UNIDAD
DIDÁCTICA

1 CONJUNTOS

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

1. Introducción
2. Definiciones
   2.1. Conjunto
   2.2. Conjuntos bien definidos: comprensión y extensión
   2.3. Elementos: pertenencia
   2.4. Referencial, conjunto vacío Ø, unitario y pares
   2.5. Igualdad de conjuntos
3. Subconjuntos
   3.1. Definición
   3.2. Conjuntos anidados
   3.3. Partes de un conjunto y conjunto de las partes
   3.4. Partición de un conjunto
   3.5. Propiedades de la inclusión ⊂
4. Diagramas de Venn
5. Operaciones con conjuntos
   5.1. Implicaciones y equivalencias. Cuantificadores
      5.1.1. Implicaciones y equivalencias
      5.1.2. Cuantificadores

6. Leyes de operaciones con conjuntos. Álgebra de conjuntos
7. Principio de inclusión-exclusión
8. Conjunto producto
9. Axiomática de Zermelo-Fraenkel para teoría de conjuntos
10. Fundamentación de la matemática a partir del conjunto vacío: definición de números naturales por Von Neumann

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

EJERCICIOS VOLUNTARIOS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

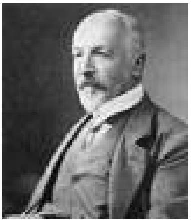
OBJETIVOS DE LA UNIDAD

- Entender y manejar el concepto fundamental de «conjunto» y su axiomática.
- Manejar los diagramas de Venn para representar conjuntos.
- Introducir los conceptos de «implicación», «equivalencia» y los «cuantificadores».
- Entender y manejar el álgebra de conjuntos.
- Manejar, por su trascendencia en probabilidad, el principio de inclusión-exclusión.

1. INTRODUCCIÓN

El conjunto es una estructura discreta fundamental. Sobre ella se «posan» otras estructuras matemáticas, lógicas y, en general, científicas. El lenguaje de los conjuntos constituye una manera rigurosa de estudiar, de modo organizado, colecciones de objetos, entes, cosas, etc., distintos.

La teoría abstracta de conjuntos linda con la filosofía y, analizando los principios mismos del conocimiento, plantea problemas difíciles que, en esta Unidad didáctica, solo se mencionan. Para lo que aquí interesa, es suficiente el punto de vista denominado **ingenuo**, en oposición al **formalista** o **axiomático**. Con todo, esta ingenuidad relativa fue la de Cantor, creador de la teoría. Sin embargo, también se dará la definición axiomática de la teoría de conjuntos.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. Nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo (Rusia). Hijo de George Woldemar, próspero comerciante y devoto luterano, aunque descendiente de judíos lusitanos, y de Maria Anna Böhm, católica y descendiente de virtuosos violinistas.

Estudió en la Universidad de Zúrich en 1862 y, desde 1863, en la de Berlín, siendo discípulo de Kummer y Weierstrass.

Desde 1869, enseñó en la Universidad de Halle (Alemania), donde en 1867 había presentado su tesis doctoral sobre la teoría de números.

En 1872, conoció a Dedekind, del que se hablará posteriormente. Fue Dedekind quien impulsó las ideas conjuntistas que compartía con Cantor.

Y aunque Cantor no fue, a pesar de la placa colocada en su casa en Halle, el fundador de la teoría de conjuntos, tema en el que le precedieron Du Bois-Reymond, Dini, Harnack y el citado Dedekind, sí fue el que le dio más lustre y razón de ser.

Eso sí, fue el creador de los números ordinales transfinitos, a los que Hilbert dio categoría de paraíso.

En 1884, por la tensión sufrida debido a su intenso trabajo y a causa de su enfrentamiento con Kronecker, desarrolló su primera crisis grave por depresión, que ya no le abandonó, con crisis esporádicas, hasta su muerte en el Halle Nervenklinik, de Halle, el 6 de enero de 1918.

2. DEFINICIONES

2.1. CONJUNTO

Recibe el nombre de **conjunto** una colección bien determinada de objetos. Dichos objetos reciben el nombre de **elementos** del conjunto.

Se conviene, pues, en que un conjunto está constituido por elementos, entes abstractos, objetos materiales, conceptos, fenómenos, signos, etc., reunidos arbitrariamente o en virtud de una propiedad común.

Todo conjunto es, asimismo, un objeto, tomando el término «objeto» en sentido amplio. Un conjunto está determinado cuando se sabe qué objetos lo constituyen, es decir, cuáles son sus elementos.

Un conjunto es una entidad de naturaleza diferente a la de los elementos que lo componen. Por ejemplo, un conjunto de puntos no es un punto, incluso si contiene un solo punto. El conjunto de los farmacéuticos de un pueblo no es un farmacéutico, incluso aunque en ese pueblo haya un solo farmacéutico.

La noción de «conjunto» es muy frecuente y habitual en la vida cotidiana, y, con matices diversos, la evocan los siguientes términos: «clase», «grupo», «colección», «agrupación», etc. Sin embargo, los conceptos rigurosos de «conjunto», «colección», «agrupación», «clase», etc., tanto en lógica como en matemáticas, difieren bastante entre sí.

Lo habitual es designar los conjuntos mediante letras mayúsculas. Para representar un conjunto se usa la notación siguiente: letra mayúscula, signo igual, llave de apertura, enumeración separada por comas o definición de los elementos que componen el conjunto, y llave de cierre. Por ejemplo:

- $C_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{\text{cifras decimales}\}$.
- $P = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2n\} = \{\text{números pares}\}$.

Ejemplos de conjuntos:

- Los puntos de un segmento dado.
- Los hijos de la familia García y su gato.
- Las rectas que pasan por un punto en el espacio euclideo.
- Las cadenas de televisión.
- Las denominaciones de origen de los vinos españoles.
- El conjunto de estudiantes de esta asignatura.
- Las páginas de esta Unidad.
- Los átomos de una molécula.
- Los habitantes de una ciudad.
- Los números primos.

Algunos conjuntos particularmente importantes en matemáticas son los siguientes:

- $\mathbb{N}^*$, conjunto de los enteros naturales: $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{N}$, conjunto de los enteros naturales completados con el 0: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$, conjunto de los enteros relativos: enteros positivos y negativos incluido el 0: $\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$.
- $\mathbb{Q}$, conjunto de números racionales: fracciones positivas y negativas.
- $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales; es decir, todos los anteriores más los irracionales.
- $\mathbb{C}$, conjunto de números complejos, también conocidos como «imaginarios».

2.2. CONJUNTOS BIEN DEFINIDOS: COMPRENSIÓN Y EXTENSIÓN

Se dice que un **conjunto está bien definido** cuando siempre es posible determinar si un objeto dado pertenece o no a un cierto conjunto. Por enunciados precisos de palabras, como sucede cuando se dice: el conjunto V, de las vocales del alfabeto español. O escribiendo sus elementos entre llaves, como es el caso de describir el anterior conjunto de las vocales poniendo: $V = \{a, e, i, o, u\}$. En este último ejemplo, el conjunto está escrito en forma tabular.

En relación con las dos formas anteriores de «definir» un conjunto, existen dos modos de describir los conjuntos:

- **Comprensión.** Cuando se determina inequívocamente un conjunto enunciando una propiedad, característica o atributo común que permite enumerar sus elementos; esto es, dando una propiedad de la que gozan todos los elementos de un conjunto, y solo ellos, el conjunto queda definido por comprensión:

  $$C = \{p | p = 2x, \forall x \in \mathbb{Z}\}$$

  Y se lee C es el conjunto de los p «tales que» p es par o múltiplo de 2.

  Esta forma de definir viene a ser una determinación del conjunto «describiéndolo». Sin embargo, un conjunto no tiene por qué estar formado por elementos con propiedades comunes; por ejemplo, el conjunto $C = \{1, B,$ Pepe, casa, avión$\}$ no representa ninguna propiedad, factor, atributo o característica común entre sus elementos y, no obstante, es un conjunto. En estas situaciones, no hay más remedio que acudir a definir los conjuntos, por extensión.

- **Extensión.** Cuando se determina un conjunto por enumeración de sus elementos, bien enumerándolos todos, o enumerando una parte, y esta seguida de puntos suspensivos, apareciendo una ley de formación de dichos elementos. Por ejemplo, si se representa por D el conjunto de los divisores de 60, dicho conjunto puede definirse por extensión como sigue:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30\}$$

Este modo exhaustivo de definir el conjunto por extensión se corresponde a una enumeración.

Hay que distinguir, clara y nítidamente, entre un objeto y el conjunto al que pertenece. No significa lo mismo, verbigracia, una cerilla que el conjunto de todas ellas contenidas en una caja.

