(H_\sigma)}$$

3. Por tanto:

$$W_A(N) = \max_{\sigma \in \Sigma_N} n_A(\sigma) = \max_{\sigma \in \Sigma_N} prof_{T_A^N}(H_\sigma)$$

Cota inferior en el caso peor I

- ¿Cuál es la **profundidad mínima** de un árbol binario de H hojas?

Nº de hojas H	$AB^{Minimo}(H)$	Prof.
1		0
2		1
3		2
4		2
….	….	….

Cota inferior en el caso peor II

- Parece que la Prof Mínima de un AB con H hojas es $\lceil \lg(H) \rceil$
- Para el caso peor se tiene:

$$W_A(N) = \max_{\sigma \in \Sigma_N} prof_{T_A^N}(H_\sigma) \geq \text{prof mín de AB con N! hojas}$$

$$= \lceil \lg(N!) \rceil$$

- Como sabemos que $\lg(N!)=\Theta(N\log(N)) = \Theta(N\lg(N))$ se tiene que $W_A(N)=\Omega(N\lg(N))$.
- HeapSort y MergeSort son **óptimos para el caso peor**.

Cota inferior en el caso medio I

- Tenemos

$$A_A(N) = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N} n_A(\sigma) = \frac{1}{N!}\sum_{H\in T_A^N} prof_{T_A^N}(H)$$

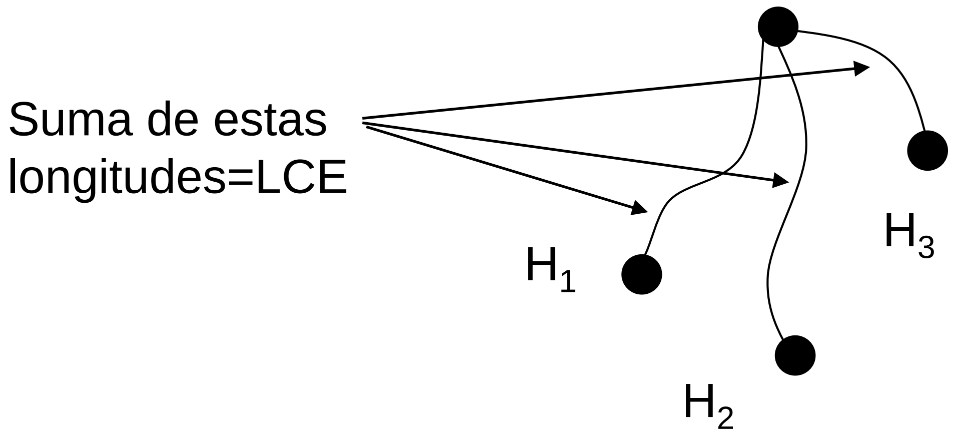
- Luego $A_A(N) \geq PM_{min}(N!)$ donde

$PM_{min}(k)$ = mín {prof media(T): T AB con k hojas}

- Pero $\underset{con\, k\, hojas}{prof\ \ media}(T) = \frac{1}{k}\sum_{\mathrm{H\in hojas\, de\, T}} \mathrm{prof(H)} = \frac{1}{k} LCE(T)$

- LCE: **Longitud de Caminos Externos**

Cota inferior en el caso medio II



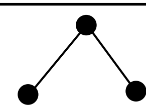
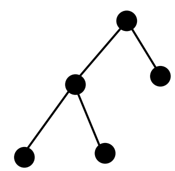
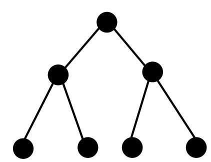
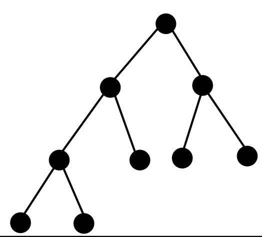
- Tenemos

$$A_A(N) \geq \frac{1}{N!} LCE_{\min}(N!) \text{ con}$$

$$LCE_{\min}(k) = \min\{LCE(T) : \text{T tiene k hojas}\}$$

Cota inferior en el caso medio III

- Estimamos $LCE_{min}(k)$

k	T Óptimo	$LCE_{min}(k)$
1		0
2		2(1+1)
3		5(2+2+1)
4		8(2+2+2+2)
5		12(3+3+2+2+2)
….	….	….

Cota inferior en el caso medio IV

- **Se puede demostrar (ver apuntes o clase)**
  $LCE_{min}(k)=k\lceil \lg(k)\rceil+k-2^{\lceil \lg(k)\rceil}$
- Dado que
$$A_A(N)\geq \frac{1}{N!}LCE_{min}(N!)=$$
$$\frac{1}{N!}\left(N!\lceil \lg(N!)\rceil+N!-2^{\lceil \lg(N!)\rceil}\right)=\lceil \lg(N!)\rceil+1-\frac{2^{\lceil \lg(N!)\rceil}}{N!}=$$
$$\lceil \lg(N!)\rceil=\Omega(N\lg(N))$$
- Se sigue que $\boxed{A_A(N)=\Omega(N\lg(N))}$
- MS, QS y HS son **óptimos** para el **caso medio.**

En esta sección hemos aprendido…

- El concepto de **árbol de decisión** para un algoritmo de ordenación por cdc
- A **construir** un árbol de decisión para un algoritmo de ordenación por CDC.
- Las **cotas inferiores** para los algoritmos de ordenación por CDC
- **Cómo se obtienen** mediante el uso de árboles de decisión.

Herramientas y técnicas a trabajar

- La construcción de Árboles de Decisión para tablas de 3 elementos
- La construcción de Árboles de Decisión parciales para tablas de 4 elementos
- Problemas a resolver (al menos!!) : los recomendados de la sección 10