2.3. ELEMENTOS: PERTENENCIA

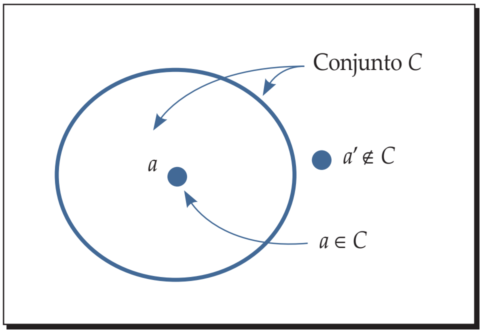
Los objetos que forman un conjunto reciben el nombre de **elementos** o **miembros** de dicho conjunto; es decir, cada uno de los constituyentes elementales e individuales de un conjunto recibe el nombre de «elemento». Por ejemplo, en el conjunto de los números decimales $\{0,1, \ldots, 8,9\}$, cada cifra es un elemento del conjunto; también se dice que un elemento pertenece a un conjunto. De este modo, los puntos, los hijos y el gato, las rectas, las distintas cadenas de televisión, las diferentes denominaciones de origen de los vinos españoles, los estudiantes de estructuras discretas y cada página de esta Unidad son «elementos» o «miembros» de sus respectivos conjuntos.

Supóngase que, por definición, a es un objeto y C es un conjunto. Si el objeto a «pertenece» al conjunto C, se representa como sigue: $a \in C$, y se lee a «pertenece» a C, siendo, por tanto, $\in$ el símbolo de pertenencia. Si, por el contrario, a «no pertenece» a C, se escribe $a \notin C$.

Este símbolo de pertenencia $\in$ fue introducido en 1894 por el matemático italiano Peano (1858-1932). Naturalmente, si C es un conjunto, para todo objeto o elemento e se tiene una y sola una de las dos alternativas eventuales siguientes: $a \in C$ o $a \notin C$; siendo «o» exclusivo, es decir, a pertenece a C o a no pertenece a C, pero no a ambos. Para representar gráficamente la pertenencia o no de un objeto a un conjunto puede usarse un esquema como el que se muestra en la figura 1; en el cual, si se adopta el convenio de que un objeto está representado por un punto, se tiene que:

- $a \in C$, si a está en el interior del gráfico C.
- $a \notin C$, en caso contrario.

Figura 1. **Esquema de pertenencia**



Como se puede ver, los elementos de un conjunto se representan por letras minúsculas, en tanto que los conjuntos se representan por letras mayúsculas. Existen otros dos símbolos, $\forall$ y $\exists$, que van a usarse en todo el texto y que, respectivamente, significan «para todo» y «existe al menos un», que reciben los nombres de **cuantificador universal** y **existencial**. Se estudiarán más detenidamente en el epígrafe 5.1.2.

2.4. REFERENCIAL, CONJUNTO VACÍO Ø, UNITARIO Y PARES

Cuando se define un conjunto cualquiera C, previamente debe suponerse conocido un conjunto que lo contenga; es lo que en lógica se conoce como **género próximo**.

Es cómodo denominar **referencial** o **conjunto universal** de un dominio o disciplina científica al conjunto del que esta disciplina trata, si no exclusivamente, al menos primordialmente. Por ejemplo, el referencial de la entomología es el conjunto de insectos. Se representa por U.

Es decir, se denomina «conjunto referencial» o «universal», U, a un conjunto tal que contiene todos los objetos o elementos que están sometidos a consideración.

Por ejemplo, si $U = Z$, C puede ser el conjunto de los pares, o los impares, o los primos, etc. En cambio, si U es el conjunto de las letras del alfabeto español, C podría ser el conjunto de las mayúsculas, o el de las minúsculas, o el de las vocales, o el de las consonantes, o el de las vocales mayúsculas, o el de las letras dobles: ll o ch, etc.

Un conjunto que consta de un único elemento, e, se denomina **conjunto unitario** (en inglés *singleton*) y se representa por $\{e\}$. Por su parte, si a y b son dos objetos distintos y forman parte, exclusivamente, de un conjunto, dicho conjunto recibe el nombre de **par** y se representa por $\{a, b\}$. Finalmente, existe un conjunto y solo uno que no contiene ningún elemento. Dicho conjunto se denomina **conjunto vacío** y se representa y define por extensión por {} o Ø. Tal conjunto viene definido por comprensión como sigue: $\varnothing = \{\} = \{x | x \neq x\}$.

2.5. IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos conjuntos A y B son iguales si y solo si tienen los mismos elementos, y se escribe $A = B$ para indicar dicha igualdad. Por el contrario, se dice de dos conjuntos A y B que no son iguales cuando no constan de los mismos elementos. Dicha no igualdad o desigualdad se denota por $A \neq B$.

Por ejemplo, los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$ son iguales; es decir, $A = B$. Como puede verse, un conjunto no se altera por más que se repitan, «tripitan», etc., algún(os) elemento(s).

Sean ahora los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{4, 3, 1, 2\}$; también en este caso $A = B$; es decir, el orden de los elementos de un conjunto es absolutamente irrelevante respecto a la relación de igualdad entre conjuntos.

Por el contrario, si ahora se tienen los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2\}$, se ve que ambos conjuntos no son iguales, pues se diferencian en dos elementos, 3 y 4: $A \neq B$.

La igualdad de conjuntos, verbigracia A, B, C, presenta las propiedades evidentes siguientes:

- Reflexividad: $A = A$.
- Simetría: Si $A = B \Rightarrow B = A$.
- Transitividad: Si $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$.

3. SUBCONJUNTOS

3.1. DEFINICIÓN

Si todos los elementos de un conjunto A pertenecen también a un conjunto B, se dice que A es «parte de» B, o que A está «incluido» en B, o que A está contenido en B, o incluso que A es un «subconjunto» de B, y se escribe $A \subseteq B$.

Según esta definición, el propio B puede y debe considerarse como un subconjunto de sí mismo: es la «inclusión» en sentido «amplio». Naturalmente, si hay elementos de A que no están contenidos en B, entonces A no es un subconjunto de B, y se escribe $A \nsubseteq B$, lo que es equivalente a decir

$$\exists x\text{: } (x \in A) \text{ y } (x \notin B)$$

Es decir, $A \subseteq B$ si y solo si $\forall x$: $(x \in A \Rightarrow x \in B)$. Si constara que B contiene elementos extraños a A, se dice que A es un subconjunto estricto de A, y dicha inclusión se escribe $A \subset B$.

3.2. CONJUNTOS ANIDADOS

A veces los elementos de un conjunto forman parte de un conjunto más amplio que, a su vez, forma parte de otro más amplio, que asimismo… Cuando se da esta situación, se dice que los distintos conjuntos están **anidados**, y cada uno de ellos se define como subconjunto propio del siguiente.

Por ejemplo, represéntese, como es habitual, por $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales más el 0: 0, 1, 2, 3, 4, …, cuya definición por extensión viene dada por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, i, i + 1, \ldots, n, n + 1, \ldots\}$$

Y por compresión:

$$\mathbb{N} = \{n | n \text{ es un número natural o } 0\}$$

También se sabe que hay un conjunto, que se representa por $\mathbb{Z}$, y cuyos elementos son los números enteros; es decir, los números naturales más el 0 y los números naturales con el signo menos: …, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, …, y cuya definición por comprensión es

$$\mathbb{Z} = \{e | e \text{ es un número entero}\}$$

Y por extensión:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -(n + 1), -n, \ldots, -(i + 1), -i, -3, -2, -1, \\ 0, 1, 2, 3, \ldots, i, i + 1, \ldots, n, n + 1, \ldots\}$$

Asimismo, se conoce que existe un conjunto cuyos elementos son los números racionales, esto es: …, 5/3, 3/2, – 7/2, 9/7, – 1/4, 4, 0, …, y que se designa por $\mathbb{Q}$, y cuya definición por comprensión viene dada por

$$\mathbb{Q} = \{r|r \text{ es un número racional}\}$$

Y por extensión:

$$\mathbb{Q} = \{\ldots, 5/3, 3/2, -7/2, 9/7, -1/4, 4, 0, \ldots\}$$

Si al conjunto anterior se le añaden los números irracionales como $\sqrt{2}$, descubierto por los pitagóricos, se obtiene un nuevo conjunto cuyos elementos son todos los del anterior, más los así llamados **números irracionales**: esto es, los elementos de dicho conjunto son los números reales. Dicho conjunto se representa por $\mathbb{R}$ y su definición por comprensión viene dada por

$$\mathbb{R} = \{x|x \text{ es un número real}\}$$

Y por extensión:

$$\mathbb{R} = \{\ldots, -\pi, -e, -3/7, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, 3/7, e, \pi, \ldots\}$$

Por último, existe un conjunto de números dados por un par de números reales, uno de los cuales viene multiplicado por $\sqrt{-1} = i$, que reciben, por definición, el nombre de **números complejos**: …, $-1 + 2i$, $-i$, 0, $1 + i$, …, que se designa por $\mathbb{C}$, y cuya definición por comprensión es

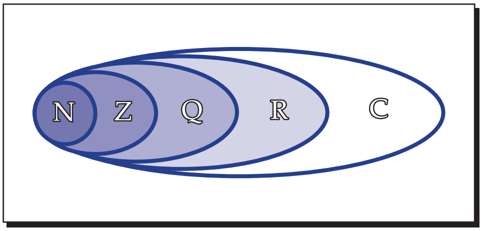
$$\mathbb{C} = \{c|c \text{ es un número complejo}\}$$

Y por extensión:

$$\mathbb{C} = \{\ldots, -1 + 2i, -i, 0, i, 1 + i, 1 + 2i, \ldots\}$$

El esquema dado por la figura 2 muestra la situación relativa de los conjuntos que acaban de describirse. Como puede verse a simple vista, el conjunto de los números naturales más el 0 está contenido y es, por tanto, un subconjunto propio del conjunto de los números enteros, que, a su vez, lo es del conjunto de los números racionales, que, asi-

Figura 2. **Anidamiento de los conjuntos de los números**



mismo, lo es de los números reales, que, finalmente, lo es de los números complejos. Y, recíprocamente, estos, los complejos, contienen a los reales, que contienen a los racionales, que contienen a los enteros, que contienen a los naturales más el 0.

3.3. PARTES DE UN CONJUNTO Y CONJUNTO DE LAS PARTES

Se denomina **parte** de un conjunto C, o subconjunto de C, a todo conjunto P de elementos de C. Se expresa que P es una parte de C, diciendo que P está incluido en C, representando dicha inclusión mediante el símbolo $\subset$, y se escribe $P \subset C$; es decir, P está «incluido» en C. En vez de escribir $P \subset C$, se puede escribir de modo equivalente $C \supset P$, y se lee C «contiene» a P. También se emplea la notación $P \not\subset C$, y se lee P «no está incluido» en C, y $C \not\supset P$, y se lee C «no contiene» a P.

Sean, ahora, a, b, c, d objetos distintos; esto es: $a \neq b$, $a \neq c$, $a \neq d$, $b \neq c$, $b \neq d$, $c \neq d$, y considérese al conjunto $C = \{a, b, c, d\}$. Enumérense todas las partes de C, teniendo en cuenta que el conjunto vacío, Ø, es una parte de C, como sigue:

- Hágase intervenir a $\{a\}$.
- Hágase intervenir b $\{b\}$, $\{a, b\}$.
- Hágase intervenir c $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.
- Hágase intervenir d $\{d\}$, $\{a, d\}$, $\{b, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$.

Por otra parte, se sabe que cada una de las partes de C es un objeto y se puede, por tanto, considerar el conjunto formado por dichos objetos. A dicho conjunto se le designa por $\mathcal{P}(C)$ y se denomina **conjunto de las partes** de C. Dicho conjunto se define por extensión como sigue:

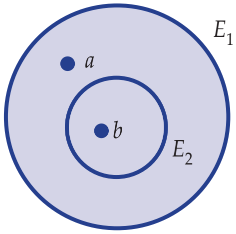
$$\mathcal{P}(C) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

Y por comprensión:

$\mathcal{P}(C) = \{P | P \subset C\}$, que se lee $\mathcal{P}(C)$ es el conjunto de los P, tales que $P \subset C$. Es decir, toda parte de un conjunto es un objeto y $\mathcal{P}(C)$ designa el conjunto de las partes de C. En este caso, $\mathcal{P}(C)$ consta de 16 elementos, en tanto que el conjunto C solo consta de 4. En general, si un conjunto finito consta de n elementos, el conjunto $\mathcal{P}(C)$ de sus partes consta de 2^n elementos.

EJEMPLO 1

Figura 3



- Un número natural $n \in \mathbb{N}$ se denomina **primo** si y solamente si **div** p es un par: **div** 3 = {1, 3}, **div** 17 = {1, 17}, …., es decir, solo es divisible por él mismo y la unidad.
- Considérese la figura 3. Se tiene que $a \in E_1$, $b \in E_1$, $a \notin E_2$, $b \in E_1$, $b \in E_2$.
- Se pueden comprobar las siguientes relaciones:

$$\varnothing = \{\quad\} = \{x | x \neq x\},\ \{1, 2\} = \{x | x = 1 \text{ o } (x = 2)\}\ \big\{1\{0\} = \{x | x = 10\}\big\}$$

3.4. PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

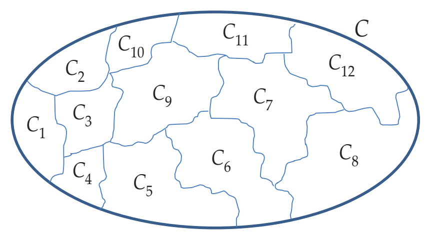
Sea C un conjunto no vacío. Se denomina **partición** de C toda distribución de C en subconjuntos no vacíos C_i, disjuntos dos a dos, de forma que C sea la unión $\cup_i$ de todos ellos. La colección de los C_i, $i \in I$, siendo I un conjunto de índices, constituye una partición de C si y solo si

$$C_i \neq \varnothing\ A_i \in I,\ A_i \cap A_j = \varnothing\ \forall_i\, j$$

con $j \in I$, $\cup_{i \in I} C_i = C$.

La figura 4 ilustra, clara y precisamente, el concepto de «partición» de un conjunto C.

Figura 4. **Ejemplo de partición**



EJEMPLO 2

Supóngase que $C = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, A\}$. Entonces, la colección de conjuntos $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_2 = \{a, b, c\}$ y $C_3 = \{A\}$ forman una partición de C, puesto que los C_i son disjuntos dos a dos; es decir, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, $C_1 \cap C_3 = \varnothing$ y $C_2 \cap C_3 = \varnothing$, y la unión de todos ellos: $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = C$.

Este concepto de «partición» es fundamental, pues da lugar a uno de los conceptos científicos más importantes, como es el de «clasificación». Clasificaciones importantes son el sistema periódico de los elementos, la clasificación linneana, la de las partículas elementales, los lenguajes formales y un largo etcétera. Por otra parte, y como se verá en la Unidad didáctica 2, se consigue una partición siempre que en un conjunto pueda establecerse una relación de equivalencia entre sus elementos.

3.5. PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN $\subset$

Representando A, B, C sendos conjuntos, la relación de inclusión $\subset$ presenta las relaciones siguientes, dos de ellas ya citadas en el epígrafe 2.5:

- Reflexividad: $A \subset A$.
- Antisimetría: si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$.
- Transitividad: si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Una forma sencilla y muy visual de probar las propiedades anteriores es haciendo uso de los diagramas de Venn, que se considerarán con más detalle a continuación. También pueden probarse directamente como sigue:

- Como para todo $x \in A$, se tiene, obviamente, que también $x \in A$, entonces $A \subseteq A$.
- $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \Leftrightarrow |x \in A \Rightarrow x \in B \\ B \subseteq A \Leftrightarrow |x \in B \Rightarrow x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B.$
- $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \Leftrightarrow |x \in A \Rightarrow x \in B \\ B \subseteq C \Leftrightarrow |x \in B \Rightarrow x \in C \end{array}\right\} \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C.$

Teniendo en cuenta la propiedad antisimétrica, si X es un subconjunto de $\varnothing$, $C \subseteq \varnothing$, puesto que también $\varnothing \subseteq X$, es $X = \varnothing$; es decir, el único subconjunto del conjunto vacío es el propio conjunto vacío.

Dados dos conjuntos A y B, si puede afirmarse una de las dos relaciones, $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$, entonces se dice que A y B son **comparables**. En otro caso no son comparables.

De todo lo visto hasta aquí, puede extraerse lo siguiente:

- El conjunto vacío Ø = { } es un subconjunto de todos los conjuntos; es decir, Ø = { } $\subseteq A, B, \ldots$, siendo $A, B, \ldots$ conjuntos.
- Como todo conjunto A es un subconjunto de U, se tiene que: $A \subseteq U$.

De lo anterior se deduce que

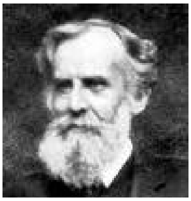
$$\emptyset = \{\ \} \subseteq A \subseteq U$$

Por eso suele considerarse a Ø = { } y U como cotas universales.

4. DIAGRAMAS DE VENN

El lógico del siglo XX, Church, en su aportación a la lógica en la decimocuarta edición de la *Enciclopedia británica*, menciona el uso de los círculos para representar realmente clases o conjuntos, proposiciones y silogismos, por parte de Saturn en 1661 y de Leibniz y Lange en 1712. Sin embargo, fue Euler quien introdujo esos círculos en la historia del análisis lógico. Los describió por primera vez en siete cartas escritas a partir de 1761 y aparecen en su obra *Lettres à une princess e d`Allemagne* (vol. 2, cartas 102 a 108). Con todo, el método de los círculos de Euler fue superado y suplantado por un método mucho más eficiente desarrollado por Venn, de ahí que actualmente se conozcan como **diagramas de Venn**. Algunos de estos diagramas, los más elementales, para las relaciones entre A y B se muestran en la figura 5.

John Venn generalizó el uso de diagramas de todo tipo: circulares, rectangulares, etc., tal y como se muestran en la figura 6, para representar relaciones binarias en conjuntos y proposiciones de dos, tres, cuatro y cinco variables.



John Venn nació en Londres en 1834.

En 1837 se graduó en Matemáticas en Cambridge.

En 1859 se ordenó sacerdote y regresó a Cambridge a enseñar ciencias naturales.

En julio de 1880, publicó en el *Philosophical Magazine* un trabajo titulado «On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasoning», donde estudió los diagramas de su nombre.

En 1889, su libro *Symbolic logic* clarificó muchas ideas originales de Boole usando los diagramas que llevan su nombre.

En 1923, muere en Cambridge.

Como puede verse, en el caso de cuatro variables, cada una de las áreas no puede representarse por círculos; por eso, es necesario recurrir a cuadrados, cuyo uso aumenta la potencia expresiva de la representación.

Figura 5. **Diagramas de Venn elementales para relaciones binarias**

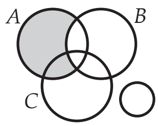
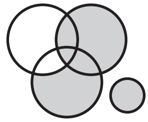
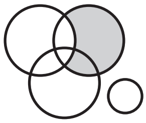
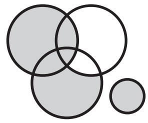
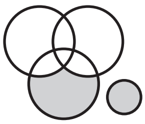
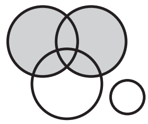
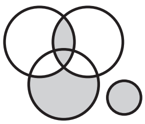
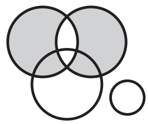
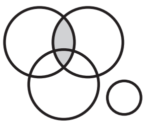
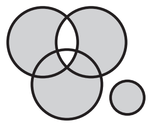
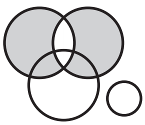
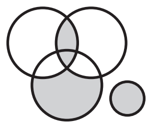
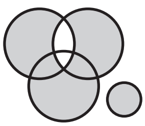
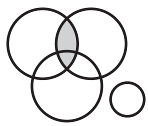
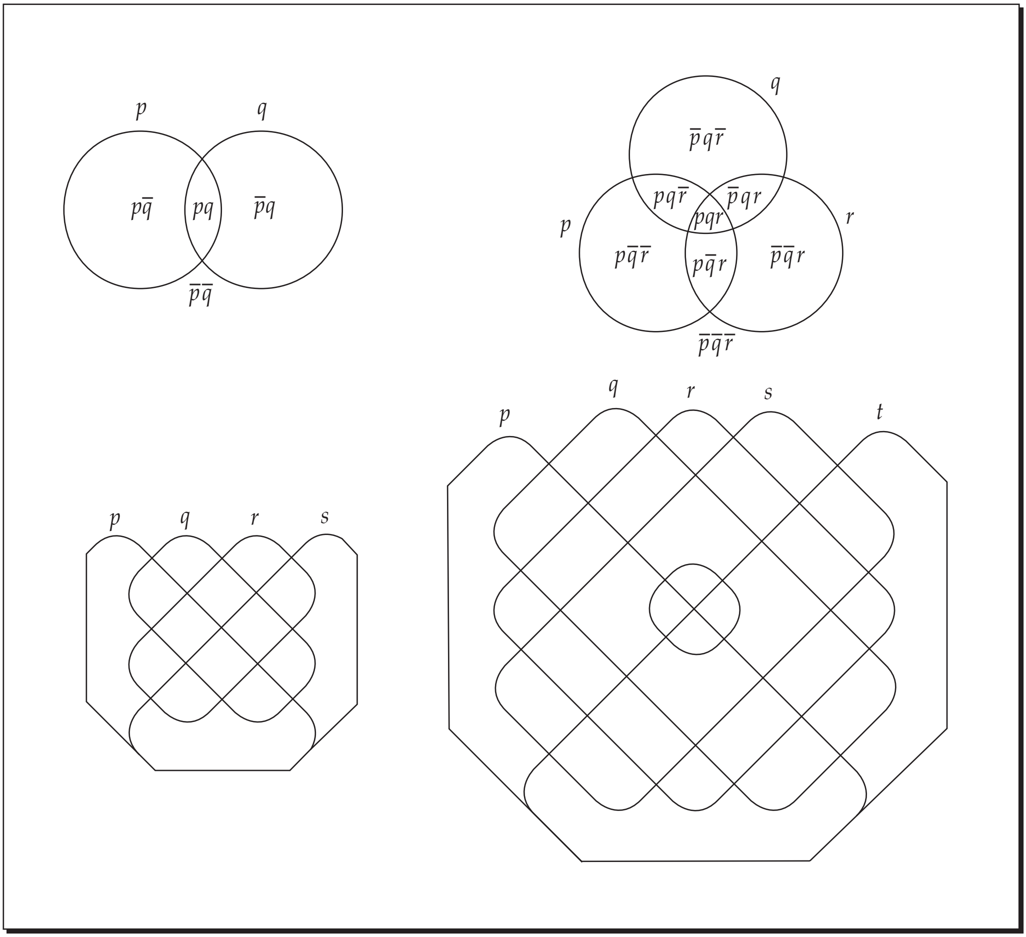
Relación binaria			**Negación**		
$A \supset B$		Si A es verdadero, entonces B es verdadero	$A \cap B'$		A es verdadero y B es falso
$B \supset A$		Si B es verdadero, entonces A es verdadero	$B \cap A'$		B es verdadero y A es falso
$A \cup B$		O A es verdadero, o B es verdadero, o ambos son verdaderos	$A' \cap B'$		A y B son ambos falsos
$A \equiv B'$		O A es verdadero, o B es verdadero, pero no ambos	$A \equiv B$		Si y solo si A es verdadero, entonces B es verdadero
$A' \cup B'$		A y B no pueden ser verdaderos simultáneamente	$A \cap B$		A y B son verdaderos simultáneamente
$A \equiv B$		Si y solo si A es verdadero, entonces B es verdadero	$A \equiv B'$		O A es verdadero, o B es verdadero, pero no ambos
$A \cap B$		A y B son verdaderos simultáneamente	$A' \cup B'$		A y B no pueden ser verdaderos simultáneamente

Figura 6. **Diagramas de Venn para dos, tres, cuatro y cinco variables**

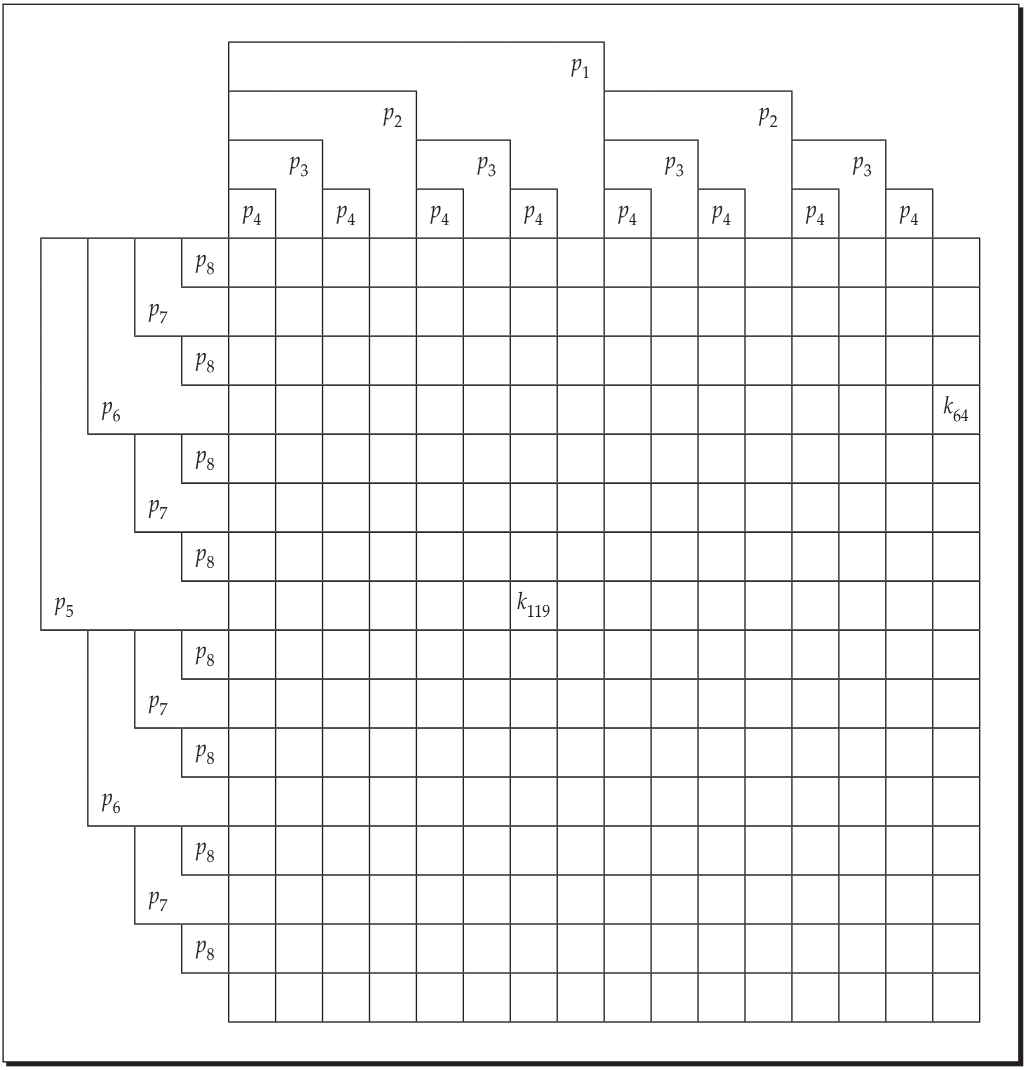


La idea general, para ocho variables, se muestra en la figura 7, en la cual las áreas que representan los predicados han sido transformadas en zonas o cuadrículas. Denotando por $\overline{p}$ la negación de p, se ve que la conjunción de términos indicada por los cuadrados elementales puede ser, verbigracia, como sigue:

$$k_{64} = \overline{p}_1\,\overline{p}_2\,\overline{p}_3\,\overline{p}_4\,\overline{p}_5\,\overline{p}_6\,\overline{p}_7\,\overline{p}_8 \text{ y } k_{119} = p_1\,\overline{p}_2\,\overline{p}_3\,p_4\,p_5\,\overline{p}_6\,\overline{p}_7\,\overline{p}_8$$

Donde el subíndice es el número del cuadrado contado de izquierda a derecha y de arriba abajo.

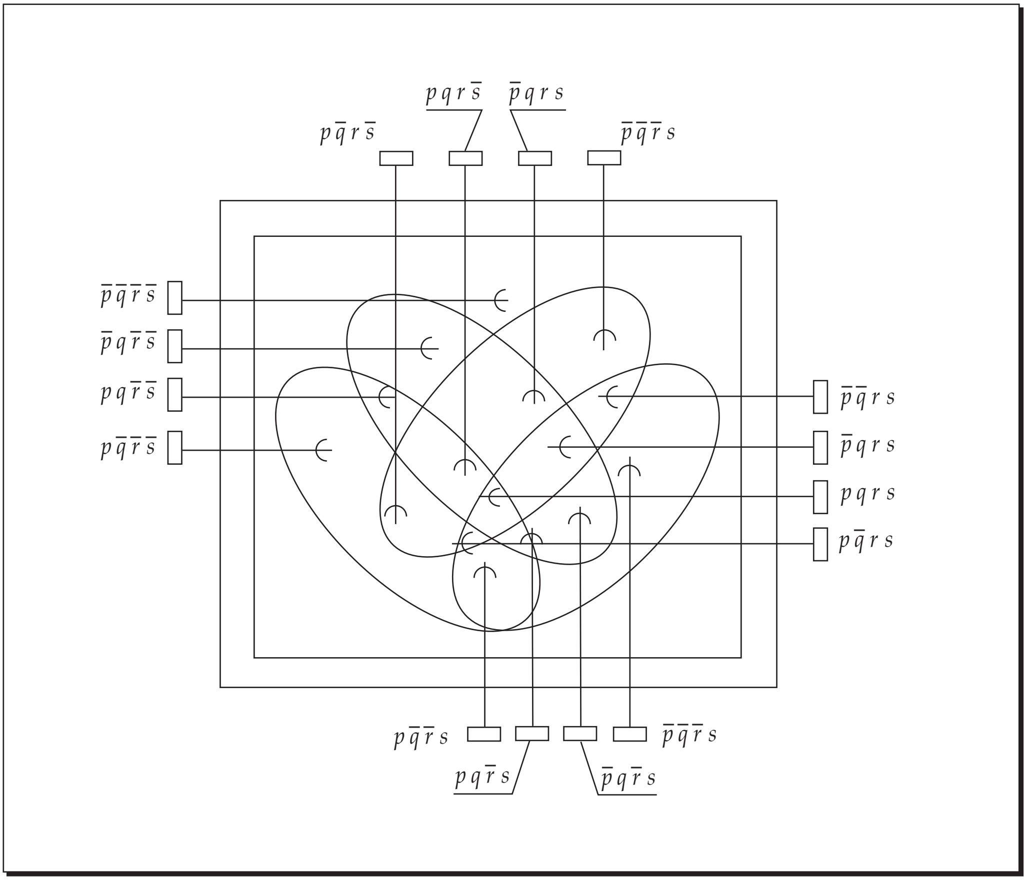
Figura 7. **Diagramas de Venn para ocho variables**



Retículos de este tipo se han usado para la simplificación de redes de conmutadores eléctricos.

El sistema puede desarrollarse en tres dimensiones; por ejemplo, en forma de «tablero de ajedrez espacial» con $8 \times 8 \times 8$ cubos. Para cuatro variables, el propio Venn diseñó una máquina en la cual los predicados, tal y como se muestra en la figura 8 en una visión desde arriba, se representan por elipses.

Figura 8. **Visión desde arriba de una máquina de Venn en tres dimensiones**



5. OPERACIONES CON CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, entre ellos se pueden definir las cuatro operaciones siguientes:

- **Unión o reunión de conjuntos.** Se representa por $\cup$ y dice que es el conjunto de objetos que «al menos» son elementos de uno de los dos conjuntos A y B. Es decir, $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ o } x \in B)$.

  Gráficamente, la figura 9 representa $A \cup B$, y se lee A o B. El símbolo $\cup$ fue introducido por Peano.

- **Intersección.** Se representa por ∩ y expresa al conjunto de objetos que son a la vez de ambos conjuntos. Esto es, $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A$ y $x \in B)$. Gráficamente, la figura 10 (a) representa $A \cap B$, y se lee A intersecta B. Dos conjuntos A y B se dice que son disjuntos cuando su intersección es vacía; en el diagrama de Venn, $A \cap B = \emptyset$. Se muestra en la figura 10 (b).
- **Diferencia.** Se representa por –, e indica el conjunto de objetos que son elementos de A y no lo son de B. O sea, $x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A$ y $x \notin B)$. Gráficamente, la figura 11 representa $A - B$, y se lee A menos B. Esta diferencia también se denomina **complemento** de B respecto a A.
- **Complementariedad.** Si A es un subconjunto del universal ∪, se denomina **complemento** de A al conjunto de los elementos de ∪ que no pertenecen a A. Se indica mediante $\bar{A}$ o, a veces, A'. Es decir, $A' = \{x | x \notin A\}$. Por ejemplo, si ∪ es el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, y A es el conjunto de los números impares enteros, A' es el conjunto de los números pares y el 0.

Las definiciones relativas a la unión e intersección de conjuntos se generalizan sin dificultad a más de dos conjuntos. Es decir, si P_1, P_2, …, P_n son subconjuntos, o partes, de C, se designa por $P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ el conjunto cons-

Figura 9. **Unión de conjuntos**

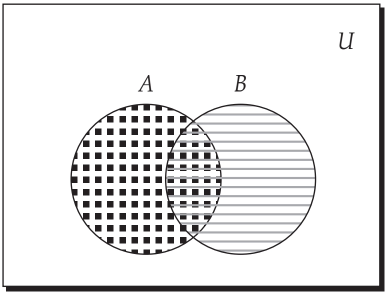


Figura 10. **Intersección de conjuntos**

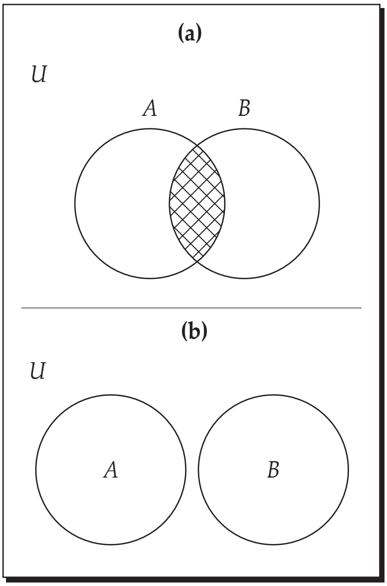
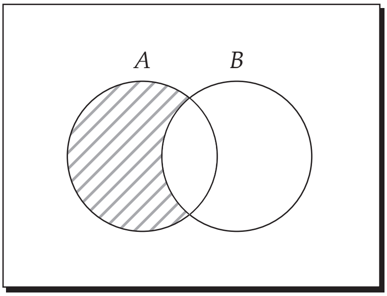


Figura 11. **Diferencia entre A y B**



tituido por los elementos que por lo menos pertenecen a uno de los subconjuntos, P_i. Más generalmente, si I es un conjunto, finito o no, de índices y, si a cada índice $i \in I$, se le hace corresponder un subconjunto $P_i \subset C$, se denomina **unión** o **reunión** de los conjuntos P_i, para $i \in I$, que se representa por $\cup P_i$, al subconjunto de C formado por todos los elementos de C en los que los $i \in I$ pertenecen al menos a uno de los conjuntos P_i. Se verifica: $x \in \cup P_i \Leftrightarrow$ {Existe $i \in I$ tal que $x \in P_i$}.

Mutatis mutandis, se puede decir lo mismo para $\cap_{i \in I} P_i$, y así $x \cap_{i \in I} P_i \Leftrightarrow \{x \in P_i$ cualquiera que sea $i \in I\}$.

Para facilitar la escritura y el razonamiento, se emplean los cuantificadores $\forall$ y $\exists$, ya citados en el epígrafe 2.3. Esto lleva a definir el conjunto o clase asociada a una propiedad.

5.1. IMPLICACIONES Y EQUIVALENCIAS. CUANTIFICADORES

5.1.1. Implicaciones y equivalencias

El estudio de un conjunto dado A conduce muchas veces a particularizar ciertos subconjuntos cuyos elementos verifican una o varias propiedades no pertenecientes a los otros elementos de A. Basta con que la propiedad considerada, P, divida sin ambigüedad al conjunto A en dos clases complementarias A_1 y A'_1, tales que para todo $x \in A_1$ se verifique P y que para todo $x \in A'_1$ no se verifique P.

Considérense ahora dos propiedades P y Q relativas a los elementos de un mismo conjunto A. Con frecuencia se encuentran proposiciones, esto es, teoremas, de la forma siguiente: todo $x \in A$ que verifica P; o sea, la hipótesis verifica también Q, es decir, la conclusión. Esto significa que el subconjunto de los elementos que verifican P está incluido en el subconjunto de los elementos que verifican Q. Entonces, se dice que P implica Q y se escribe $P \Rightarrow Q$ [1].

Así, verbigracia, en el conjunto de los números enteros, si P es la propiedad de ser divisible por 6 y Q es la propiedad de ser divisible por 3, se sabe que $P \Rightarrow Q$.

El «recíproco» del teorema correspondiente a [1] se expresa mediante la implicación $Q \Rightarrow P$. Para que esta última sea verdad es necesario que el subconjunto de los $x \in A$ que verifican Q esté incluido en el subconjunto correspondiente a P.

Si un teorema y su recíproco son simultáneamente ciertos, las propiedades P y Q se llaman **equivalentes**; es decir, los dos subconjuntos se confunden, lo que se escribe mediante la doble implicación: $P \Leftrightarrow Q$, que se lee «se verifica P si y solo si Q se verifica», o también «para que P sea cierto es condición necesaria y suficiente que Q lo sea».

5.1.2. Cuantificadores

Considérese un conjunto A y una determinada propiedad P. Cabe plantearse las cuestiones siguientes:

- ¿Existen elementos de A que poseen dicha propiedad?
- En caso afirmativo, ¿la satisfacen todos?

Para responder a estas preguntas se introducen dos símbolos denominados **cuantificadores**:

- **Cuantificador existencial.** Se representa por $\exists$ y significa: existe al menos un elemento de A que tiene la propiedad P; por ejemplo, la escritura: $(\exists x)(x \in \mathbb{R})$: $4x^2 - 5 = 0$. Significa que existe al menos un número real tal que $4x^2 - 5 = 0$. En este caso, hay dos valores:

$$+\sqrt{\frac{5}{4}} \quad \text{y} \quad -\sqrt{\frac{5}{4}}$$

- **Cuantificador universal.** Se representa por $\forall$ y significa que todo elemento de A verifica P. Así, verbigracia: $(\forall x)(x \in \mathbb{R})$: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; significa que todo número real verifica la igualdad estricta anterior. Lo que puede comprobarse fácilmente.

Empleando estos símbolos, las reglas anteriores se expresan como sigue:

$$x \in \cup_{i \in I} P_i \Leftrightarrow \{\exists i \in I \text{ tal que } x \in P_i\},\ x \in \cup_{i \in I} P_i \Leftrightarrow \{x \in P_i,\ \forall i \in I\}$$

6. LEYES DE OPERACIONES CON CONJUNTOS. ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Dadas las anteriores operaciones entre conjuntos: $\cup$, $\cap$, $-$ y $'$, cualesquiera que sean los conjuntos A, B y C, se verifican las leyes o propiedades siguientes:

- **Asociatividad de la unión e intersección:**

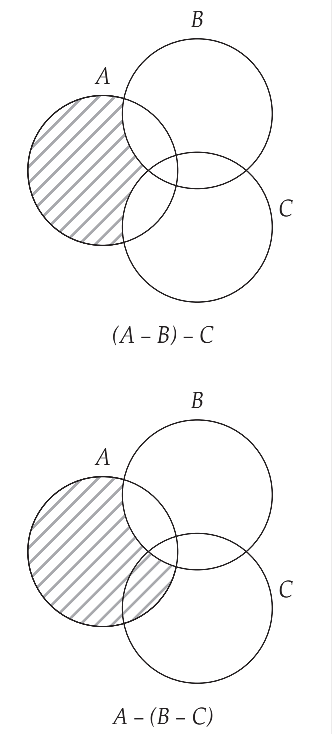
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \Rightarrow \text{La asociatividad de la intersección.}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \Rightarrow \text{La asociatividad de la unión.}$$

En particular: $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cup A = A$.

- **No asociatividad de la diferencia.** Como se muestra en la figura 12, usando los círculos de Venn, la ley – no es asociativa.

Figura 12. **No distributividad de la diferencia**



- **Distributividad entre reunión e intersección y viceversa.** La intersección, respectivamente la unión, es distributiva respecto a la unión, respectivamente la intersección:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- **Antidistributividad de la diferencia.** La diferencia es antidistributiva tanto respecto a la unión como a la intersección:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C),$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

- **Diferencia simétrica.** Se denomina «diferencia simétrica», y también «suma disyuntiva» o «suma booleana», de dos conjuntos A y B, y se representa por $\oplus$ o por Δ, al conjunto $A \oplus B$ de los objetos que pertenecen a uno y a uno solo de los dos conjuntos A, B. Es decir, al conjunto definido por todos los elementos de A que no están en B o por todos los elementos de B que no están en A. Esta diferencia se indica por

$$A \oplus B = \{x|((x \in A) \text{ y } (x \notin B)) \text{ o } ((x \notin A) \text{ y } (x \in B))\},$$

lo que es equivalente a $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{A \cup B - A \cap B)$.

Por ejemplo, si $A = \{1, 3, 5, 7, 11\}$ y B $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, $A - B =$ $= \emptyset$, $B - A = \{9,13\} \Rightarrow A \oplus B = \{9,13\}$.

Esta diferencia simétrica presenta las propiedades siguientes:

– *Conmutatividad.* $A \oplus B = B \oplus A \Rightarrow$ La diferencia simétrica es conmutativa.

  En efecto, $A \oplus B = B \oplus A$, se traduce por: si $x \in A$, $x \in B$, entonces $x \notin A \oplus B$. Si $x \notin A$, $x \in B$, entonces $x \in A \oplus B$. Si $x \in A$ y $x \notin B$, entonces $x \in A \oplus B$. El mismo razonamiento vale para la asociatividad.

– *Asociatividad.* $A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C \Rightarrow$ La diferencia simétrica es asociativa.

  - Si A es un conjunto, $A \oplus A = \emptyset$ y $A \oplus \emptyset = A$.
  - Si A, B, C designan cada una un conjunto, se verifica que

$$A \oplus B = C \Leftrightarrow A \oplus C = B \Leftrightarrow B \oplus C = A$$

  - Si A, B designan un conjunto $\exists X$ tal que $A \oplus X = B (X = A \oplus B)$.

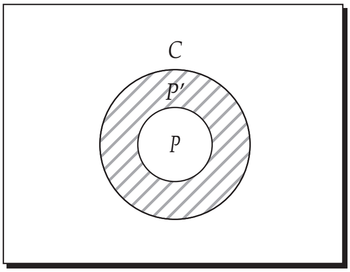
  Esta diferencia caracteriza el «o exclusivo» «Xor» de la lógica matemática.

• **Complementariedad.** Sea P un subconjunto de C, se denomina «complementario» de P respecto de C, y se simboliza por P' o $C - P$, al conjunto formado por todos los elementos de C que no pertenezcan a P. Se tiene pues:

$$x \in P' \Leftrightarrow \{(x \in C) \cap (x \notin P)\},$$

tal y como se muestra en la figura 13. P' es la zona rayada.

Figura 13. **Complementario de un conjunto**



Se pueden escribir las igualdades siguientes:

$$P \cup P' = C, P \cap P' = \emptyset, C(P')' = P$$

• **Leyes de Morgan.** Las siguientes dos propiedades se conocen, en honor de su descubridor, el lógico inglés De Morgan, con el nombre de «leyes de Morgan»:

– $(A \cup B)' = A' \cap B'$, cuya demostración se deja como ejercicio.

– $(A \cap B)' = A' \cup B'$. En efecto,

$$\begin{aligned}(A \cap B)' &= \{x|x' \notin (A \cap B)\} = \{x|x' \in (A \cap B)'\} = \\ &= \{x'|x' \in A \text{ y } x' \in B\} = \{x|x \notin A \text{ y } x \notin B\} = \\ &= \{x|x \notin A \text{ o } x \notin B\} = \{x|x \in A' \text{ o } x \in B'\} = \\ &= \{x|x \in A' \cup B'\} = A' \cup B'\end{aligned}$$

Todas estas leyes se muestran de forma resumida en la tabla 1.

Tabla 1. **Álgebra de conjuntos. Leyes de operaciones con conjuntos**

1. $(A')' = A$	Ley de doble negación
2. $\varnothing' = U$ (Complementariedad)	$U' = \varnothing$ (Complementariedad)
3. $A - A = \varnothing$, $A - \varnothing = A$, $A - B = A \cap B'$ (Diferencia)	
4. $A \cup \varnothing = A$ (Neutralidad)	$A \cap U = A$ (Neutralidad)
5. $A \cup U = U$ (Absorción o denominación)	$A \cap \varnothing = \varnothing$ (Absorción o denominación)
6. $A \cup A = A$ (Idempotencia)	$A \cap A = A$ (Idempotencia)
7. $A \cup A' = U$ («Exclusión»)	$A \cap A' = \varnothing$ («Contradicción»)
Leyes asociativas	
8. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leyes conmutativas	
9. $A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Leyes distributivas	
10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leyes de Morgan	
11. $(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
12. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$	$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

7. PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

Con frecuencia, sobre todo en estadística, interesa encontrar el número de elementos o «cardinalidad» de la «unión de conjuntos finitos». Si se trata de dos conjuntos cualesquiera A y B disjuntos, cada elemento de $A \cup B$ pertenece bien a A o bien a B, pero no simultáneamente a los dos, por lo que se tendría

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Ahora bien, si A y B no fueran disjuntos, la expresión anterior llevaría a contar dos veces los elementos de la intersección $A \cap B$; es decir, el total de elementos que se encuentran en la intersección de ambos conjuntos para obtener $|A \cup B|$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Este resultado se conoce con el nombre de **principio de inclusión-exclusión**. Resultado que puede extenderse a más de dos conjuntos, como sigue:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

EJEMPLO 3

Por ejemplo, supóngase que en una clase hay 31 estudiantes que han obtenido la mejor nota en matemática discreta; 15 con la mejor nota en fundamentos físicos de la informática y 12 con la mejor nota en ambas. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase si cada estudiante obtiene la mejor nota o en matemática discreta o en fundamentos físicos de la informática, o en ambas?

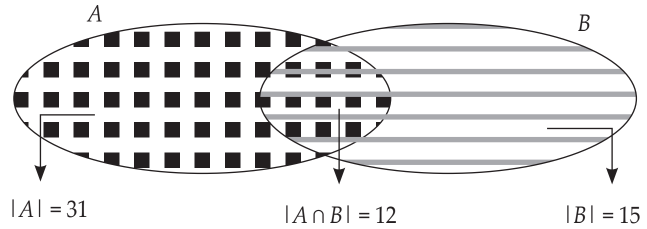
Solución

El diagrama de Venn correspondiente viene dado por la figura 14, en la cual, el conjunto A representa el total de alumnos con la mejor nota en matemática discreta; el conjunto B representa el total de alumnos con la mejor nota en fundamentos físicos de la informática y $A \cap B$ representa el total de alumnos con mejor nota en ambas.

.../...

.../...

Figura 14. **Diagrama de Venn del ejemplo de los alumnos**



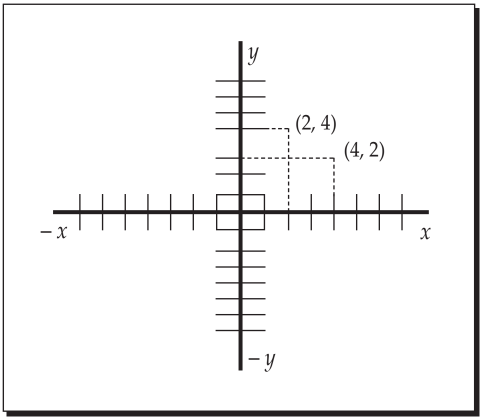
Entonces,

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 31 + 15 - 12 = 34$ alumnos en clase.

8. CONJUNTO PRODUCTO

Sean dos conjuntos $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c, d\}$. El conjunto C de pares ordenados distintos, $C = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\}$, en el que el primer componente de cada par es un elemento de A, en tanto que el segundo elemento de cada par es un elemento de B, se denomina **conjunto producto**, y se representa por $C = A \times B$, en ese orden, de los conjuntos dados. Así que, si A y B son dos conjuntos cualesquiera, se define $A \times B$ como sigue: $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$. Las coordenadas cartesianas en el plano es el ejemplo más conocido de conjunto de pares, siendo las abscisas, x, el primer elemento del par, y la ordenada, y, el segundo elemento del par. Y, como es más que sabido, no es lo mismo (x, y) que (y, x); verbigracia, no es lo mismo, tal y como se muestra en la figura 15, el punto del plano (2, 4) que el (4, 2).

Figura 15. **Puntos en el eje de coordenadas cartesianas**



9. AXIOMÁTICA DE ZERMELO-FRAENKEL PARA TEORÍA DE CONJUNTOS

Fue Zermelo quien presentó una teoría axiomática de conjuntos, luego completada por Fraenkel y Skolem, mucho más simple y comprehensiva a nivel lógico, que lograba eliminar tanto la paradoja de Russell como todas las demás que surgían tanto en el sistema de Cantor como en el de Frege. Los axiomas de la teoría de Zermelo, completada por Fraenkel, son los siguientes:

- **Extensionalidad:** $\forall a(a \in X \leftrightarrow a \in Y) \rightarrow X = Y$. Es decir, dos conjuntos X e Y son «iguales», lo que se representa por $x = y$, si y solo si contienen los mismos elementos. En otros términos, este axioma afirma que un conjunto está determinado por su extensión; esto es, dando todos sus elementos.
- **Conjunto vacío:** $\exists \emptyset \forall a(a \in \emptyset)$. Esto es, existe un conjunto representado por Ø, sin elementos. Y es único por el axioma de extensionalidad. En efecto, si Ø y Ø' fueran dos conjuntos vacíos distintos, entonces siempre verificarían $a \notin \emptyset$ y $a \notin \emptyset'$ para cualquier a y por tanto también $a \in \emptyset \leftrightarrow a \in \emptyset'$ para todo a, de modo que por el axioma anterior, $\emptyset = \emptyset'$.
- **De pares:** $\forall X, Y \exists Z \forall a(a \in Z \leftrightarrow a = X \vee a = Y)$. O sea, dados cualesquiera conjuntos X e Y, existe otro conjunto representado por $\{x, y\}$, cuyos elementos son únicamente X e Y. El conjunto $\{x, y\}$ se denomina **par desordenado** de X e Y. Si se aplica el conjunto de pares a un solo conjunto X, se obtiene el par $\{x, x\}$, cuyo único elemento es, obviamente, x, y por ello puede representarse como $\{x\}$. A este último conjunto puede aplicársele, de nuevo, el axioma de pares, dando lugar al conjunto $\{\{x\}\}$, conjunto al cual puede, asimismo, aplicársele el axioma de pares, obteniéndose el conjunto $\{\{\{x\}\}\}$, y así sucesivamente. Este proceso de construcción de conjuntos, que fue el que siguió Von Neumann, puede aplicarse al único conjunto dado y conocido explícitamente, Ø, obteniéndose una serie infinita de conjuntos: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$
- **Unión:** $\forall X \exists Y \forall a(a \in Y \leftrightarrow \exists Z(Z \in X \wedge a \in Z))$. En otros términos, dada cualquier colección o conjunto de conjuntos C, existe un conjunto, representado por $\cup\, C$ y denominado «unión de C», que contiene todos los elementos de cada conjunto de C.
- **Conjunto potencia:** $\forall X \exists Y \forall Z(Z \in Y \leftrightarrow \forall a(a \in Z \rightarrow a \in X))$. Lo que viene a decir es que para cualquier conjunto X existe otro conjunto representado por $\mathcal{P}(X)$ y denominado **conjunto de las partes** de X, que contiene todos los subconjuntos de X.

- **Esquema axiomático de especificación:** $\forall X \exists Y \forall a(a \in Y \leftrightarrow a \in X \wedge \varphi(a))$. En otras palabras, sea $\varphi(\vee)$ una fórmula de un lenguaje de primer orden que contenga una variable libre $\vee$. Entonces, para cualquier conjunto X existe un conjunto Y cuyos elementos son aquellos elementos a de X que cumplen $\varphi(a)$.

- **Esquema axiomático de reemplazo.** Este axioma, debido a Fraenkel, puede expresarse como sigue: si $\forall X \forall Y \forall Z \exists \vee (X \in \vee \wedge \varphi(X,Y) \wedge (\varphi(X, Z) \rightarrow Y = Z))$, entonces $\exists W \forall Y (Y \in W \leftrightarrow \exists X(X \in \vee \wedge \varphi(X,Y)))$. De otro modo, si $\varphi\ (a, b)$ es una sentencia tal que para cualquier elemento a de un conjunto X el conjunto Y es igual $\{b|\varphi((a, b)\}$ y existe, entonces existe una función $f: x \rightarrow$ $\rightarrow y$, tal que $f(a) = y$. Es decir, si $\vee$ es un conjunto y f es una fórmula con dos variables libres X e Y, tales que para cada $X \in \vee$ existe un único Y tal que $f(X, Y)$ se cumple, entonces existe un conjunto W tal que $Y \in W$ si y solo si $f(X, Y)$.

- **Infinitud:** $\exists X(\emptyset \in X \wedge \forall(Y \in X \rightarrow Y \cup \{Y\} \in X))$. O sea, existe un conjunto X tal que el vacío $\emptyset \in X$ y tal que si $Y \in X$, entonces $Y \cup \{Y\} \in X$. Este axioma, introducido en 1908 por Zermelo, permite la obtención de números naturales como conjuntos dentro de ZF.

- **Regularidad o de fundación:** $\forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists Y(Y \in X \wedge \forall Z(Z \in Y \rightarrow$ $\rightarrow Y \notin X)))$. Esto es, para todo conjunto no vacío X existe un conjunto $Y \in X$ tal que $X \cap Y = \emptyset$. Esta formulación la dio Zermelo en 1930. Von Neumann, en 1929, presentó un axioma equivalente pero más complicado. Este axioma prohíbe la existencia de:

  – Conjuntos extraños, tales como los que cumplan $X \in X$ o $X \in Y \wedge \in X$.

  – La existencia de cadenas descendentes infinitas: $\ldots \in X_2, \in X, \in X_0$. Si se excluye este axioma, la teoría de conjuntos resultante recibe el nombre de **teoría de conjuntos no bien fundados**.

10. FUNDAMENTACIÓN DE LA MATEMÁTICA A PARTIR DEL CONJUNTO VACÍO: DEFINICIÓN DE NÚMEROS NATURALES POR VON NEUMANN

Von Neumann, en una carta fechada en Budapest a 15 de agosto de 1923, informaba a Zermelo de las ideas que estaba desarrollando para su tesis. Bueno, siendo precisos, para una de las dos tesis doctorales que presentaría en 1925. La otra era en el campo de la ingeniería química, en la que se había graduado. En ella, después de exponer el objeto de su trabajo basado en los «fundamentos de la teoría de conjuntos» de Zermelo y de señalar los puntos en los que se separaba de él, indicaba los puntos que resultaban «nuevos»:

«1. La teoría de los números ordinales (parte 2, cap. 2).

He logrado establecer los números ordinales sobre la única base de los axiomas de la teoría de conjuntos. La idea básica es la siguiente: cada número ordinal es el conjunto de todos los precedentes. De modo que (poniendo 0 para el conjunto vacío)

$0 = 0$

$1 = \{0\}$,

$2 = \{0, \{0\}\}$,

$3 = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$,

…………

$W = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \{\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \ldots\}$,

$W + 1 = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \{\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \ldots, \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \ldots\}\}$,

……………..

(Para los números positivos finitos, la regla dice pues: $x + 1 = x + \{x\}$). Esta teoría tiene sentido también dentro de la "teoría de conjuntos ingenua". (Tratada ingenuamente, aparecerá pronto en la revista de la Universidad de Szegedin) […]».

Los otros dos puntos, que aquí no se explican, completan la misiva.

John von Neumann. Matemático húngaro, nacionalizado estadounidense, nació en el seno de una familia de banqueros judíos.

En 1921 se matriculó en la Universidad de Budapest, donde se doctoró en Matemáticas cinco años después, aunque pasó la mayor parte de ese tiempo en otros centros académicos.

En la Universidad de Berlín asistió a los cursos de Einstein. Estudió también en la Escuela Técnica Superior de Zúrich, donde en 1925 se graduó en Ingeniería Química, y frecuentó, asimismo, la Universidad de Gotinga.

En Gotinga conoció al matemático Hilbert –cuya obra ejerció sobre él considerable influencia– y contribuyó de manera importante al desarrollo de lo que Hilbert llamó la **teoría de la demostración**.

Aportó diversas mejoras a la fundamentación de la teoría de conjuntos elaborada por Zermelo.

Asistió también al nacimiento de la teoría cuántica de Heisenberg y se interesó por la aplicación del programa formalista de Hilbert a la formulación matemática de esa nueva rama de la física.

Es el autor de la primera teoría axiomática abstracta de los llamados –precisamente por él– **espacios de Hilbert** y de sus operadores, que a partir de 1923 habían empezado a demostrar su condición de instrumento matemático por excelencia de la mecánica cuántica; la estructura lógica interna de esta última se puso de manifiesto merced a los trabajos de Von Neumann, quien contribuyó a proporcionarle una base rigurosa para su exposición.

También es notable su apertura de nuevas vías al desarrollo de la matemática estadística a partir de su estudio de 1928 sobre los juegos de estrategia, posteriormente desarrollado en la famosa obra *Theory of games and economic behavior*, publicada en 1944 y escrita en colaboración con Morgenstern.

Murió en Washington en 1957.

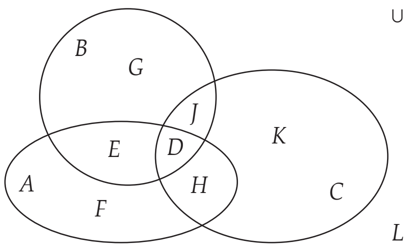
CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Conjunto y su definición: axiomática.
- Representación de conjuntos: diagrama de Venn.
- Implicación, equivalencia, cuantificador existencial y universal.
- Definición de «álgebra de conjuntos» y operaciones en la misma.
- Principio de exclusión-inclusión.

EJERCICIOS VOLUNTARIOS

Tras el estudio de esta Unidad didáctica, el estudiante puede hacer, por su cuenta, una serie de ejercicios voluntarios, como los siguientes:

1. Dados los conjuntos: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\{2, 4, 6, \ldots\}$ y $\{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$; definirlos por comprensión.
2. Dado el conjunto $C = \{a, b, c\}$, describir todos sus subconjuntos y los pares de conjuntos complementarios, siendo el conjunto U el propio C.
3. Demuestre que $A - B = A \cap B' = B' - A'$.
4. Dado el siguiente diagrama de Venn:



Comprobar: $E = (A \cap B) \cap C'$, $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cup B \cap C$ es ambiguo, y $A' \cap C' = G \cup L$.

5. Teniendo en cuenta la tabla 1 de la Unidad didáctica, demostrar las leyes asociativas, las distributivas y las de Morgan.
6. Entre los alumnos de Udima se hizo una encuesta sobre gustos culinarios, obteniéndose los siguientes resultados: a 953 les gusta la carne; a 847 les gusta el pescado; a 724 les gustan los huevos; a 687 les gusta la carne y el pescado; a 598 les gusta la carne y los huevos; a 565, el pescado y los huevos; y a 483, las tres cosas. Se trata de saber a cuántos alumnos se les hizo la encuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BREUER, J.: *Iniciación a la teoría de conjuntos*, Madrid, Paraninfo, 1970.

GARCÍA MERAYO, F.: *Matemática discreta*, Madrid, Thomson, Paraninfo, SA, 2005.

LIPSCHUTZ, S.: *Teoría de conjuntos. 530 problemas resueltos*, Serie de Compendios Schaum, Nueva York, McGraw-Hill, 1963.